

振り子時計の数学

佃 修一

2008年10月9日

最近ガリレオ・ガリレイ (1564–1642) の名を冠したテレビドラマが放映されましたが、みなさんはガリレオと聞くと、ドラマ以外に何を思い出すでしょうか。

ガリレイ (以下このノートでは、参考にした文献 [1] にあわせて、姓であるガリレイを使うことにします) は木星の衛星や落体の法則を発見した「天文学の父」、
「近代科学の父」等と称される科学者ですが、その有名な業績のひとつに振り子の等時性の発見があります。

みなさんは物理の授業で振り子の周期はおもりの重さや振幅にはよらず一定であるということ学んだかと思えます。もう少し正確にいうと、おもりの重さ m 、ひもの長さ l である振り子の周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

で与えられるのでした。ただし g は重力加速度です。

振り子の周期が振り子の長さだけで決まり、振幅にはよらないということを発見したのはガリレイが二十歳くらいのころだそうです。彼は天井のシャンデリアがゆれる様子を観察していてこのことに気付いたそうです。そのころは精度のよい時計はまだありませんでしたから、脈拍を計ったり歌を唄ったりして周期を計測したようです。彼はその後多くの実験を行い (このときは水時計などを用いて計測したようです)、振り子の周期は振幅にはよらず振り子の長さの平方根に比例すると結論しました。ガリレイは晩年に、この振り子の性質を時計に利用することを考えましたが、実際に振り子時計を完成させたのは次の世代の科学者クリスチャン・ホイヘンス (1629–1695) でした。

実は式①は振幅が小さいときに近似的に成り立つもので厳密に成り立っている式ではなく、また振幅が大きくなると近似的にも成立しません。ガリレイは多くの実験を行ったので、振幅が大きいと振り子の周期が変わるということにおそらく気付いていたと思われそうですが、実験上の技術的な問題だと考えたのかあるいは美しくないと考えたのか、このことについては明言していません。振り子の周期が実は一定ではないということを明確に指摘したのはホイヘンスでした。

ホイヘンスは様々な科学上の発見 (土星の輪の発見、タイタンの発見等) を成し遂げた科学者ですが、彼の興味の中心は振り子時計の完成と改良にありました。(当時、航海における必要性から精度の高い時計の開発が大きな関心をあつめていました。) 振り子時計の研究の過程で彼が用いた様々なアイデアはその後の数学や物理学の発展に大きな影響を及ぼしました。

この講義では振り子時計に関連する数学について紹介したいと思います。

目次

1	プロローグ	5
2	微分・積分～速度・時間・距離～	6
2.1	微分～距離から速度～	6
2.2	積分～速度から距離～	7
2.3	積分～速度から時間～	8
3	単振り子の周期	10
3.1	$1/\sqrt{1-x}$ の展開	10
3.2	一般化された二項定理	13
3.3	単振り子の周期	14
4	等時曲線	19
4.1	サイクロイド	19
4.2	ホイヘンスの方法	21
4.2.1	サイクロイドの接線	21
4.2.2	等時性	22
5	振り子の軌道を変える～伸開線・縮閉線・包絡線～	25
5.1	伸開線・縮閉線	25
5.2	直線族の包絡線	27
5.3	サイクロイドの縮閉線	29
5.4	補遺～法線族の包絡線が縮閉線であること～	32
6	エピローグ	36
A	数 III+ α の予習	37
A.1	微分	37
A.1.1	積・商の微分	37
A.1.2	合成関数の微分	37
A.1.3	パラメータ表示された関数の微分	37
A.1.4	三角関数の微分	37
A.1.5	例	38
A.2	積分	39
A.2.1	部分積分	39
A.2.2	置換積分	39
A.2.3	曲線の長さ	39

A.2.4 例	40
A.3	41
あとがき	43

1 プロローグ

自然界には周期的な現象はたくさん存在しています(太陽の動き, 月の満ち欠け, 季節の移り変わり…)が, その多くは天体の運動によるもので, 自由にコントロール出来るものではありません. そこに振り子が登場しました. ガリレイが振り子の等時性を発見したのは1580年代前半のことだといわれています. このときに人類ははじめて,*自らコントロール出来る周期運動を手にいれたのです

ガリレイは晩年(1640年頃)になって, 振り子の等時性を利用して時計を作ることを考えました. 振り子をゆらすと, 空気抵抗や摩擦によりゆれはだんだんと小さくなっていきます. しかし振り子の周期は振幅によらないので, 振り子のゆれる回数を数えれば, 時間を正確に計ることが出来るのです. ガリレイは実際に設計図も残していますが, 振り子時計を完成させることは出来ませんでした. 実はこのころにはガリレイは失明しており, この図面も, ガリレイが口述したものを息子や弟子が書き取ったものです.

このころにはヨーロッパでは機械式時計がある程度普及していましたが, 分を計れる程の精度がなかったため分針はまだ登場していませんでした. 最も性能のよい時計でも1日に30分程度の誤差があったようです. 日常生活においてはこれでもほとんど問題はなかったようですが, 航海においてはこの誤差は致命的でした. 実際, 文字どおり致命的で, 多くの海難事故が起きました.

航海においてなぜ正確な時計が必要なのでしょう. 実は, 陸地の見えない大洋上を何日も航海を続けているときに, 自分の位置を知るためには正確な時計が必要なのです.

自分のいる位置の緯度を決定するのは難しくありません. 北半球であれば, 夜, 北極星を見上げる角度を測れば大体それが求める緯度です. 昼間であれば, 太陽が南中するときの角度を測れば, それから緯度を求めることが出来ます.

問題は経度の決定です. 正確な時計があれば, 出発した場所と今いる場所での太陽の南中時刻を計ることで, 出発地点と現地点との経度の差が分かります. しかしながら, 1日30分の誤差の時計では全く役にたちません. このため, 正確な時計の開発は大きな関心を集め, 各国が多大な賞金をかけていたのです.

そしてホイヘンスが登場しました.

問題 1. 地球は半径6380kmの正確な球体であるとします.

- (i) 北極星は真北, 無限遠にあるとすると, 北半球では北極星を見上げる角度がその地点の緯度であることを示しなさい. また太陽が南中するときの角度から緯度を求めなさい.
- (ii) 上述の方法で経度を測定するとき, 時計の誤差が経度や自分の位置の決定にどの程度の影響を与えるか考察しなさい.

*文献等で確認したわけではないですが.

2 微分・積分～速度・時間・距離～

x 軸上を動いている点 P を考えます. 位置 x における速度が $v(x)$ で与えられるとき, 点 P が $x = X_0$ から $x = X_1$ まで移動するのにかかる時間は次の式で表されます.

$$\int_{X_0}^{X_1} \frac{1}{v(x)} dx \quad \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

後の節で振り子の周期を調べるためにこの式を用います. この節ではこの式について考えてみましょう.

2.1 微分～距離から速度～

時刻 t における位置が $x = x(t)$ で与えられる x 軸上の点 P を考えます. 点 P の時刻 t における速度 $v = v(t)$ はどのように表されるでしょう.

時刻 t から Δt だけ時間がたつと点 P は $x(t + \Delta t)$ に移動するので, この間の移動距離は $x(t + \Delta t) - x(t)$ となります. 「速さ=距離÷時間」なので, この間の平均速度は

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

で与えられます. ここで Δt をどんどん小さくしていくと, この平均速度は時刻 t における (瞬間の) 速度 $v(t)$ に近付くでしょう. したがって $v(t)$ は

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

で与えられます. この右辺は $x(t)$ の t における微分係数ですから結局

$$v(t) = x'(t)$$

となります.

さて, $x(t)$ を微分すると $v(t)$ になる, つまり $x(t)$ は $v(t)$ の原始関数ですから

$$x(T_1) - x(T_0) = \int_{T_0}^{T_1} v(t) dt \quad \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

となります. すなわち, 点 P が時刻 $t = T_0$ から $t = T_1$ の間に移動する距離 $x(T_1) - x(T_0)$ は速度 $v(t)$ を $t = T_0$ から $t = T_1$ まで積分することで得られることとなります.

この式③についてもう少し考えてみましょう.

