

2026 年度 幾何学 II

2026 年 10 月 19 日

目次

第 1 章	準備	1
1.1	位相空間と連続写像	1
1.2	開基と準基	4
1.3	直積と直和	5
1.4	商空間	12
1.5	基本的な空間	16
1.5.1	$\mathbb{R}^n$	16
1.5.2	D^n, S^{n-1}	19
1.5.3	$\mathbb{C}, \mathbb{C}^n$	21
1.5.4	$\mathbb{H}, \mathbb{H}^n$	23
第 2 章	基本群	27
2.1	ホモトピー	27
2.2	道とホモトピー	29
第 3 章	被覆空間と基本群	33

問のリスト

問 1.1	3
問 1.2	6
問 1.3	7
問 1.4	10
問 1.5	12
問 2.1	31

第 1 章 準備

証明のないものは、例えば [1] を見よ.

このノートではしばしば写像の合成 $g \circ f$ の「 $\circ$ 」を省略して gf と書く.

1.1 位相空間と連続写像

定義 1.1.1 X を集合とする. X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ (すなわち $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$) が次の三つの条件 O1, O2, O3 をみたすとき, $\mathcal{O}$ は X に **位相を定める** といい, 組 $(X, \mathcal{O})$ を **位相空間 (topological space)** という. 混乱のおそれのないときは $\mathcal{O}$ を省略して, 位相空間 X と書くことが多い. また, しばしば, $\mathcal{O}$ のことを X の **位相 (topology)** とよぶ.

O1 $X, \emptyset \in \mathcal{O}$.

O2 $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

O3 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ の元を X の **開集合 (open set)** とよぶ.

定義 1.1.2 X, Y を位相空間とする.

写像 $f: X \rightarrow Y$ が点 $a \in X$ で **連続 (continuous)**

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a の近傍 U が存在して $f(U) \subset V$ となる.

$f: X \rightarrow Y$ が X の各点で連続であるとき f を **連続写像 (continuous map, continuous mapping)** という.

命題 1.1.3 $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 次は同値.

1. f は連続.

2. 開集合の f による逆像は開集合.

すなわち, Y の任意の開集合 O に対し, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である.

3. 閉集合の f による逆像は閉集合.

すなわち, Y の任意の閉集合 F に対し, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である.

□

命題 1.1.4 X, Y, Z を位相空間とする.

1. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ がともに連続ならば, 合成 $g \circ f: X \rightarrow Z$ も連続である.

2. 恒等写像 $1_X: X \rightarrow X$ は連続である.

□

定義 1.1.5 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は, 全単射でありかつ逆写像 f^{-1} も連続であるとき, **同相写像 (homeomorphism)** であるという.

X から Y への同相写像が存在するとき, X と Y は **同相 (homeomorphic)** であるという. この講義では X と Y が同相であるとき $X \cong Y$ と書く (他の意味でも「 $\cong$ 」を使うことはある).

命題 1.1.6 X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. 次は同値.

1. f は同相写像.

2. 連続写像 $g: Y \rightarrow X$ で, $g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$ をみたすものが存在する.

□

定義 1.1.7 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A の部分集合族 $\mathcal{O}_A$ を

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

と定めると, $\mathcal{O}_A$ は A の位相となる. この位相を X による A の **相対位相 (relative topology)** という.

位相空間の部分集合に相対位相をいれて位相空間と見たとき, **部分空間 (subspace)** という.

補題 1.1.8 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ を部分空間, $B \subset A$ を部分集合とする.

1. B が部分空間 A の閉集合であることと, X の閉集合 F が存在し, $B = A \cap F$ と

なることは同値である.

2. A が X の閉集合であるとき, B が部分空間 A の閉集合であることと, B が X の閉集合であることは同値である.
3. A が X の開集合であるとき, B が部分空間 A の開集合であることと, B が X の開集合であることは同値である.

□

補題 1.1.9 X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

$F_1, \dots, F_n$ を X の閉集合で, $X = \bigcup_{i=1}^n F_i$ であるとする.

すべての i に対し, f を (X の) 部分空間 F_i へ制限したもの $f|_{F_i}: F_i \rightarrow Y$ が連続であるならば, $f: X \rightarrow Y$ は連続である.

証明 $G \subset Y$ を閉集合とする.

$$\begin{aligned} f^{-1}(G) &= X \cap f^{-1}(G) \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right) \cap f^{-1}(G) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (F_i \cap f^{-1}(G)) \end{aligned}$$

である. $j_i: F_i \rightarrow X$ を包含写像とすると, $f|_{F_i} = f j_i$ であるから

$$F_i \cap f^{-1}(G) = j_i^{-1}(f^{-1}(G)) = (f j_i)^{-1}(G) = (f|_{F_i})^{-1}(G)$$

で, $f|_{F_i}$ が連続なので $F_i \cap f^{-1}(G)$ は部分空間 F_i の閉集合である. F_i は X の閉集合なので補題 1.1.8 より $F_i \cap f^{-1}(G)$ は X の閉集合である. よって $f^{-1}(G)$ は有限個の X の閉集合の和集合であるから X の閉集合.

したがって f は連続.

□

問 1.1 閉集合が無限個の場合, 同様なことは一般には成り立たない. 成り立たないような例を挙げよ.

補題 1.1.10 X, Y を位相空間, $A \subset X, B \subset Y$ を部分空間, $i: A \rightarrow X, j: B \rightarrow Y$ を包含写像とする. このとき, 次が成り立つ.

1. $i: A \rightarrow X$ は連続.
2. 写像 $f: X \rightarrow B$ が連続 $\Leftrightarrow$ 合成 $j \circ f: X \rightarrow Y$ が連続.
3. $f: X \rightarrow Y$ を連続写像で, $f(A) \subset B$ であるものとする.

このとき, f を A に制限したものを部分空間 A から部分空間 B への写像とみたものは連続である.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i \uparrow & & \uparrow j \\ A & \xrightarrow{f|_A} & B \end{array}$$

証明 1. $O \subset X$ を開集合とすると $i^{-1}(O) = A \cap O$ は部分空間 A の開集合. よって i は連続.

2. $\Rightarrow$. 上で見たように包含写像 j は連続. 連続写像の合成は連続なので $j \circ f$ は連続 ($U \subset Y$ が開集合なら $j^{-1}(U) \subset B$ は開集合ゆえ $(j \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(j^{-1}(U))$ も開集合).

$\Leftarrow$. $U \subset B$ を部分空間 B の開集合とすると, (相対位相の定義より) Y の開集合 O が存在して $U = B \cap O$ となる. $B \cap O = j^{-1}(O)$ であるから,

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(B \cap O) = f^{-1}(j^{-1}(O)) = (j \circ f)^{-1}(O)$$

であり, 仮定より $j \circ f$ が連続なので $(j \circ f)^{-1}(O)$ は開集合. よって $f^{-1}(U)$ は開集合. したがって f は連続.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \nearrow jf & \uparrow j \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

3. f, i が連続だから $f \circ i$ も連続. よって $j \circ f|_A$ も連続. したがって, 2 より, $f|_A$ は連続.

□

1.2 開基と準基

定義 1.2.1 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の **基 (base)** あるいは **開基 (open base)** である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の開集合 O が $\mathcal{B}$ に属する開集合の和集合として表せる: $O = \bigcup_{\lambda} O_{\lambda} \ (O_{\lambda} \in \mathcal{B})$.

位相空間 X の開基ということもある.

定義 1.2.2 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の **準基 (subbase)** である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{B}$ の有限個の元の共通部分として表される集合全体が $\mathcal{O}$ の基となる.

ただし, 0 個の集合の共通部分は全体 X である, あるいはそう約束する.

補題 1.2.3 X を集合とし, $\mathcal{O}_{\lambda}$ を X の位相とする. このとき $\mathcal{O} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_{\lambda}$ も X の位相となる □

定義 1.2.4 X を集合とする. $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{B}$ を含む位相全ての共通部分, すなわち $\mathcal{B}$ の元が開集合となるような最弱の位相を $\mathcal{B}$ が **生成 (generate) する位相** といい $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ で表す.

命題 1.2.5 X を集合, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ とする. このとき, $\mathcal{B}$ は, $\mathcal{B}$ の生成する位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の準基である. すなわち, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の元 (開集合) は, $\mathcal{B}$ の元の有限個の共通部分たちの和集合で書けるものたちである. □

命題 1.2.6 $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間, $\mathcal{B}_X$ を X の開基, $\mathcal{B}_Y$ を Y の開基とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. このとき次が成り立つ.

1. f が連続 $\Leftrightarrow$ 任意の $O \in \mathcal{B}_Y$ に対し $f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X$.
2. f が開写像 $\Leftrightarrow$ 任意の $O \in \mathcal{B}_X$ に対し $f(O) \in \mathcal{O}_Y$.

□

命題 1.2.7 X, Y を位相空間, $\mathcal{B}$ を Y の準基とし, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. このとき f が連続 $\Leftrightarrow$ 任意の $O \in \mathcal{B}$ に対し $f^{-1}(O)$ は開集合. □

1.3 直積と直和

二つの位相空間の直積と直和について述べるが、三つでも四つでも無限個でも同様なことが成り立つ。

定義 1.3.1 X_1, X_2 を位相空間とし, $p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ を直積集合からの射影とする. p_1, p_2 が連続となる $X_1 \times X_2$ の最弱の位相を **直積位相 (product topology)** といい, 直積集合 $X_1 \times X_2$ にこの位相を入れた空間を X_1 と X_2 の **直積空間 (product space)** という.

特に断らなければ, 直積集合には直積位相を入れる.

注意 1.3.2 p_1, p_2 が連続となる最弱の位相が存在する.

具体的には

$$\bigcup_i \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \text{ は } X_i \text{ の開集合}\}$$

の生成する位相, いいかえると

$$\{O_1 \times O_2 \mid O_i \text{ は } X_i \text{ の開集合}\}$$

を開基とする位相.

補題 1.3.3 X_1, X_2 を位相空間とする. 射影 $p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ は連続開写像である.

証明 直積位相の定義より p_i は連続である.

また O_i が X_i の開集合であれば, $p_i(O_1 \times O_2) = O_i$ は X_i の開集合である. 開基の像が開集合なので, p_i は開写像である. $\square$

問 1.2 直積空間からの射影は閉写像とは限らない. 閉写像にならない例を挙げよ.

直積空間への連続写像というのは比較的扱いやすい.

命題 1.3.4 X_1, X_2 を位相空間とし, $p_i: X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ を射影とする.

1. Y を位相空間, $f: Y \rightarrow X_1 \times X_2$ を写像とする. このとき f が連続 $\Leftrightarrow p_1 f, p_2 f$ がどちらも連続

2. Y を位相空間, $f_i: Y \rightarrow X_i$ を連続写像とする. このとき, 連続写像 $f: Y \rightarrow X_1 \times X_2$ で, $p_1 f = f_1, p_2 f = f_2$ をみたすものがただ一つ存在する.

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & f_1 \swarrow & & \searrow f_2 & \\ X_1 & & & & X_2 \\ & \xleftarrow{p_1} X_1 \times X_2 \xrightarrow{p_2} & & & \end{array}$$

証明 1. $\Rightarrow$. 直積位相の定義より p_1, p_2 は連続なので, f が連続なら $p_1 f, p_2 f$ は連続.

$\Leftarrow$. $\cup_i \{p_i^{-1}(O_i) \mid O_i \text{ は } X_i \text{ の開集合}\}$ が $X_1 \times X_2$ の準基である. 仮定より $p_i f$ が連続なので, $f^{-1}(p_i^{-1}(O_i)) = (p_i f)^{-1}(O_i)$ は Y の開集合である. 準基の元の逆像が開集合だから, f は連続.

2. 写像 $f: Y \rightarrow X_1 \times X_2$ を $f(y) = (f_1(y), f_2(y))$ により定めると

$$p_i f(y) = p_i(f_1(y), f_2(y)) = f_i(y)$$

であるから $p_i f = f_i$ をみたす. 仮定より f_i は連続ゆえ $p_i f$ は連続. よって 1 より, f は連続.

$g: Y \rightarrow X_1 \times X_2$ が $p_i g = f_i$ をみたすとする. $y \in Y$ に対し $g(y) = (x_1, x_2)$ とすると,

$$x_i = p_i(x_1, x_2) = p_i g(y) = f_i(y)$$

だから, $g(y) = (f_1(y), f_2(y)) = f(y)$ ゆえ $g = f$.

□

問 1.3 X_1, X_2, Y_1, Y_2 を位相空間, $f_1: X_1 \rightarrow Y_1, f_2: X_2 \rightarrow Y_2$ を連続写像とする. 写像 $f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$ を $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ で定めると, $f_1 \times f_2$ は連続であることを示せ.

注意 1.3.5 $\text{Map}(X, Y)$ を X から Y への写像全体のなす集合, $F(X, Y)$ を X から Y への連続写像全体のなす集合とする.

写像 $(p_{1*}, p_{2*}): \text{Map}(Y, X_1 \times X_2) \rightarrow \text{Map}(Y, X_1) \times \text{Map}(Y, X_2)$ を $(p_{1*}, p_{2*})(f) = (p_1 f, p_2 f)$ で定める.

命題 1.3.10.1 の「 $\Rightarrow$ 」は

$$(p_{1*}, p_{2*})(F(Y, X_1 \times X_2)) \subset F(Y, X_1) \times F(Y, X_2)$$

であることを, 「 $\Leftarrow$ 」は

$$(p_{1*}, p_{2*})^{-1}(F(Y, X_1) \times F(Y, X_2)) \subset F(Y, X_1 \times X_2)$$

であることを示している.