2.2 積分～速度から距離～

今度は時刻 t における速度 $v(t)$ が与えられているとしましょう。このとき点 P が時刻 $t = T_0$ から $t = T_1$ の間に移動する距離を考えてみます。時刻 $t = T_0$ での点 P の位置を $x = X_0$, $t = T_1$ での位置を $x = X_1$ とします。また簡単のため $v(t) > 0$, $T_0 < T_1$ であるとします。

まず速度が時刻によらずに一定 $v(t) = v$ である場合を考えてみましょう。「距離＝速さ×時間」なので、このときは

$$X_1 - X_0 = v \cdot (T_1 - T_0)$$

となります。

次に $T_0 < t_1 < T_1$ として、 $T_0 < t \leq t_1$ の間は速度一定で $v(t) = v_1$, $t_1 < t \leq T_1$ の間は速度一定で $v(t) = v_2$ である場合を考えます。このときの移動距離は

$$X_1 - X_0 = v_1 \cdot (t_1 - T_0) + v_2 \cdot (T_1 - t_1)$$

となります。

同様に考えて時刻が $t_{i-1} < t \leq t_i$ の間は速度一定で $v(t) = v_i$ (ただし $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T_1$) である場合には移動距離は

$$\begin{aligned} X_1 - X_0 &= v_1 \cdot (t_1 - t_0) + v_2 \cdot (t_2 - t_1) + \dots + v_n \cdot (t_n - t_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

で与えられることとなります。

さて、 $v(t)$ が連続的に変化する場合には分割をものすごく細かくすれば時刻が $t_{i-1} < t \leq t_i$ の間はだいたい速度一定で $v(t)$ はだいたい $v(t_i)$ と同じだと考えられます。したがって和

$$\sum_{i=1}^n v(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

は、分割をどんどん細かくしていくと実際の移動距離 $X_1 - X_0$ に近付くと考えてよいでしょう。つまり

$$X_1 - X_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(t_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

となります。この式の右边を

$$\int_{T_0}^{T_1} v(t) dt$$

と書き, $v(t)$ の $t = T_0$ から $t = T_1$ までの定積分といいます.

みなさんは定積分というのは原始関数を用いて③によって定義するということを学んだかと思います. しかし本当は定積分は④の右辺[†]によって定義します. このようにして定義した定積分を③のように原始関数を用いて表せるというのは微分と積分の定義から示される定理 (微積分学の基本定理) なのです.

定理 2.1. $f(x)$ が連続ならば

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

系 2.2. $f(x)$ を連続関数とする. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

注意 2.3. 定理 2.1 は, 積分して微分するともとの関数になるということ[‡], 系 2.2 は, 微分して積分するともとの関数になるということをいっています. つまり微分と積分は互いに他の逆の操作であるということです. 基本的には, 微分は差をとって割る, 積分はかけてから和をとるということをやっているのです. 互いに逆の操作であるということは納得出来るのではないかと思います. ただ, 極限をとるという操作が入っているので, これらの定理は明らかという訳ではありません. 実際, 関数 $f(x)$ に (連続である[§]とあった) なんらかの仮定がなければこれらが成り立たない場合もあります.

問題 2. 定理 2.1 から系 2.2 を導きなさい.

2.3 積分～速度から時間～

最後に, 位置 x における速度 $v(x)$ が与えられている場合に, 点 P が $x = X_0$ から $x = X_1$ まで移動するのにかかる時間を求めてみましょう. 簡単のため $v(x) > 0$, $X_0 < X_1$ であるとします.

先程と同様に考えてみます.

まず速度が位置によらず一定 $v(x) = v$ である場合を考えます. 「時間=距離÷速さ」なので, このときかかる時間は

$$\frac{X_1 - X_0}{v} = \frac{1}{v} \cdot (X_1 - X_0)$$

[†]正確にはこれはリーマン積分とよばれるものです. また④ではちょっと不正確なのですが, まあ大体こんな感じです.

[‡]もう少しいうと, 積分したものは微分出来るということも主張している.

[§]連続関数を含むような, かなり一般的なある種の関数に対して積分を定義することが出来て, これらの定理が成り立ちます. ただ, このあたりを見通しよく扱うためにはルベーグ積分という, リーマン積分とは別の考え方で定義される積分が必要になります.

となります。

次に $X_0 < x_1 < X_1$ として、 $X_0 < x \leq x_1$ の間は速度一定で $v(x) = v_1$ 、 $x_1 < x \leq X_1$ の間は速度一定で $v(x) = v_2$ である場合を考えます。このときかかる時間は

$$\frac{x_1 - X_0}{v_1} + \frac{X_1 - x_1}{v_2} = \frac{1}{v_1} \cdot (x_1 - X_0) + \frac{1}{v_2} \cdot (X_1 - x_1)$$

となります。

同様に考えて $x_{i-1} < x \leq x_i$ の間は速度一定で $v(x) = v_i$ (ただし $X_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = X_1$) である場合にかかる時間は

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - x_0}{v_1} + \frac{x_2 - x_1}{v_2} + \dots + \frac{x_n - x_{n-1}}{v_n} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i - x_{i-1}}{v_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{v_i} \cdot (x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

で与えられることとなります。

$v(x)$ が連続的に変化する場合には前節と同じように和

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{v(x_i)} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

において分割を細かくしていったときの極限を考えて

$$\int_{X_0}^{X_1} \frac{1}{v(x)} dx$$

が求める時間を与えることとなります。

3 単振り子の周期

冒頭で述べた様に振り子の周期を与える公式①は厳密には正しくないのですが、では周期はどのように与えられるのでしょうか。

力学の立場からすると、運動方程式をたてそれをもとに考察をすすめるのが由緒正しい方法だと思いますが、ここでは式②を用いて周期を調べてみましょう。

3.1 $1/\sqrt{1-x}$ の展開

振り子の周期を求める前に、その計算で使う次の等式 (ただし $-1 < x < 1$)

$$1/\sqrt{1-x} \text{ の展開 } (-1 < x < 1) \text{ —————}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \dots\dots\dots \textcircled{5}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}x^2 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}x^3 + \dots$$

について説明しましょう。

まず記号「!!」(二重階乗とよばれます)は次のように定義します。

$$\begin{aligned} (2n)!! &= 2n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 \\ &= 2n \cdot 2(n-1) \cdot 2(n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 \\ &= 2^n n! \\ (2n-1)!! &= (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot (2n-5) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

ただし n は自然数です。また $0!! = (-1)!! = 1$ と定めます。

次に、右辺は無級数の和です。つまり最初の n 項の和を

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}x^2 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}x^3 + \dots + \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} x^{n-1} \end{aligned}$$

とおいて得られる数列 $\{s_n\}$ の極限です。

例 3.1. $x = \frac{1}{2}$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2}$$

なので

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

となります。最初のいくつかの項の和を計算してみると

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 1.25$$

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1.34375$$

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1.3671875$$

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ = 1.36961699695122$$

と、なかなか $\sqrt{2} = 1.414213562373\dots$ には近付きません。

一方、 $x = \frac{1}{100}$ とすると

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{100}}} = \sqrt{\frac{100}{99}} = \frac{10}{3\sqrt{11}} = 1.0050378152592\dots$$

ですが、この場合最初の3項の和で小数点以下6ケタまで正しい値が求まります。

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{100}\right) = 1.005$$

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{100}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 = 1.0050375$$

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{100}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^3 = 1.0050376875$$

ここではこの等式⑤の厳密な証明は出来ませんが、なんとなく証明らしきものを与えてみましょう。

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{\frac{1}{1-x}}$$

ですから、等式⑤を示すためには、右辺が0以上であることと、右辺を2乗すると $\frac{1}{1-x}$ になることを示せばよいことになります。

さて、みなさんがもうすぐ学ぶであろう（あるいはもう学んだかもしれませんが）無限等比級数の公式を考えます。

定理 3.2. $-1 < x < 1$ のとき次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\end{aligned}$$

この等式が成り立つことは, 等式

$$(1-x)(1+x+\dots+x^n) = 1-x^{n+1}$$

を変形して得られる式 (等比級数の和の公式ですね)

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1+x+\dots+x^n$$

において $n \rightarrow \infty$ とすることでわかります.

ですから, 等式⑤を示すためには次の二つ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \geq 0 \quad \dots\dots\dots \textcircled{6}$$

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \right\}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \dots\dots\dots \textcircled{7}$$

を示せばよいことになります.