命題 1.3.10.2 の証明の前半は (p_{1*}, p_{2*}) が全射であること, 後半は単射であることを示している.

$$\begin{array}{ccc} \text{Map}(Y, X_1 \times X_2) & \xrightarrow[\cong]{(p_{1*}, p_{2*})} & \text{Map}(Y, X_1) \times \text{Map}(Y, X_2) \\ \cup & & \cup \\ F(Y, X_1 \times X_2) & \xrightarrow[\cong]{} & F(Y, X_1) \times F(Y, X_2) \end{array}$$

命題 1.3.6 X_1, X_2 を位相空間, $A_1 \subset X_1, A_2 \subset X_2$ を部分集合とする.

$A_1 \times A_2 \subset X_1 \times X_2$ について, X_1 の部分空間 A_1 と X_2 の部分空間 A_2 との直積空間としての位相と, 直積空間 $X_1 \times X_2$ からの相対位相は同じである.

証明 $\mathcal{O}_P$ を直積位相, $\mathcal{O}_{sub}$ を相対位相としたとき, $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{sub}$ を示そう.

$k = 1, 2$ に対し $i_k: A_k \rightarrow X_k$ を包含写像, $p_k: X_1 \times X_2 \rightarrow X_k, q_k: A_1 \times A_2 \rightarrow A_k$ を射影とする. 同じ id だとややこしいので

$$\begin{aligned} \text{id}_s &:= \text{id}: (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_P) \rightarrow (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_{sub}), \\ \text{id}_P &:= \text{id}: (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_{sub}) \rightarrow (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_P) \end{aligned}$$

と書く (集合の間の写像としてはどちらも恒等写像). また, 包含写像を

$$\begin{aligned} i &:= (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_P) \rightarrow X_1 \times X_2 \\ j &:= (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_{sub}) \rightarrow X_1 \times X_2 \end{aligned}$$

と書く (集合の間の写像としては i と j は同じもの, どちらも包含写像).

まず $\mathcal{O}_{sub} \subset \mathcal{O}_P$ を示す. これには id_s が連続であることを示せばよい.

注意 X を集合, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相とすると,

$$\begin{aligned} \text{id}: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2) \text{ が連続} &\Leftrightarrow \text{任意の } O \in \mathcal{O}_2 \text{ に対し } \text{id}^{-1}(O) \in \mathcal{O}_1 \\ &\Leftrightarrow \mathcal{O}_2 \subset \mathcal{O}_1 \end{aligned}$$

である (2つ目の同値は $\text{id}^{-1}(O) = O$ だから) .

$k = 1, 2$ に対し $p_k i = i_k q_k: (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_P) \rightarrow X_k$ は連続であるから命題 1.3.4 より $i: (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_P) \rightarrow X_1 \times X_2$ は連続である.

$$\begin{array}{ccc} (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_P) & \xrightarrow{i} & X_1 \times X_2 \\ q_k \downarrow & & \downarrow p_k \\ A_k & \xrightarrow{i_k} & X_k \end{array}$$

$j \circ \text{id}_s = i$ は連続ゆえ, 補題 1.1.10.2 より $\text{id}_s: (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_P) \rightarrow (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_{sub})$ は連続.

$$\begin{array}{ccc} & & X_1 \times X_2 \\ & \nearrow i & \uparrow j \\ (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_P) & \xrightarrow{\text{id}_s} & (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_{sub}) \end{array}$$

したがって $\mathcal{O}_{sub} \subset \mathcal{O}_P$.

$\mathcal{O}_P \subset \mathcal{O}_{sub}$ を示そう. これには id_P が連続であることを示せばよい. $k = 1, 2$ に対し, $i_k \circ q_k \circ \text{id}_P = p_k \circ j = p_k|_{A_1 \times A_2}$ である. p_k は直積空間の射影だから連続で, i_k, j は部分空間の包含であるから, 補題 1.1.10.3 より $q_k \circ \text{id}_P$ は連続. よって命題 1.3.4 より id_P は連続.

$$\begin{array}{ccccc} X_1 \times X_2 & \xrightarrow{p_k} & & & X_k \\ \uparrow j & & & & \uparrow i_k \\ (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_{sub}) & \xrightarrow{\text{id}_P} & (A_1 \times A_2, \mathcal{O}_P) & \xrightarrow{q_k} & A_k \end{array}$$

したがって $\mathcal{O}_P \subset \mathcal{O}_{sub}$. □

定義 1.3.7 X_1, X_2 を位相空間とし, $i_j: X_j \rightarrow X_1 \amalg X_2$ を非交和への包含写像とする. i_1, i_2 が連続となる $X_1 \amalg X_2$ の最強の位相を **直和位相 (coproduct topology)** といい, $X_1 \amalg X_2$ にこの位相を入れた空間を X_1 と X_2 の **位相和 (topological sum)** とか **直和空間 (coproduct space)** という.

特に断らなければ, 非交和には直和位相を入れる.

注意 1.3.8 i_1, i_2 が連続となる最強の位相が存在する.

具体的には

$$\begin{aligned} & \bigcap_j \{O \subset X_1 \amalg X_2 \mid i_j^{-1}(O) \text{ は } X_j \text{ の開集合}\} \\ &= \{O \subset X_1 \amalg X_2 \mid j = 1, 2 \text{ に対し } O \cap X_j \text{ は } X_j \text{ の開集合}\} \\ &= \{O_1 \amalg O_2 \mid j = 1, 2 \text{ に対し } O_j \text{ は } X_j \text{ の開集合}\} \end{aligned}$$

である.

問 1.4 これが位相であることを示せ (1 行目あるいは 2 行目の形が扱いやすいと思う).

補題 1.3.9 X_1, X_2 を位相空間とする. 包含 $i_j: X_j \rightarrow X_1 \amalg X_2$ は連続かつ開かつ閉写像である.

証明 定義より i_j は連続.

O_j を X_j の開集合とする.

$$i_j(O_j) \cap X_k = \begin{cases} O_j, & k = j \\ \emptyset, & k \neq j \end{cases}$$

であるから $i_j(O_j) \cap X_k$ は X_k の開集合. よって $i_j(O_j)$ は $X_1 \amalg X_2$ の開集合. したがって i_j は開写像.

$F \subset X_1 \amalg X_2$ が閉集合

$\Leftrightarrow F^c = (F \cap X_1)^{c_1} \amalg (F \cap X_2)^{c_2} \subset X_1 \amalg X_2$ が開集合

$\Leftrightarrow (F \cap X_j)^c$ が X_j の開集合

$\Leftrightarrow F \cap X_j$ が X_j の閉集合

(ただし $-^{c_k}$ は X_k における補集合を表す) であることに注意すると, 開写像の場合と同様に i_j が閉写像であることが分かる. $\square$

位相和からの連続写像というのは比較的扱いやすい.

命題 1.3.10 X_1, X_2 を位相空間とし, $i_j: X_j \rightarrow X_1 \amalg X_2$ を包含とする.

1. Y を位相空間, $f: X_1 \amalg X_2 \rightarrow Y$ を写像とする. このとき f が連続 $\Leftrightarrow f i_1, f i_2$ がどちらも連続
2. Y を位相空間, $f_j: X_j \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき, 連続写像 $f: X_1 \amalg X_2 \rightarrow Y$ で, $f i_1 = f_1, f i_2 = f_2$ をみたすものがただ一つ存在する.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Y & & \\
 & \nearrow f_1 & \uparrow f & \nwarrow f_2 & \\
 X_1 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \amalg X_2 & \xleftarrow{i_2} & X_2
 \end{array}$$

証明 1. $\Rightarrow$. 直和位相の定義より i_1, i_2 は連続なので, f が連続なら $f i_1, f i_2$ は連続.

$\Leftarrow$. $U \subset Y$ を開集合とする. 仮定より $f i_j$ は連続なので, $i_j^{-1}(f^{-1}(U)) = f i_j^{-1}(U)$ は X_j の開集合. よって $f^{-1}(U)$ は $X_1 \amalg X_2$ の開集合 (注意 1.3.8 参照). したがって f は連続.

2. 写像 $f: X_1 \amalg X_2 \rightarrow Y$ を

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in X_1 \\ f_2(x), & x \in X_2 \end{cases}$$

により定める (非交和なので well-defined) と $f i_j = f_j$ をみたす. 仮定より f_j は連続ゆえ $f i_j$ は連続. よって 1 より, f は連続.

$f i_j = f_j$ をみたす写像が一意的であるのはあきらか.

□

注意 1.3.11 注意 1.3.5 と同様に次の全単射がある.

$$\begin{array}{ccc}
 h \mapsto & \longrightarrow & (h i_1, h i_2) \\
 \cap & & \cap \\
 \text{Map}(X_1 \amalg X_2, Y) & \xrightarrow[\cong]{(i_1^*, i_2^*)} & \text{Map}(X_1, Y) \times \text{Map}(X_2, Y) \\
 \cup & & \cup \\
 F(X_1 \amalg X_2, Y) & \xrightarrow[\cong]{} & F(X_1, Y) \times F(X_2, Y)
 \end{array}$$

1.4 商空間

定義 1.4.1 $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. Y の部分集合族

$$\mathcal{O}_f = \{O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$$

は Y に位相を与える. この位相を f による **等化位相** といい, 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_f)$ を f による **等化空間** という.

問 1.5 $\mathcal{O}_f$ が位相であること, および f を連続にする最強の位相であることを示せ.

定義 1.4.2 関係 $\sim$ を位相空間 X 上の同値関係とする. 商集合 $X/\sim$ に, 自然な射影 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ による等化位相を与えたものを同値関係 $\sim$ による **商空間 (quotient space)** といい, この位相を **商位相 (quotient topology)** という.

定義により, 「 $O \subset X/\sim$ が開集合 $\Leftrightarrow \pi^{-1}(O)$ が開集合」である.

等化位相, 商空間でよく使う/大事なのは次の性質である (商空間からの連続写像というのは比較的扱いやすい).

命題 1.4.3 X, Z を位相空間, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とし, Y に f による等化位相を入れる. $g: Y \rightarrow Z$ を写像とする.

このとき g が連続 $\Leftrightarrow gf: X \rightarrow Z$ が連続.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{gf} & Z \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ Y & & \end{array}$$

証明 $\Rightarrow$ はあきらか.

gf が連続であるとする. $U \subset Z$ を開集合とする. gf が連続であるから $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (gf)^{-1}(U)$ は X の開集合. したがって $g^{-1}(U)$ は Y の開集合. よって g は連続. $\square$

定義 1.4.4 X を位相空間, $A \subset X$ を空でない部分空間とする.

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } x, y \in A$$

という同値関係による商空間を, 部分空間 A を **一点に縮めた空間**とか **一点につぶした空間**といい, X/A と書く.

$A = \emptyset$ のときは, $X/\emptyset$ を, X に一点を付け加えた空間 (X と一点の位相和)

$$X/\emptyset = X \amalg *$$

と定める.

注意 1.4.5 集合として

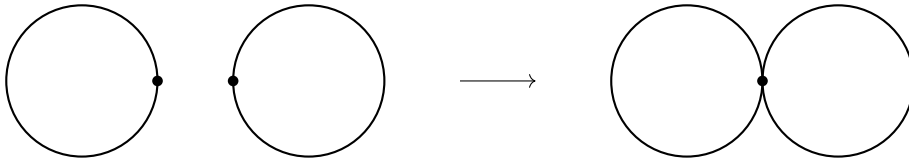
$$X/A \cong (X - A) \amalg \{[A]\} \cong (X - A) \amalg \{*\}$$

であり, この対応のもと, 射影 $\pi: X \rightarrow X/A$ を $X - A$ に制限したものは恒等写像で, $\pi(A) = *$ である.

$$\begin{array}{ccc} X & = & (X - A) \amalg A \\ \pi \downarrow & & \downarrow \text{id} \quad \downarrow \\ X/A & \cong & (X - A) \amalg \{*\} \end{array}$$

定義 1.4.6 X_1, X_2 を位相空間, $b_1 \in X_1, b_2 \in X_2$ とする. $\{b_1, b_2\} \subset X_1 \amalg X_2$ を一点につぶした空間を X_1 と X_2 の **ウェッジ和 (wedge sum)** とか **一点和**とよび $X_1 \vee X_2$ と書く (基点 b_1, b_2 のとり方によるので, b_1, b_2 を明示すべきであるが, 明示しないで書くのが普通):

$$X_1 \vee X_2 = (X_1 \amalg X_2) / \{b_1, b_2\}$$



$k = 1, 2$ に対し, 包含と商写像の合成を j_k とする:

$$j_k := \pi i_k: X_k \xrightarrow{i_k} X_1 \amalg X_2 \xrightarrow{\pi} X_1 \vee X_2$$

j_k は連続な単射であるが, 以下に示すように部分空間 $j_k(X_k) \subset X_1 \vee X_2$ への同相写像である.

写像 $q_1: X_1 \amalg X_2 \rightarrow X_1$ を,

$$q_1(x) = \begin{cases} x, & x \in X_1 \\ b_1, & x \in X_2 \end{cases}$$

すなわち $q_1|_{X_1} = \text{id}$, $q_1|_{X_2} = b_1$ と定めると連続で, $q_1(b_1) = b_1 = q_1(b_2)$ であるから, 商空間 $X_1 \vee X_2$ からの連続写像 $\bar{q}_1: X_1 \vee X_2 \rightarrow X_1$ を誘導する. $r_1 = \bar{q}_1|_{j_1(X_1)}: j_1(X_1) \rightarrow X_1 \vee X_2 \rightarrow X_1$ とおく. r_1 は (連続写像の部分空間への制限だから) 連続である.