まず⑥ですが,

$$\begin{aligned}s_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^k \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}x^2 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}x^3 + \dots + \frac{(4n-5)!!}{(4n-4)!!}x^{2n-2} + \frac{(4n-3)!!}{(4n-2)!!}x^{2n-1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}x\right) + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}x^2 \left(1 + \frac{5}{6}x\right) + \dots + \frac{(4n-5)!!}{(4n-4)!!}x^{2n-2} \left(1 + \frac{4n-3}{4n-2}x\right) \geq 0 \\ s_{2n+1} &= s_{2n} + \frac{(4n-1)!!}{(4n)!!}x^{2n} \geq 0\end{aligned}$$

となることからわかります.

次に⑦の左辺を展開すると

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \right\}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{(2(n-k))!!} \right\} x^n$$

となります. (無限級数の和というのはデリケートなので本当はこういう計算をする際には注意が必要なのですがここでは気にしないことにします.) したがって

$$\sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{(2(n-k))!!} = 1 \quad \dots\dots\dots \textcircled{8}$$

であることを示せばよいということになります. この式の左辺を変形すると

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{(2(n-k)-1)!!}{(2(n-k))!!} &= \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} \cdot \frac{(2n-2k-1)!!}{2^{n-k}(n-k)!} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \frac{(2k-1)!!}{k!} \cdot \frac{(2n-2k-1)!!}{(n-k)!} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (2k-1)!!(2n-2k-1)!! \\ &= \frac{1}{(2n)!!} \sum_{k=0}^n {}_n C_k (2k-1)!!(2n-2k-1)!! \end{aligned}$$

となるので結局

$$(2n)!! = \sum_{k=0}^n {}_n C_k (2k-1)!!(2n-2k-1)!! \quad \dots\dots\dots \textcircled{9}$$

を示せばよいことにはなりますが, これは帰納法で容易に示すことが出来て, 等式⑤が成り立つことがわかります.

問題 3. (i) 全ての非負整数 n に対して等式⑨が成り立つことを示しなさい.

(ii) 等式⑨あるいは⑧のうまい (帰納法ではない) 証明はあるでしょうか.

3.2 一般化された二項定理

前節で等式⑤が成り立つことを見たわけですが, そもそもこの等式はどこから出てきたものなのでしょう. 実はこの等式は後で述べる一般化された二項定理の特別な場合として得られます.

二項定理を思い出してみましょう. N を自然数とすると次が成り立ちます.

$$\begin{aligned} (1-x)^N &= \sum_{n=0}^N {}_N C_n (-x)^n \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-n+1)}{n!} (-1)^n x^n \end{aligned}$$

みなさんは数 III で「平均値の定理」という定理を学ぶと思いますが、それをもう少し一般化した「Taylor の定理」(平均値の定理を使って証明されます) というものを使うと、 $-1 < x < 1$ であれば、 N が自然数でない場合もこの式と同様な等式が成り立つことを示すことができます。

定理 3.3. α を実数とする. $-1 < x < 1$ ならば次が成り立つ.

$$(1-x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} (-1)^n x^n \quad \dots\dots\dots \textcircled{10}$$

問題 4. α が自然数の場合、式⑩の x^n の係数は $n > \alpha$ であれば 0 となることを示しなさい。

例 3.4. $\alpha = -1$ の場合.

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1) &= (-1) \cdot \{(-1)-1\} \cdots \{(-1)-n+1\} \\ &= (-1) \cdot (-2) \cdots (-n) \\ &= (-1)^n n! \end{aligned}$$

だから

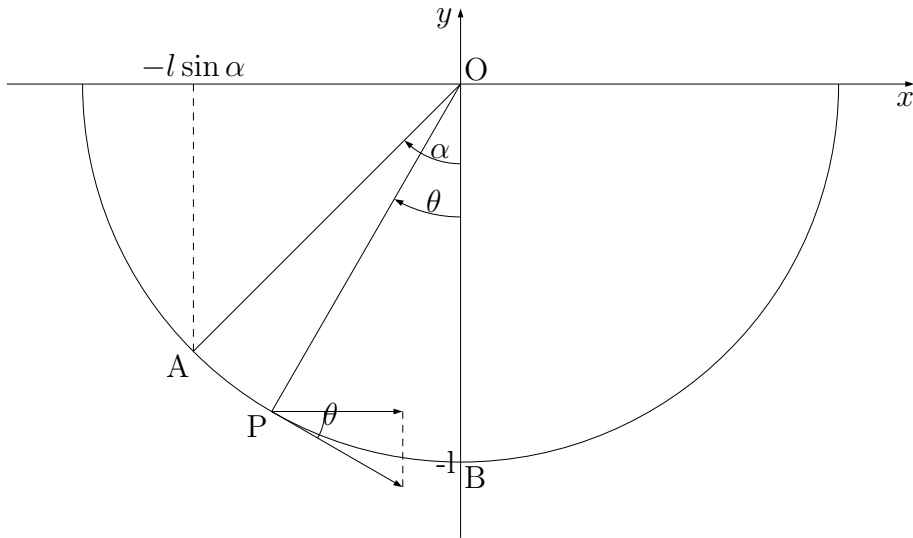
$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n!} (-1)^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \end{aligned}$$

となり定理 3.2 の式が得られます。

問題 5. 定理 3.3 の式⑩で $\alpha = -\frac{1}{2}$ とすると等式⑤が得られることを示しなさい。

3.3 単振り子の周期

以上の準備のもと単振り子の周期を求めてみましょう。おもりの重さ m , 長さ l の振り子を考えます。振り子の振動面内に、振り子の支点を原点とし、鉛直方向上向きが y 軸の正の方向となるように座標を導入し、振れ角 (鉛直下方向からの角度) を θ , 振れ幅が最大となるときの振れ角 (振幅) を α とします。ここでは振幅が $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ の場合を考えます。



おもりが点 $P(l \sin \theta, -l \cos \theta)$ にきたときの速さを v とします. 周期 T はおもりが A から B まで振れるのにかかる時間の 4 倍です. したがって速度の x 成分を v_x であらわすと②から周期は

$$T = 4 \int_{-l \sin \alpha}^0 \frac{1}{v_x} dx$$

により求められます. これを計算するため, まず θ での積分に書き換えます (置換積分, A.10 参照).

$$\begin{aligned} v_x &= v \cos \theta \\ x &= -l \sin \theta \\ \frac{dx}{d\theta} &= -l \cos \theta \end{aligned}$$

であり, x が $-l \sin \alpha$ から 0 まで変化するとき, θ は α から 0 まで変化するので

$$\begin{aligned} T &= 4 \int_{-l \sin \alpha}^0 \frac{1}{v_x} dx \\ &= 4 \int_{\alpha}^0 \frac{-l \cos \theta}{v \cos \theta} d\theta \\ &= 4l \int_0^{\alpha} \frac{1}{v} d\theta \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \textcircled{11}$$

となります.

速さ v を θ の関数として求めましょう. エネルギー保存則から次の式が成り立ちます.

$$-mgl \cos \theta + \frac{1}{2}mv^2 = -mgl \cos \alpha$$

ただしここで重力加速度を g としました. したがって速さ v は

$$v = \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \alpha)}$$

であらわされます.

よって⑪から

$$\begin{aligned} T &= 4l \int_0^\alpha \frac{1}{v} d\theta \\ &= 4l \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \alpha)}} d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} d\theta \dots\dots\dots \textcircled{12} \end{aligned}$$

となります. 実はこの最後に出てきた積分は初等関数(みなさんが知っているような関数)を使って表すことが出来ないことが知られています. 楕円の周の長さを求める際にも同じような積分が登場します. 振り子の周期や楕円の周長といった基本的な量の計算にあらわれるこのようなタイプの積分は楕円積分とよばれ, 古くから詳しく研究されています.

⑫を少し変形して置換積分を用います.