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & \xrightarrow{i_1} & X_1 \amalg X_2 & \xrightarrow{q_1} & X_1 \\ j_1 \downarrow & & \downarrow \pi & \nearrow \bar{q}_1 & \\ j_1(X_1) & \xrightarrow{\quad} & X_1 \vee X_2 & & \\ & \searrow r_1 & & & \end{array}$$

$$r_1 j_1(x) = \bar{q}_1 \pi i_1(x) = q_1 i_1(x) = x$$

$$j_1 r_1(j_1(x)) = j_1(r_1 j_1(x)) = j_1(x)$$

であるから, $r_1 j_1 = 1_X$, $j_1 r_1 = 1_{j_1(X)}$ である. よって, $j_1: X_1 \rightarrow j_1(X_1)$ は同相写像である.

$X_1 \vee X_2$ の部分集合 O が開集合であるのは $k = 1, 2$ に対し $j_k^{-1}(O)$ が X_k の開集合であるときである. 実際

$$O \subset X_1 \vee X_2 \text{ が開集合} \Leftrightarrow \pi^{-1}(O) \subset X_1 \amalg X_2 \text{ が開集合}$$

$$\Leftrightarrow k = 1, 2 \text{ に対し } i_k^{-1}(\pi^{-1}(O)) \subset X_k \text{ が開集合}$$

$$\Leftrightarrow k = 1, 2 \text{ に対し } j_k^{-1}(O) \subset X_k \text{ が開集合}$$

j_k により X_k と $j_k(X_k)$ を同一視して, X_1, X_2 を $X_1 \vee X_2$ の部分空間とみなすと, $O \subset X_1 \vee X_2$ が開集合であるのは, $O \cap X_1$ が X_1 の, $O \cap X_2$ が X_2 の開集合であるときである.

補題 1.4.7 写像 $i: X_1 \vee X_2 \rightarrow (X_1 \times \{b_2\}) \cup (\{b_1\} \times X_2) \subset X_1 \times X_2$ を

$$i(z) = \begin{cases} (z, b_2), & z \in X_1 \setminus \{b_0\} \\ (b_1, z), & z \in X_2 \setminus \{b_0\} \\ (b_1, b_2), & z = b_0 \end{cases}$$

(ただし, 点 $[b_1, b_2] \in X_1 \vee X_2$ を b_0 と書いた) により定めると i は同相写像である:

$$X_1 \vee X_2 \cong (X_1 \times \{b_2\}) \cup (\{b_1\} \times X_2)$$

証明 i はあきらかに全単射. また $p_1 i j_1 = 1_{X_1}$, $p_1 i j_2 = b_1$, $p_2 i j_1 = b_2$, $p_2 i j_2 = 1_{X_2}$ であるから, i は連続.

$$\begin{array}{ccccc} X_1 & & & & X_1 \\ \downarrow i_1 & & & & \uparrow p_1 \\ X_1 \amalg X_2 & \xrightarrow{\pi} & X_1 \vee X_2 & \xrightarrow{i} & (X_1 \times \{b_2\}) \cup (\{b_1\} \times X_2) \hookrightarrow X_1 \times X_2 \\ \uparrow i_2 & & & & \downarrow p_2 \\ X_2 & & & & X_2 \end{array}$$

O を $X_1 \vee X_2$ の開集合とし, $U = O \cap X_1$, $V = O \cap X_2$ とおくと, $U \subset X_1$ は X_1 の開集合, $V \subset X_2$ は X_2 の開集合で,

$$i(O) = i(U \cup V) = (U \times \{b_2\}) \cup (\{b_1\} \times V) \subset (X_1 \times \{b_2\}) \cup (\{b_1\} \times X_2)$$

である.

$b_0 = [b_1, b_2] \in U \cup V$ のとき. このとき $b_1 \in U$, $b_2 \in V$ であるから

$$((X_1 \times \{b_2\}) \cup (\{b_1\} \times X_2)) \cap (U \times V) = (U \times \{b_2\}) \cup (\{b_1\} \times V) = i(O)$$

となり, $i(O)$ は開集合.

$b_0 = [b_1, b_2] \notin U \cup V$ のとき. このとき $b_1 \notin U$, $b_2 \notin V$ であるから

$$((X_1 \times \{b_2\}) \cup (\{b_1\} \times X_2)) \cap ((U \times X_2) \cup (X_1 \times V)) = (U \times \{b_2\}) \cup (\{b_1\} \times V) = i(O)$$

となり, $i(O)$ は開集合.

したがって i は開写像. よって同相写像. □

注意 1.4.8 補題 1.4.7 は無限個のウェッジ和に対しては一般には成り立たない.

1.5 基本的な空間

1.5.1 $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対し, その大きさ (ユークリッドノルム) を

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

で定める. どこかで学んだことがあると思うが, 次が成り立つ.

1. (a) $\|x\| \geq 0$.
(b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. 任意の $a \in \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\|ax\| = |a|\|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

この講義では $\|x\|$ を $|x|$ と書くことがあるかもしれない.

$\mathbb{R}^n$ の 2 点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し x と y のユークリッド距離 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

で定めるとこれは $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.

このノートでは, 特に断らなければ $\mathbb{R}^n$ にはこの距離をいれ, 常にこの距離の定める位相を入れる.

命題 1.5.1 $d_\infty(x, y), d_1(x, y)$ を

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$
$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

で定めるとこれらは $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数であり, これらの定める位相はユークリッド距離の定める位相と等しい. $\square$

命題 1.5.2 $\mathbb{R}^n$ のユークリッド位相は, $\mathbb{R}$ の n 個の直積空間としての位相と等しい.

証明 距離 d_∞ を使うと (少し) 楽.

集合としては

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$$

である. $\mathcal{O}_E$ をユークリッド位相, $\mathcal{O}_P$ を直積位相とする.

开区間 $(a, b) \subset \mathbb{R}$ に対し

$$p_i^{-1}(a, b) = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times (a, b) \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \in \mathcal{O}_E$$

である. 実際, $x = (x_1, \dots, x_n) \in p_i^{-1}(a, b)$ に対し $\varepsilon = \min\{b - x_i, x_i - a\}$ とおくと $\varepsilon > 0$ で $U_\varepsilon(x) \subset p_i^{-1}(a, b)$ ゆえ $p_i^{-1}(a, b) \in \mathcal{O}_E$.

开区間全体は $\mathbb{R}$ の開基であるから, $p_i: (\mathbb{R}^n, \mathcal{O}_E) \rightarrow \mathbb{R}$ は連続. $\mathcal{O}_P$ は p_i が全て連続となるような最弱の位相であったから $\mathcal{O}_P \subset \mathcal{O}_E$.

距離 d_∞ に関する開球は开区間の直積であるから, $\mathcal{O}_P$ の元である. 開球全体は $\mathcal{O}_E$ の開基で, 開基が $\mathcal{O}_P$ に含まれるので $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{O}_P$ である.

よって $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_P$. $\square$

系 1.5.3 X を位相空間, $B \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間, $f: X \rightarrow B$ を写像とする. このとき, f が連続であることと, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対し, $p_i \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が連続であることは同値. ただし, $p_i: B \rightarrow \mathbb{R}$ は, 包含と第 i 成分への射影 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の合成.

証明 命題 1.5.2, 1.3.4 および補題 1.1.10. $\square$

命題 1.5.4 足し算, 掛け算, 逆数

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$$

は連続. $\square$

系 1.5.5 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は連続.

証明 行列を使って書けば, 各成分は足し算と掛け算で書ける.

で証明終わりでよいのだけれど, 最初なので少し (かなり) 丁寧にやってみる.

f は実定数 $a_{11}, \dots, a_{mn}$ を使って次のように表される (スペースの都合で $\mathbb{R}^m$ の元を縦ベクトルで書いた).

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

よって, 系 1.5.3 より, $a_1, \dots, a_n$ を定数とするとき

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \in \mathbb{R}$$

が連続であることを示せばよい.

この写像は各成分を定数倍する $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1x_1, \dots, a_nx_n) \in \mathbb{R}^n$$

と足し算

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1 + \cdots + x_n \in \mathbb{R}$$

の合成である.

各成分を定数倍する $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^n$ への写像

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1x_1, \dots, a_nx_n) \in \mathbb{R}^n$$

を考える. i 番目の成分は次の合成である. ただし μ は掛け算.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\xrightarrow{p_i} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\mu} \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (a_i, x) \end{aligned}$$

p_i と μ は連続である. 真ん中の写像の第一成分は定数関数だから連続, 第二成分は恒等写像 ($g(x) = x$ という関数) だから連続, ゆえに真ん中の写像も連続. よって i 番目の成分は連続. したがって各成分を定数倍する写像は連続.

最初の二つの成分を足す写像を α_2

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\alpha_2} \mathbb{R}^{n-1}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n)$$

とする. 第一成分は次の合成である.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{p_{1,2}} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{+} \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, x_2)$$

$p_{1,2}$ は成分が p_1, p_2 だから連続. よって第一成分は連続. 他の成分は射影だから連続. よって α_2 は連続. 足し算

$$\mathbb{R}^n \ni (x_1, \dots, x_n) \rightarrow x_1 + \dots + x_n \in \mathbb{R}$$

は次の合成だから連続.

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\alpha_2} \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{\alpha_2} \dots \xrightarrow{\alpha_2} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \mathbb{R}$$

したがって線形写像は連続.

もちろん直接 ε - δ 等で示してもよいが, 慣れれば上記のように簡単な写像の合成に分解することはすぐできるようになるし, 実際に分解しなくても, 分解できるというの分かるようになる (ε に対して δ をどのくらいの大きさにとればよいかを知りたいという場合もあり, そのときは ε - δ を使ってやった方が楽). $\square$

定理 1.5.6 (Heine-Borel) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は有界閉集合であること. $\square$

1.5.2 D^n, S^{n-1}

定義 1.5.7 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分空間

$$\begin{aligned} D^n &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \\ &= \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S^{n-1} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \\ &= \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

をそれぞれ n 次元円盤 (n -dimensional disc), $n-1$ 次元球面 ($n-1$ -dimensional sphere) という.

補題 1.5.8 $D^n/S^{n-1} \cong S^n$

証明 写像 $q: D^n \rightarrow S^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ を $q(x) = (2\|x\|^2 - 1, \sqrt{1 - \|x\|^2}x)$ で定める. 明らかに q は連続で, $q(x) \in S^n$ であることが分かる.

さらに, $x \in S^{n-1}$, すなわち $\|x\| = 1$ ならば, $q(x) = e := (1, 0, \dots, 0)$ である.

また $(h, y) \in S^{n-1} - e$ とすると, $h < 1$ だから $1 - h > 0$ で

$$\begin{aligned} h^2 + \|y\|^2 &= 1 \\ \left\| \frac{y}{\sqrt{2(1-h)}} \right\|^2 &= \frac{\|y\|^2}{2(1-h)} = \frac{1-h^2}{2(1-h)} = \frac{1+h}{2} < 1 \end{aligned}$$

ゆえ

$$\frac{y}{\sqrt{2(1-h)}} \in D^n - S^{n-1}$$

で

$$q\left(\frac{y}{\sqrt{2(1-h)}}\right) = \left(h, \sqrt{1 - \frac{1+h}{2}} \frac{y}{\sqrt{2(1-h)}}\right) = (h, y)$$

であるから, q は全射である.

$q(x) = q(y)$ とすると,

$$\begin{aligned} 2\|x\|^2 - 1 &= 2\|y\|^2 - 1 \\ \sqrt{1 - \|x\|^2}x &= \sqrt{1 - \|y\|^2}y \end{aligned}$$

である. これより $q(x) = q(y) \Leftrightarrow x = y$ または $x, y \in S^{n-1}$ であることが分かる.

よって, q は連続な全単射

$$\bar{q}: D^n/S^{n-1} \rightarrow S^n$$

を定める. D^n/S^{n-1} はコンパクト, S^n は Hausdorff なので, $\bar{q}$ は同相. □

1.5.3 $\mathbb{C}, \mathbb{C}^n$

複素数体の定義の仕方は色々あるが、このノートでは以下の定義を採用する.

定義 1.5.9 $\mathbb{R}^2$ における和, 積を次のように定めると体となる.

$(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)(c, d) = (ac - db, da + bc).$$

この体を複素数体といって $\mathbb{C}$ で表す¹⁾. $\mathbb{C}$ の元を複素数という.

すぐわかるように和に関する単位元は $(0, 0)$, 積に関する単位元は $(1, 0)$ である.
さて

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$$

$$(a, 0)(c, 0) = (ac, 0)$$

であるから $a \in \mathbb{R}$ と $(a, 0) \in \mathbb{C}$ を同一視して $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ とみなす. もう少し形式的にいうと

命題 1.5.10 $f(a) = (a, 0)$ で定まる写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ は体の (単射) 準同型であり, $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}$ の 2 次拡大体である.

$(0, 1) \in \mathbb{C}$ を記号 i で表す.

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

である.

任意の $(a, b) \in \mathbb{C}$ は

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) \\ &= a + bi\end{aligned}$$

と表すことが出来る. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ であるとき, あきらかに

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c, b = d$$

である. すなわち, 任意の複素数 z は,

$$z = a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

と一意的に表すことが出来る.

$\mathbb{C}$ は可換体なので”普通に”計算をすることが出来る. 例えば

$$\begin{aligned}(a + bi)(c + di) &= ac + bic + adi + bidi \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + (ad + bc)i\end{aligned}$$

といった具合である.

定義 1.5.11 $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ に対し, $(a, -b) \in \mathbb{C}$ を z の **共役 (conjugate)** といって $\bar{z}$ で表す. $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) と表したとき, $\bar{z} = a - bi$ である.

$z = a + bi \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対し

$$\begin{aligned}z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - (bi)^2 \\ &= a^2 - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \geq 0\end{aligned}$$

である.