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \alpha &= \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2 \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left\{1 - \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

ここで $0 \leq \sin \frac{\theta}{2} \leq \sin \frac{\alpha}{2}$ であることに注意すると $0 \leq \sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\alpha}{2} \leq 1$ です. そこで

$$\sin \varphi = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

とおきます. 変数 θ での積分を φ での積分に書き換えましょう(置換積分). まず

$$\begin{aligned} \cos \theta - \cos \alpha &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left\{1 - \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right)^2\right\} \\ &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \sin^2 \varphi) \\ &= 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

となります.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\theta} \sin \varphi &= \frac{d\varphi}{d\theta} \frac{d}{d\varphi} \sin \varphi = \frac{d\varphi}{d\theta} \cos \varphi \\ &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \right) = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}\end{aligned}$$

なので

$$d\theta = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} \cos \varphi d\varphi$$

となりますが, θ の範囲から $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ なので

$$\cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}$$

ですから

$$d\theta = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

となります. また θ が 0 から α まで動くとき, φ は 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動きます. このとき $\cos \varphi \geq 0$ に注意すると⑫から

$$\begin{aligned}T &= 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{1}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi}} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}} d\varphi\end{aligned}$$

ここで $0 \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi < 1$ に注意して, 等式⑤を用いると

$$= 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} \sin^{2n} \varphi \right\} d\varphi$$

さらに、足し算と積分の順序を交換すると (無限級数の場合は一般には正しくないので注意する必要がありますが気にしないことにして)

$$\begin{aligned}
 &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi \\
 &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\}^2 \sin^{2n} \frac{\alpha}{2}
 \end{aligned}$$

となります。ただし最後の変形は例 A.12 を用いました。

以上から長さ l 、振幅 α の振り子の周期 T は

単振り子の周期

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right\}^2 \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} \\
 &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right\}
 \end{aligned}$$

で与えられることがわかりました。

α が小さいときは $\sin \frac{\alpha}{2}$ も 0 に近いので $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ となります。

例えば $\alpha = \frac{\pi}{6}$ のときは

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.067$$

となりますので α の影響はかなり小さくなります。

$\alpha = \frac{\pi}{3}$ の場合は

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$$

となるので

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

となり、必要な精度にもよりますが、無視出来ない程度の影響があらわれます。

注意 3.5. ここでは振幅が $\frac{\pi}{2}$ 以下の場合を考えましたが、振幅がさらに大きい場合も、このままではうまくいかない所がいくつかありますが、同様な考察が可能です。ただし、この場合は運動方程式をもとにした考察の方がよいでしょう。興味のある人は参考文献に挙げた力学の本などを見てみるとよいでしょう。

4 等時曲線

我々は前節で単振り子の等時性が成り立たないことを見ました。では、振り子を利用して精度の高い時計を作ることはあきらめるしかないのでしょうか。

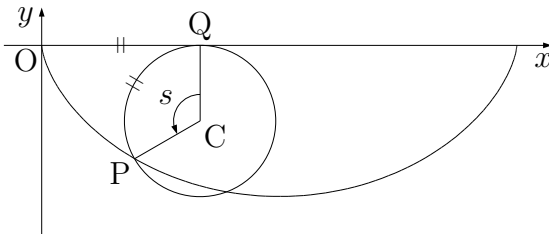
4.1 サイクロイド

ここで振り子から離れて、おもりがある曲線あるいは斜面にそって落下させることを考えます。その曲線のどこから出発しても、一番下まで到達するのにかかる時間が出発点によらず一定であるとする、この曲線を用いて時計を作ることが出来るかもしれません。このような性質を持つ曲線を等時曲線と呼びます。

振り子時計の研究の過程で、ホイヘンスはサイクロイドは等時曲線であるということを見つめました。このような曲線は、適当な運動方程式あるいは微分方程式を解くことで見つけることが出来ますが、ホイヘンスがこの研究をしていたころは微積分法が発明される直前のことであり、ホイヘンス自身は微積分を使わずにこれを示しています。ホイヘンスの研究は微積分の発明の契機のひとつでした。

以下でサイクロイドが等時曲線であることを見てみましょう。

直線上を円がすべることなくころがるとき円周上の一点の描く軌跡をサイクロイドといいます。この曲線を見つめ命名したのはガリレイでした。



サイクロイドは x 軸の上にある円がころがってできる曲線として描かれることが多いのですが、われわれがほしいのは x 軸の下にある曲線ですので x 軸の下に円がある状況を考えましょう。そこで、最初中心が $(0, -a)$ にある半径 a の円が x 軸にそってすべらずにころがるとき、原点にあった円周上の固定点 P が描く軌跡の式を求めてみましょう。

図で $OQ = \widehat{PQ} = as$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OC} + \vec{CP} \\ &= \begin{pmatrix} as \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos(s + \frac{\pi}{2}) \\ a \sin(s + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} as \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \sin s \\ a \cos s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} as - a \sin s \\ -a + a \cos s \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり,

サイクロイドの媒介変数表示

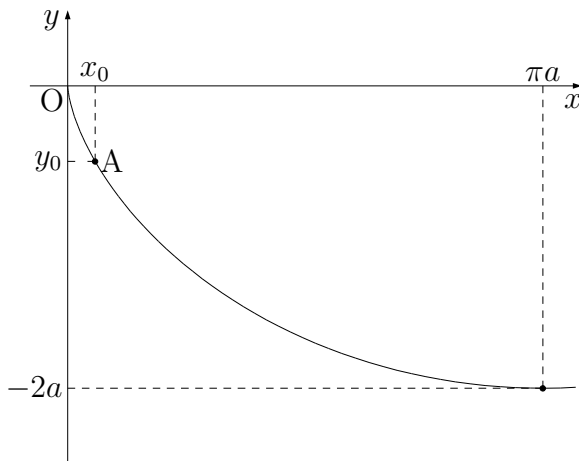
$$\begin{cases} x = as - a \sin s = a(s - \sin s) \\ y = -a + a \cos s = -a(1 - \cos s) \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

が得られました.

微分 y' を計算すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy/ds}{dx/ds} = \frac{-a \sin s}{a(1 - \cos s)} = \frac{-\sin s}{1 - \cos s} \\ &= \frac{-2 \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2}}{2 \sin^2 \frac{s}{2}} = -\frac{\cos \frac{s}{2}}{\sin \frac{s}{2}} = -\frac{1}{\tan \frac{s}{2}} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

となります.



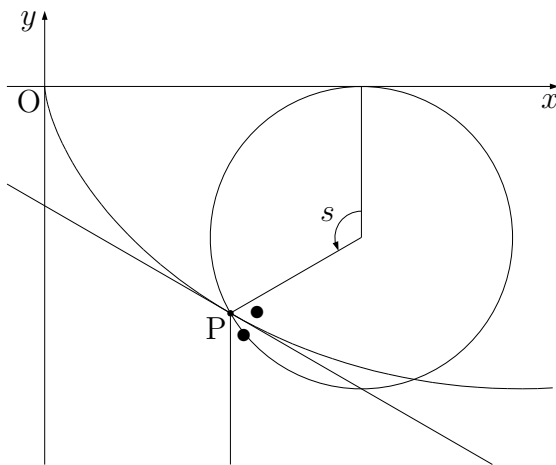
サイクロイド⑬上の点 $A = (x_0, y_0)$ ($0 \leq x_0 < \pi a$) から初速度 0 で物体を滑らせたときに最下点 $(\pi a, -2a)$ に到達するのに要する時間を求めてみます.

高さ $y (\leq y_0)$ の点での速さを v とするとエネルギー保存則から等式

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = mgy_0$$

が成り立ちますので $v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$ (15) となります. サイクロイド上の点

$$P = (a(s - \sin s), -a(1 - \cos s))$$



における接線の傾きは式⑭で表されるので, 接線方向の (x 成分が正である) 単位ベクトルは $(\sin(s/2), -\cos(s/2))$ となり, 点 P における速さを v とすると速度ベクトルは $(v \sin(s/2), -v \cos(s/2))$ となります.