定義 1.5.12 $\|z\| = \sqrt{z\bar{z}} \in \mathbb{R}$ を z の絶対値という.

定義より, $\|z\|$ は $\mathbb{R}^2$ におけるユークリッドノルムと同じものである. 特に, $z, w \in \mathbb{C}$ に対し,

$$d(z, w) = \|z - w\|$$

と定めると, これは $\mathbb{C}$ 上の距離関数である. もちろん, (我々の複素数体の定義では) 距離空間としては $\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ そのものである. より一般に $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ に

対し, その大きさを

$$\|z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \|z_i\|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i \bar{z}_i}$$

で定め, $\mathbb{C}^n$ の 2 点 $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$ に対し z と w の距離 $d(z, w)$ を

$$d(z, w) = \|z - w\|$$

で定めるとこれは $\mathbb{C}^n$ 上の距離関数であり,

$$\mathbb{C}^n = (\mathbb{R}^2)^n \cong \mathbb{R}^{2n}$$

と自然に同一視したときのユークリッド距離と同じものである. このノートでは, 特に断らなければ $\mathbb{C}^n$ にはこの距離をいれ, 常にこの距離の定める位相を入れる.

奇数次元の球面 $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ は, $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ と同一視すると

$$S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z\| = 1\} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid \sum z_i \bar{z}_i = 1 \right\}$$

とみなせる. 特に

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$$

である. $\|zw\| = \|z\|\|w\|$ であること, $\|z\| = 1$ ならば $z\bar{z} = 1$ であることに注意すると, S^1 は複素数の積により (可換) 群となることが分かる.

- 1) この定義は Hamilton (William Rowan Hamilton, ウィリアム・ローワン・ハミルトン, 1805-1865) による. 他にも $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 1)$ として, あるいは行列環の適当な部分環として定めることもある.

1.5.4 $\mathbb{H}, \mathbb{H}^n$

定義 1.5.13 $\mathbb{C}^2$ における和, 積を次のように定めると (非可換) 体となる.

$(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}^2$ に対し

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b)(c, d) &= (ac - \bar{d}b, da + b\bar{c}). \end{aligned}$$

この体を **四元数体** といって $\mathbb{H}$ で表す. $\mathbb{H}$ の元を **四元数 (quaternion)** という²⁾.

(我々の定義では) 実ベクトル空間としては $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ であるから, $\mathbb{H}$ と $\mathbb{R}^4$ は実ベクトル空間として自然に同一視出来る:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{C}^2 & \xlongequal{\quad} & (\mathbb{R}^2)^2 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^4 \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & (a+bi, c+di) & = & ((a,b), (c,d)) & \longmapsto & (a,b,c,d) \end{array}$$

$\mathbb{H} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ の元 $1, i, j, k$ を

$$1 = (1, 0) = (1, 0, 0, 0)$$

$$i = (i, 0) = (0, 1, 0, 0)$$

$$j = (0, 1) = (0, 0, 1, 0)$$

$$k = (0, i) = (0, 0, 0, 1)$$

で定める. $\mathbb{H}$ の積は, $\mathbb{R}^4$ に

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k = -ji$$

$$jk = i = -kj$$

$$ki = j = -ik$$

で定めた積³⁾ と一致する.

定義 1.5.14 $q = (a, b) \in \mathbb{H} = \mathbb{C}^2$ に対し, $(\bar{a}, -b)$ を q の **共役 (conjugate)** といって $\bar{q}$ で表す. $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) と表したとき $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ である.

$$q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \text{ に対し}$$

$$q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$$

であることが分かる (積が可換ではないので計算には注意が必要) .

定義 1.5.15 $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} \in \mathbb{R}$ を q の絶対値という.

$\mathbb{C}$ の場合と同様に, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}^n$ にこの絶対値を用いて距離を定めることが出来る. 距離空間として

$$\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{H}^n \cong (\mathbb{R}^4)^n \cong \mathbb{R}^{4n}$$

である. $4n - 1$ 次元球面 $S^{4n-1} \subset \mathbb{R}^{4n}$ は $\mathbb{R}^{4n} = \mathbb{H}^n$ と同一視すると

$$S^{4n-1} = \{q \in \mathbb{H}^n \mid \|q\| = 1\}$$

とみなせる. 特に

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\}$$

である. $\|qq'\| = \|q\|\|q'\|$ であること (が示せる), $\|q\| = 1$ ならば $q\bar{q} = 1$ であることに注意すると, S^3 は四元数の積により (非可換) 群となることが分かる.

- 2) この作り方は, $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ を作った方法と同じである. この構成法を Cayley-Dickson 構成という.
- 3) $e_1, \dots, e_n$ が実ベクトル空間 V の基底であるとき, n^2 個の元 $e_i \cdot e_j \in V$ を定めると

$$\left(\sum a_i e_i\right) \cdot \left(\sum b_i e_i\right) = \sum_{i,j} (a_i b_j)(e_i \cdot e_j)$$

により, V に, 分配法則をみたす積を定めることが出来る. 一般には, この積は単位元をもつとも結合的であるとも限らない.

第2章 基本群

2.1 ホモトピー

定義 2.1.1 閉区間 $[0, 1]$ を I で表す.

X, Y を位相空間とする.

1. $f, g: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. 連続写像

$$F: X \times I \rightarrow Y$$

で, 任意の $x \in X$ に対し

$$F(x, 0) = f(x)$$

$$F(x, 1) = g(x)$$

をみたすものが存在するとき, f と g は **ホモトピック** (homotopic) であるといい, $f \simeq g$ と書く. また, F を f から g への **ホモトピー** (homotopy) という.

$t \in I$ に対し写像 $f_t: X \rightarrow Y$ を $f_t(x) = F(x, t)$ と定めると, ($X \ni x \mapsto (x, t) \in X \times I$ が連続だから) f_t は連続である. 連続写像の族 $\{f_t\}_{t \in I}$ を $f = f_0$ から $g = f_1$ へのホモトピーと呼ぶこともある.

2. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は, 連続写像 $g: Y \rightarrow X$ で,

$$g \circ f \simeq \text{id}_X$$

$$f \circ g \simeq \text{id}_Y$$

をみたすものが存在するとき, **ホモトピー同値写像** (homotopy equivalence) という.

また, このとき g を f の **ホモトピー逆写像** (homotopy inverse) とよぶ.

3. X から Y へのホモトピー同値写像が存在するとき, X と Y は **ホモトピー同値 (homotopy equivalent)** であるという.

命題 2.1.2 X から Y への連続写像全体のなす集合を $F(X, Y)$ と書く.

ホモトピックであるという関係「 $\simeq$ 」は $F(X, Y)$ 上の同値関係である.

- 証明** 1. $f: X \rightarrow Y \in F(X, Y)$ に対し, $F: X \times I \rightarrow Y$ を $F(x, t) = f(x)$ で定めると $F = fp_1: X \times I \xrightarrow{p_1} X \xrightarrow{f} Y$ であるから連続で $F(x, 0) = F(x, 1) = f(x)$ だから $f \simeq f$.
2. $f \simeq g$ とし, $F: X \times I \rightarrow Y$ を f から g へのホモトピーとする. $F^{-1}: X \times I \rightarrow Y$ を $F^{-1}(x, t) = F(x, 1 - t)$ で定める. $\iota: I \rightarrow I$, $\iota(t) = 1 - t$ は連続で, $F^{-1} = F \circ (\text{id}_X \times \iota)$ だから F^{-1} は連続で $F^{-1}(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$, $F^{-1}(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$ だから F^{-1} は g から f へのホモトピー. よって $g \simeq f$.
3. $f \simeq g$, $g \simeq h$ とし, F を f から g への, G を g から h へのホモトピーとする. $H: X \times I \rightarrow Y$ を

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

で定める.

$$F\left(x, 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = F(x, 1) = g(x) = G(x, 0) = G\left(x, 2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right)$$

であるから H は well-defined である. $X \times I = X \times [0, 1/2] \cup X \times [1/2, 1]$ で, $X \times [0, 1/2] = p_2^{-1}([0, 1/2])$, $X \times [1/2, 1] = p_2^{-1}([1/2, 1])$ は閉集合である. H を $X \times [0, 1/2]$, $X \times [1/2, 1]$ に制限したもの

$$\begin{array}{ccc} X \times [0, 1/2] & \xrightarrow{F} & Y \\ (x, t) & \longmapsto & (x, 2t) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \times [1/2, 1] & \xrightarrow{G} & Y \\ (x, t) & \longmapsto & (x, 2t - 1) \end{array}$$

は連続である. よって補題 1.1.9 より H は連続で, $H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$ なので $f \simeq h$.

□

定義 2.1.3 $F(X, Y)$ の, ホモトピックという同値関係による商集合

$$[X, Y] = F(X, Y) / \simeq$$

を X から Y への **ホモトピー集合 (homotopy set)** という.

$f: X \rightarrow Y$ のホモトピー類を $[f]$ と書くが, しばしば $[]$ を略して f と書く.

問題 二つの位相空間 X, Y が与えられたとき

1. X と Y はホモトピー同値か?
2. $[X, Y]$ はどんな集合か?

が知りたい!

例 2.1.4 $\mathbb{R}^n$ は一点とホモトピー同値である.

見やすさのため, 一点 $*$ からなる集合 (空間) $\{*\}$ を $*$ と書く. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow *$ を $f(x) = *$, $g: * \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $g(*) = 0 := (0, \dots, 0)$ で定める. 明らかに $f \circ g = \text{id}$. よって $f \circ g \simeq \text{id}$. 一方, $H: \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$H(x, t) = tx$$

で定めると, H は連続で,

$$H(x, 0) = 0x = 0 = g \circ f(x)$$

$$H(x, 1) = 1x = x = \text{id}_{\mathbb{R}^n}(x)$$

だから, $g \circ f \simeq \text{id}$.

一般に, 一点とホモトピー同値である空間を **可縮 (contractible)** であるという.

2.2 道とホモトピー

定義 2.2.1 X を位相空間とする.

1. 連続写像 $f: I \rightarrow X$ を X の **道 (path)** という (I は閉区間 $[0, 1]$) .
2. $x_0, x_1 \in X$ とする. 道 $f: I \rightarrow X$ で, $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$ をみたすものを x_0 と x_1 を結ぶ道とか, x_0 から x_1 への道といい, x_0 をこの道の始点, x_1 を終点という.

x_0 と x_1 を結ぶ道全体のなす集合を $P(x_0, x_1)$ と書く. X を明示するときは $P_X(x_0, x_1)$ と書くことにする?

3. f_0, f_1 を x_0 と x_1 を結ぶ道とする. 連続写像

$$F: I \times I \rightarrow X$$

で, 任意の $s \in I$ と任意の $t \in I$ に対し

$$F(s, 0) = f_0(s)$$

$$F(s, 1) = f_1(s)$$

$$F(0, t) = x_0$$

$$F(1, t) = x_1$$

をみたすものが存在するとき, f_0 と f_1 は **ホモトピック**であるといい, $f_0 \simeq f_1$ と書く. また F を f_0 から f_1 への **ホモトピー**という.

$t \in I$ に対し写像 $f_t: I \rightarrow Y$ を $f_t(s) = F(s, t)$ と定めると, f_t は連続で, $f_t(0) = x_0, f_t(1) = x_1$ となり, f_t は x_0 と x_1 を結ぶ道である. 道の族 $\{f_t\}_{t \in I}$ を f_0 から f_1 へのホモトピーと呼ぶこともある.

例 2.2.2 $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ とする. x_0 と x_1 を結ぶ任意の道はホモトピックである.

f_0, f_1 を x_0 と x_1 を結び道とする. $F: I \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $F(s, t) = (1-t)f_0(s) + tf_1(s)$

$$\begin{aligned} I \times I &\longrightarrow I \times \mathbb{R}^n \times I \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cdot \times \cdot} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{+} \mathbb{R}^n \\ (s, t) &\longmapsto (1-t, f_0(s), t, f_1(s)) \end{aligned}$$

と定めると連続で,

$$F(s, 0) = f_0(s)$$

$$F(s, 1) = f_1(s)$$

$$F(0, t) = (1-t)f_0(0) + tf_1(0) = (1-t)x_0 + tx_0 = x_0$$

$$F(1, t) = (1-t)f_0(1) + tf_1(1) = (1-t)x_1 + tx_1 = x_1$$

であるから, F は f_0 から f_1 へのホモトピーである. このようなホモトピーを線形ホモトピー (Linear homotopy) と呼ぶことがある.

命題 2.2.3 ホモトピックという関係は $P(x_0, x_1)$ 上の同値関係である. $P(x_0, x_1)$ のホモトピックという関係による商集合を

$$\Pi_1(x_0, x_1) := P(x_0, x_1)/\simeq$$

と書く. X を明示するときは $\Pi_1 X(x_0, x_1)$ と書く.

証明 証明は命題 2.1.2 とほぼ同じである. 端点の条件のみチェックすればよい. □

問 2.1 証明せよ.

定義 2.2.4 X を位相空間, $x, y, z \in X$ とする. x と y を結ぶ道 f と, y と z を結び道 g に対し, x と z を結ぶ道 $f \cdot g$ を

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), & 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s - 1), & 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

により定める. $f(2 \cdot 1/2) = f(1) = y = g(0) = g(2 \cdot 1/2 - 1)$ だから, $f \cdot g$ は well defined で, 連続である.

補題 2.2.5 $f_0 \simeq f_1, g_0 \simeq g_1$ ならば $f_0 \cdot g_0 \simeq f_1 \cdot g_1$.

第 3 章 被覆空間と基本群

参考文献

- [1] Shuichi Tsukuda. 幾何学序論講義ノート. <http://math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/>.