速度の y 成分を用いて所要時間を計算してみましょう. y 成分は $-v \cos(s/2)$ であらわされたので所要時間は

$$\int_{y_0}^{-2a} \frac{1}{-v \cos \frac{s}{2}} dy \dots\dots\dots (16)$$

であたえられます。⑬から

$$\cos^2 \frac{s}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos s) = \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \frac{y}{a} \right) = 1 + \frac{y}{2a}$$

であり、考える範囲 $0 \leq x_0 \leq x \leq \pi a$ ではパラメータの範囲は $0 \leq s \leq \pi$ ですから $\cos(s/2) \geq 0$ なので $\cos(s/2) = \sqrt{(2a+y)/2a}$ 。よって⑮から速度の y 成分 v_y は

$$v_y = -v \cos \frac{s}{2} = -\sqrt{2g(y_0 - y)} \cdot \sqrt{\frac{2a+y}{2a}} = -\sqrt{\frac{g(y+2a)(y_0 - y)}{a}} \dots\dots\dots (17)$$

で与えられ、したがって

$$\begin{aligned} (16) &= - \int_{y_0}^{-2a} \sqrt{\frac{a}{g(y+2a)(y_0 - y)}} dy \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{-2a}^{y_0} \frac{1}{\sqrt{(y - (-2a))(y_0 - y)}} dy \\ &= \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \end{aligned}$$

となりサイクロイドの等時性が示せました。(最後の変形については付録 A.3 を参照。)

サイクロイドの等時性
サイクロイド⑬上の1点からサイクロイドに沿って落下する物体が最下点に到達するのに要する時間は出発点によらず一定で $\pi\sqrt{a/g}$ である。

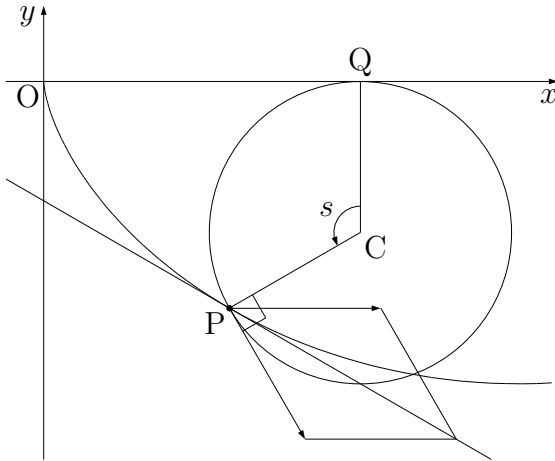
4.2 ホイヘンスの方法

我々は微積分の道具を用いてサイクロイドが等時曲線であることを見ました。慣れないと計算は大変ですが、方法としては式②を用いて所要時間を計算するというもので、特に新しいアイデアが必要なものではありませんでした。微積分の道具が(生まれかけてはいましたが、まだ)生まれていない時代にホイヘンスはどのようにしてこのことを示したのでしょうか。

4.2.1 サイクロイドの接線

サイクロイドに添った落下運動を調べるのですから、その速度を考える必要があります。そのためにはサイクロイドの接線を求めなくてはなりません。曲線の接線を求める問題は微分が生まれる直接の契機となった問題です。現代の観点からすると接線を求めるということと微分するということはほとんど同値なことです。

ホイヘンスは運動学的方法によりサイクロイドの接線を求めました. すなわち, サイクロイド上を動く点の速度ベクトルはサイクロイドに接する方向であるはずなので, その速度を考えようという方法です. つまり速度ベクトルを求めるために接線を調べるのではなく, 逆に接線を求めるために速度ベクトルを調べるのです.

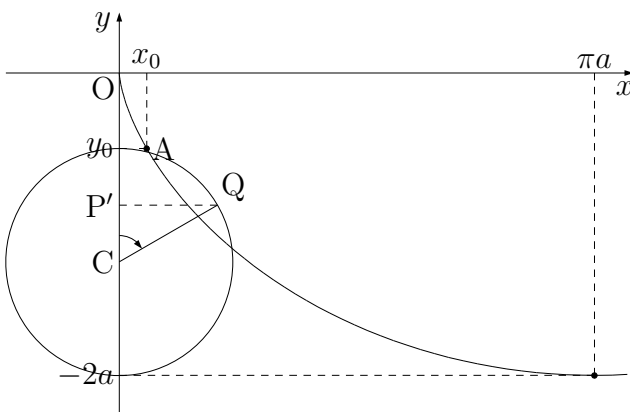


サイクロイドはころがる円の周上の一点 P が描く軌跡でした. この点 P の動きは, 円の回転運動と, 円がころがることによる平行移動との合成になっています. さらに円は滑ることなくころがるので, このふたつの運動の大きさは等しくなっています. このことから P の速度ベクトルの方向は図の菱形の対角線方向であることが分かります.

問題 6. (i) このようにして求めた接線の傾きが⑭と一致することを示しなさい.

(ii) この接線は, 点 Q を通る円 C の直径の, もう一方の端点を通ることを示しなさい.

4.2.2 等時性



サイクロイド⑬上の点 $A = (x_0, y_0)$ ($0 \leq x_0 < \pi a$) から初速度 0 で滑り落ちる点 P が最下点 $(\pi a, -2a)$ に到達するのに要する時間を求めるため, ホイヘンスは次のような補助運動を導入しました.

y 軸上の 2 点 $(0, y_0), (0, -2a)$ を直径の両端とする円 C 上を, 点 $(0, y_0)$ から出発し, 角速度 $\sqrt{g/a}$ で時計周りに等速円運動する点 Q を考えます. 円の中心 C の座標は $(0, (y_0 - 2a)/2)$,

半径は $(y_0 + 2a)/2$ ですから, 時刻 t における点 Q の座標は

$$\left(\frac{y_0 + 2a}{2} \sin \sqrt{\frac{g}{a}} t, \frac{y_0 - 2a}{2} + \frac{y_0 + 2a}{2} \cos \sqrt{\frac{g}{a}} t \right)$$

で与えられます. 特に, 点 Q を y 軸に射影した点 P' は中心 C, 振幅 $(y_0 + 2a)/2$, 角振動数 $\sqrt{g/a}$ の単振動をします. 明らかに点 P' が点 $(0, y_0)$ から点 $(0, -2a)$ まで到達するのにかかる時間は $\pi\sqrt{a/g}$ (周期の半分) です.

さて, 点 P' の点 $(0, y)$ における速度 u を求めてみましょう. 時刻 t における点 P' の y 座標は

$$y = \frac{y_0 - 2a}{2} + \frac{y_0 + 2a}{2} \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t \quad \dots\dots\dots (18)$$

ですから, 速度 u は[¶]

$$u = \frac{dy}{dt} = -\frac{y_0 + 2a}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \sqrt{\frac{g}{a}}t$$

となります. これを y を使って表しましょう. 時刻が $0 \leq t \leq \pi\sqrt{a/g}$, つまり $0 \leq \sqrt{\frac{g}{a}}t \leq \pi$ の範囲で考えることにします. このとき $\sin \sqrt{\frac{g}{a}}t \geq 0$ なので, (18) から

$$\begin{aligned} \frac{y_0 + 2a}{2} \sin \sqrt{\frac{g}{a}}t &= \sqrt{\left(\frac{y_0 + 2a}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_0 + 2a}{2} \cos \sqrt{\frac{g}{a}}t\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{y_0 + 2a}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{y_0 - 2a}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{(2a + y)(y_0 - y)} \end{aligned}$$

となります. よって

$$\begin{aligned} u &= -\frac{y_0 + 2a}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} \sin \sqrt{\frac{g}{a}}t \\ &= -\sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \sqrt{(2a + y)(y_0 - y)} \\ &= -\sqrt{\frac{g(y + 2a)(y_0 - y)}{a}} \end{aligned}$$

となります. なんと, これは(17)で求めた点 P の速度の y 成分 v_y と一致するではありませんか. つまり点 P と点 P' は同じ速さで落ちていくこととなります. したがって点 P が点 A から最下点まで落下するのに要する時間と点 P' が点 $(0, y_0)$ から点 $(0, -2a)$ まで到達するのに要する時間とは同じである, すなわち $\pi\sqrt{a/g}$ であるということになります.

もう少しきちんとというとなりのようになります. 点 P' が点 $(0, y_0)$ から点 $(0, -2a)$ まで到達するのに要する時間は $\pi\sqrt{a/g}$ でしたが, (2) から, これを u を使って表すと

$$\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = \int_{y_0}^{-2a} \frac{1}{u} dy$$

[¶]我々は Q の運動を (等速円運動を記述しやすい) 角速度が一定の運動として与えたのでここで微分を使ってしまおうのですが, ホイヘンスは速さが $\frac{y_0+2a}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}$ で一定の円運動として導入したようです.

となりますが, 今みたように $u = v_y$ なので

$$= \int_{y_0}^{-2a} \frac{1}{v_y} dy$$

となります. この最後の式は, 再び②により, 点 P が点 A から最下点まで落下するのに要する時間を表しています.

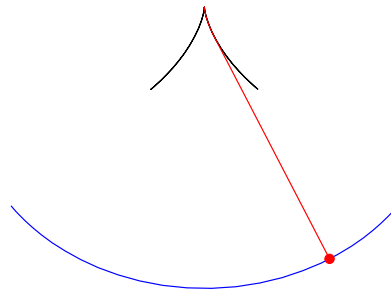
注意 4.1. §4.1 でこの積分を計算する際, 最後の部分は A.3 にまわしました. この A.3 で使っている変数変換は実質的には⑱と同じものです. ホイヘンスは力学的ないし幾何学的考察をもとに, この変数変換による積分の計算と実質的に同じことをやったのだと見ることも出来るでしょう.

5 振り子の軌道を変える～伸開線・縮閉線・包絡線～

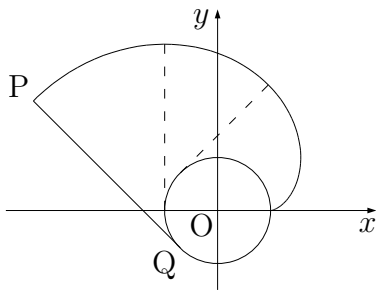
前節でサイクロイドが等時曲線であることを見ました. ということは軌道がサイクロイドに添うような振り子を作ることが出来れば, 真に等時の振り子が得られることになります.

さて, 振り子の軌道を変えるにはどうすればよいでしょうか.

ホイヘンスは図のように振り子に当て板をとりつけることを考えました. では, どのような形の当て板をつければよいのでしょうか.



5.1 伸開線・縮閉線

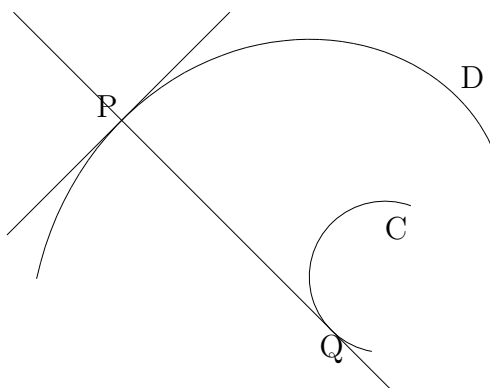


ある曲線 C に糸を巻き付け, それを引っ張りながらほどくとき, その糸の端が描く曲線 D を, もとの曲線 C の伸開線といいます. また, 元の曲線 C を, 曲線 D の縮閉線といいます. 〓 左図は円の伸開線です.

問題 7. 原点を中心とする円の伸開線を表す式を求めなさい.

我々が求める当て板の形は, その伸開線がサイクロイドとなるようなもの, すなわちサイクロイドの縮閉線です. 与えられた曲線の縮閉線はどのようにすれば求められるでしょう.

〓現在では曲線 D の曲率円の中心の軌跡 C を D の縮閉線, それに対し D を C の伸開線と定義するのが普通です.



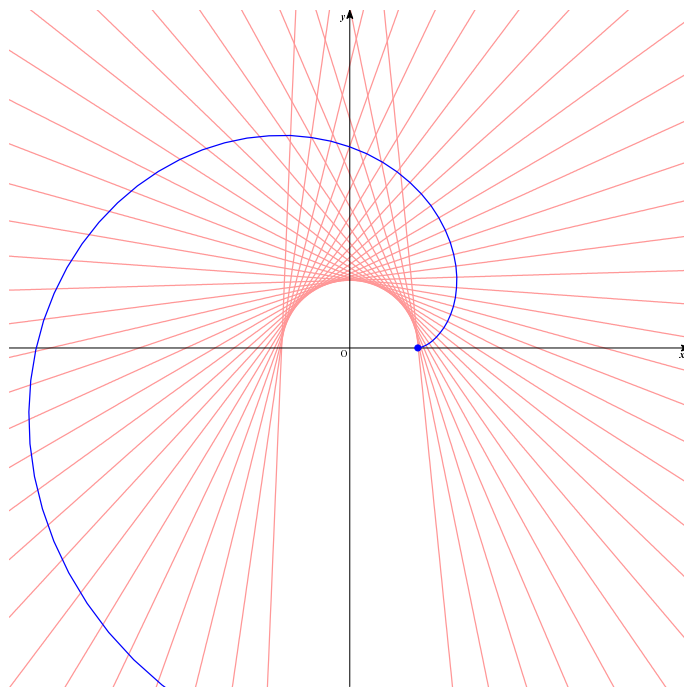
曲線 D が与えられ, その縮閉線が C である
とします. D 上の点 P に対応する C 上の点を
Q とします. つまり, 点 Q は, 糸の先が P にあ
るときに, 糸が C にくっついている点です (図
参照). 糸を引っ張ってほどいていくので, こ
の糸は点 Q で曲線 C に接しているはずで
す. つまり直線 PQ は曲線 C の点 Q における接線
になっています. また, 糸をほどいていくと
きの点 P の速度ベクトルは, 糸をピンと張っ
ているわけですから, この糸に直交している

はずです. (さもないと糸がたるんでしまったり, 切れてしまったりするでしょう.) 点 P の速度ベクトルは曲線 D に接しているの
で, 直線 PQ は, 曲線 D の点 P における接線に直交することになります. つまり直線 PQ は, 曲線 D の点 P における法線だ
ということになります.

以上の考察から,

曲線 D の縮閉線は, D 上の各点で法線をひいたとき, その全てに接している

という性質を持つことがわかりました.



次の節で, このような性質を持つ曲線の求め方を, もう少し一般的な枠組で調べる
ことにしましょう.

5.2 直線族の包絡線

s を変数とするふたつの関数 $a(s), b(s)$ が与えられたとします. s の値をひとつ決めて (このとき, ふたつの数 $a(s), b(s)$ が定まります) 直線

$$y = a(s)x + b(s)$$

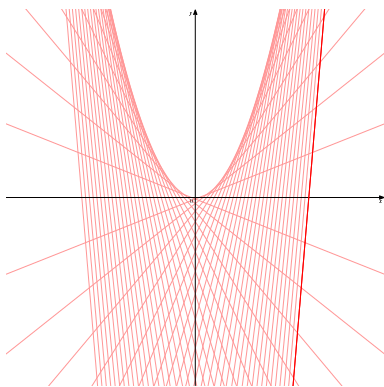
を考えます. すると, s の値をひとつ定める毎に直線がひとつ定まります. このようなものを (s をパラメータとする) 直線族といいます. ここでは直線族を

$$\{y = a(s)x + b(s)\}_s \quad \dots\dots\dots \textcircled{19}$$

という記号で書くことにしましょう. この節の目標は, 直線族 $\textcircled{19}$ が与えられたとき, 全ての $y = a(s)x + b(s)$ に接するような曲線を求めることです. このような曲線を, 直線族 $\textcircled{19}$ の包絡線といいます. もう少し正確にいうと, s をパラメータとする曲線

$$C: \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases} \quad \dots\dots\dots \textcircled{20}$$

が, 各 s_0 に対し, 点 $(f(s_0), g(s_0))$ において直線 $y = a(s_0)x + b(s_0)$ に接しているとき, この曲線を直線族 $\textcircled{19}$ の包絡線といいます.



例 5.1. 直線族

$$\{y = 2sx - s^2\}_s$$

($a(s) = 2s, b(s) = -s^2$ の場合) の包絡線を考えてみましょう. s を少しずつ動かして直線を書くと図のようになります.

見慣れた曲線が見えるのではないのでしょうか. 実は曲線 $x = s, y = s^2$, つまり放物線 $y = x^2$ がこの直線族の包絡線になっています. 実際, 点 (s_0, s_0^2) における接線が $y = 2s_0x - s_0^2$ になっています.

問題 8. これを確かめなさい.

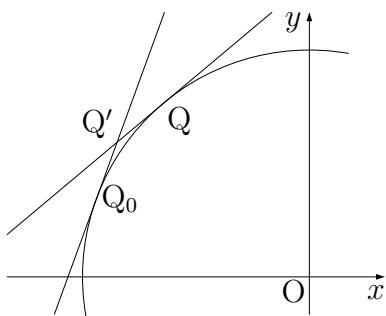
例 5.2. 直線族

$$\{y = s\}_s$$

($a(s) = 0, b(s) = s$ の場合) を考えてみます. これは x 軸に平行な直線達ですが, これら全てに接するような曲線というのは, いかにもありそうにありません.

この例で見たように, 直線族の包絡線というのはいつでも存在するわけではありませんが, 以下では存在する場合だけ考えることにします.

さて, 式 $\textcircled{20}$ で与えられる曲線 C が直線族 $\textcircled{19}$ の包絡線であるとしましょう. 目標は $f(s), g(s)$ を $a(s), b(s)$ を用いて表すことです.



C上の点 $Q_0(f(s_0), g(s_0))$ における接線は、包絡線の定義から、 $y = a(s_0)x + b(s_0)$ で与えられます。C上、点 Q_0 の近くに点 $Q(f(s), g(s))$ をとり、そこでの接線 $y = a(s)x + b(s)$ と、点 Q_0 での接線との交点を Q' とします。 Q' の座標は、連立方程式

$$\begin{cases} y = a(s_0)x + b(s_0) \\ y = a(s)x + b(s) \end{cases}$$

を解いて

$$\left(-\frac{b(s) - b(s_0)}{a(s) - a(s_0)}, -a(s_0) \cdot \frac{b(s) - b(s_0)}{a(s) - a(s_0)} + b(s_0) \right)$$

で与えられます。ここで s をどんどん s_0 に近づけていくと、点 Q は点 Q_0 に近付き、それともなって点 Q' も点 Q_0 に近づきます。したがって点 Q_0 の x 座標 $f(s_0)$ は

$$\begin{aligned} f(s_0) &= \lim_{s \rightarrow s_0} \left\{ -\frac{b(s) - b(s_0)}{a(s) - a(s_0)} \right\} \\ &= -\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{b(s) - b(s_0)}{a(s) - a(s_0)} \\ &= -\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{\frac{b(s) - b(s_0)}{s - s_0}}{\frac{a(s) - a(s_0)}{s - s_0}} \\ &= -\frac{b'(s_0)}{a'(s_0)} \end{aligned}$$

で与えられます。点 Q_0 は直線 $y = a(s_0)x + b(s_0)$ 上にありますから、 $g(s_0)$ は

$$g(s_0) = -a(s_0) \frac{b'(s_0)}{a'(s_0)} + b(s_0)$$

で与えられます。点 Q_0 , つまり s_0 は勝手に選んだものでしたから結局、包絡線 C は

直線族 $\{y = a(s)x + b(s)\}_s$ の包絡線

$$\begin{cases} x = -\frac{b'(s)}{a'(s)} \\ y = -a(s) \frac{b'(s)}{a'(s)} + b(s) \end{cases} \dots\dots\dots (21)$$

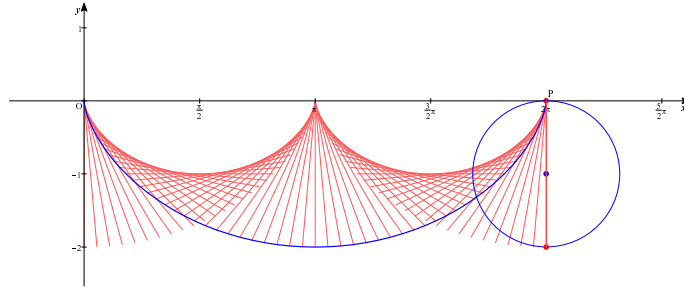
で与えられることとなります。 **

**ここでは包絡線であるための必要条件を調べただけですので、本当はこれが包絡線であることをチェックする必要があります(問題9)。また、 $a'(s) = 0$ となる点ではこの式は意味を持ちませんから注意が必要です。

問題 9. この曲線⑱が包絡線になっていることを確かめなさい.

問題 10. (i) 例 5.1 に対して, 曲線⑱を求めなさい.

(ii) 直線上を円がすべることなくころがるとき, 円のひとつの直径が定める直線族の包絡線 (下図参照) を求めなさい.



注意 5.3. ここでは高校数学の範囲内で扱いやすくするため, ⑱の形の直線族を考えましたが, これだと y 軸に平行な直線を扱うことが出来ません. このような場合も扱うには, 別のパラメータ (例えば t) を用意して, 直線をパラメータ表示した方が便利です. このようにすると, 直線族は s と t というふたつのパラメータを持つ式で表されます. (このように変数をふたつ持つ関数を二変数関数といいます.) この場合に包絡線を求めるには, 直線族を二変数関数と考えて, 二変数関数を扱う手法を用いるのが自然です.

5.3 サイクロイドの縮閉線

サイクロイドの縮閉線を求めましょう. §5.1 で見たように, 縮閉線は法線族の包絡線でした. サイクロイド⑬上の点

$$(a(s - \sin s), -a(1 - \cos s))$$

での接線の傾きは⑭でみたように $-1/\tan \frac{s}{2}$ で与えられるのでした. ($s = 0, \pi, 2\pi$ といった点では接線や法線が x 軸や y 軸に平行になり扱いが面倒^{††} なので, $0 < s < \pi$ の範囲で考えることにします.) したがって法線 (接点を通り接線に直交する直線) は

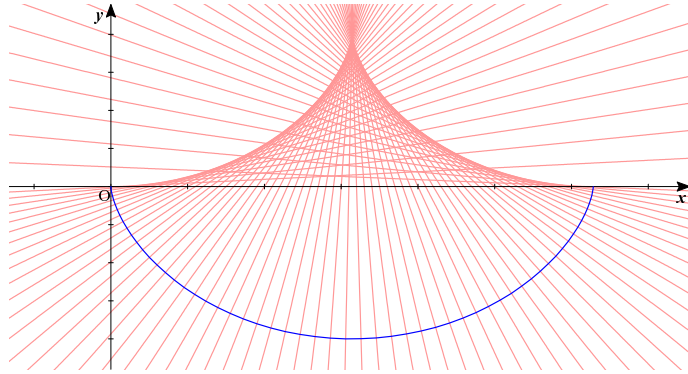
$$\begin{aligned} y &= \tan \frac{s}{2} \{x - a(s - \sin s)\} - a(1 - \cos s) \\ &= \left(\tan \frac{s}{2}\right) x - a \left(s \tan \frac{s}{2} - \tan \frac{s}{2} \cdot \sin s + 1 - \cos s\right) \\ &= \left(\tan \frac{s}{2}\right) x - a \left(s \tan \frac{s}{2} - \frac{\sin \frac{s}{2}}{\cos \frac{s}{2}} \cdot 2 \sin \frac{s}{2} \cdot \cos \frac{s}{2} + 1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{s}{2}\right)\right) \\ &= \left(\tan \frac{s}{2}\right) x - as \tan \frac{s}{2} \end{aligned}$$

^{††}注意 5.3 参照.

で与えられます. よって, 求めるものは直線族

$$\left\{ \left(\tan \frac{s}{2} \right) x - as \tan \frac{s}{2} \right\}_s$$

の包絡線であるということになります.



$$\begin{aligned} \left(\tan \frac{s}{2} \right)' &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{s}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{s}{2}} \\ \left(-as \tan \frac{s}{2} \right)' &= -a \left(s \tan \frac{s}{2} \right)' \\ &= -a \left(s' \tan \frac{s}{2} + s \left(\tan \frac{s}{2} \right)' \right) \\ &= -a \left(\tan \frac{s}{2} + \frac{s}{2 \cos^2 \frac{s}{2}} \right) \end{aligned}$$

ですから, ②より, 求める包絡線は

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos^2 \frac{s}{2} \cdot a \left(\tan \frac{s}{2} + \frac{s}{2 \cos^2 \frac{s}{2}} \right) \\ &= a \left(2 \sin \frac{s}{2} \cdot \cos \frac{s}{2} + s \right) \\ &= a (\sin s + s) \\ y &= \left(\tan \frac{s}{2} \right) \cdot a \left(2 \sin \frac{s}{2} \cdot \cos \frac{s}{2} + s \right) - as \tan \frac{s}{2} \\ &= 2a \sin^2 \frac{s}{2} \\ &= a(1 - \cos s) \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{cases} x = a(s + \sin s) \\ y = a(1 - \cos s) \end{cases}$$

で与えられることとなります. なんとなく見覚えがあるような式ではないでしょうか.
 $s = (s + \pi) - \pi$ と書き換えて変形してみると

$$\begin{aligned}
 x &= a(s + \sin s) \\
 &= a\{(s + \pi) - \pi + \sin((s + \pi) - \pi)\} \\
 &= a\{(s + \pi) - \sin(s + \pi)\} - a\pi \\
 y &= a(1 - \cos s) \\
 &= a\{1 - \cos((s + \pi) - \pi)\} \\
 &= a\{1 + \cos(s + \pi)\} \\
 &= a + a\cos(s + \pi) \\
 &= 2a - a + a\cos(s + \pi) \\
 &= 2a - a\{1 - \cos(s + \pi)\}
 \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{cases}
 x = a\{(s + \pi) - \sin(s + \pi)\} - a\pi \\
 y = -a\{1 - \cos(s + \pi)\} + 2a
 \end{cases}$$

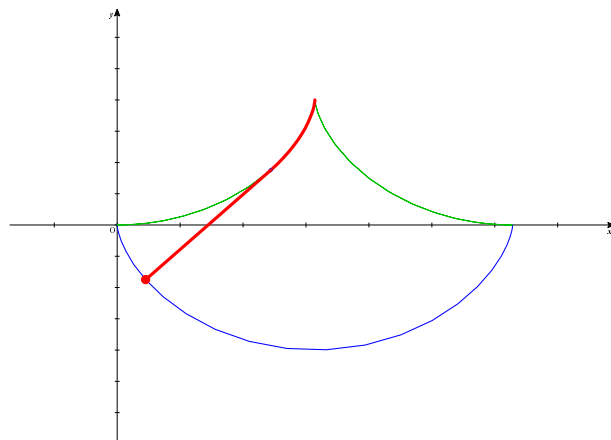
となり, もともとのサイクロイド

$$\begin{cases}
 x = a(s - \sin s) \\
 y = -a(1 - \cos s)
 \end{cases}$$

を x 軸方向に $-a\pi$, y 軸方向に $2a$ だけ移動したものになっています. (パラメータは π だけずれています.) つまり

サイクロイドの縮閉線は, もとのサイクロイドと合同なサイクロイドである

ことがわかりました.



ホイヘンスは当て板の形を決定するために、ここまで述べたような伸開線, 縮閉線, 包絡線の理論を創始し, 1656年に実際にこのような当て板をもつ振り子時計を製作しました. ホイヘンスの最初の時計は1日の誤差が数分しかなく, その後まもなく1日の誤差が10秒以内の時計も作られるようになりました.

5.4 補遺～法線族の包絡線が縮閉線であること～

我々は §5.1 で, 縮閉線は法線族の包絡線であることを見ました. 実はそこで示したのは, 縮閉線ならば法線族の包絡線であるということであり, 法線族の包絡線が実際に縮閉線になっているということは示していませんでした. ここでは, これを確かめましょう.

簡単のため, 曲線 D が (パラメータ表示ではなく)

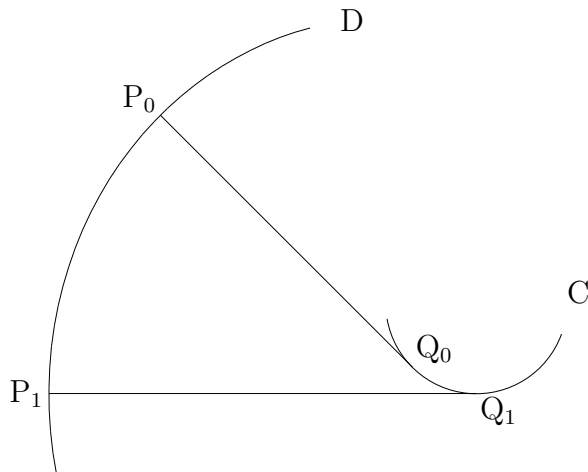
$$y = f(x)$$

で与えられているとします. また, 技術的な仮定ですが, 計算途中の符号の扱いを簡単にするため

$$f''(x) > 0, \quad f'(x) + \left\{ \frac{1 + f'(x)^2}{f''(x)} \right\}' > 0$$

であるとします.

曲線 D の法線族の包絡線を C とします. 目標は, C の伸開線が曲線 D であること, すなわち図において $\widehat{Q_0Q_1}$ の長さが $P_1Q_1 - P_0Q_0$ に等しいことを示すことです.



まず, 曲線 D の法線を求めましょう. D 上の点 $(s, f(s))$ における接線の傾きは $f'(s)$ なので, 法線は

$$y = -\frac{1}{f'(s)}(x - s) + f(s) = -\frac{1}{f'(s)}x + \frac{s}{f'(s)} + f(s)$$

で与えられます.

したがって曲線 C は直線族

$$\left\{ y = -\frac{1}{f'(s)}x + \frac{s}{f'(s)} + f(s) \right\}_s$$

の包絡線となります.

$$\begin{aligned} \left\{ -\frac{1}{f'(s)} \right\}' &= \frac{f''(s)}{f'(s)^2} \\ \left\{ \frac{s}{f'(s)} + f(s) \right\}' &= \frac{-sf''(s) + f'(s)}{f'(s)^2} + f'(s) \\ &= \frac{-sf''(s) + f'(s) + f'(s)^3}{f'(s)^2} \end{aligned}$$

ですから, ②より曲線 C は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{f'(s)^2}{f''(s)} \cdot \frac{-sf''(s) + f'(s) + f'(s)^3}{f'(s)^2} \\ &= -\frac{-sf''(s) + f'(s) + f'(s)^3}{f''(s)} \\ &= s - \frac{f'(s)(1 + f'(s)^2)}{f''(s)} \\ y &= -\frac{1}{f'(s)} \left\{ s - \frac{f'(s)(1 + f'(s)^2)}{f''(s)} \right\} + \frac{s}{f'(s)} + f(s) \\ &= f(s) + \frac{1 + f'(s)^2}{f''(s)} \end{aligned}$$

で与えられます.

曲線 D 上の点 $P_0(s_0, f(s_0))$, $P_1(s_1, f(s_1))$ に対応する曲線 C 上の点 Q_0 , Q_1 は

$$\begin{aligned} Q_0 &\left(s_0 - \frac{f'(s_0)(1 + f'(s_0)^2)}{f''(s_0)}, f(s_0) + \frac{1 + f'(s_0)^2}{f''(s_0)} \right) \\ Q_1 &\left(s_1 - \frac{f'(s_1)(1 + f'(s_1)^2)}{f''(s_1)}, f(s_1) + \frac{1 + f'(s_1)^2}{f''(s_1)} \right) \end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned}
 P_0Q_0 &= \sqrt{\left\{\frac{f'(s_0)(1+f'(s_0)^2)}{f''(s_0)}\right\}^2 + \left\{\frac{1+f'(s_0)^2}{f''(s_0)}\right\}^2} \\
 &= \sqrt{\left\{\frac{1+f'(s_0)^2}{f''(s_0)}\right\}^2 \{1+f'(s_0)^2\}} \\
 &= \frac{\{1+f'(s_0)^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(s_0)} \\
 P_1Q_1 &= \frac{\{1+f'(s_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(s_1)}
 \end{aligned}$$

となります。よって

$$\begin{aligned}
 P_1Q_1 - P_0Q_0 &= \frac{\{1+f'(s_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(s_1)} - \frac{\{1+f'(s_0)^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(s_0)} \\
 &= \left[\frac{\{1+f'(s)^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(s)} \right]_{s_0}^{s_1} \\
 &= \int_{s_0}^{s_1} \left\{ \frac{\{1+f'(s)^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(s)} \right\}' ds \quad \dots\dots\dots \textcircled{22}
 \end{aligned}$$

となりますが、

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{\{1+f'(s)^2\}^{\frac{3}{2}}}{f''(s)} \right\}' &= \left\{ \sqrt{1+f'(s)^2} \cdot \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \\
 &= \frac{f'(s)f''(s)}{\sqrt{1+f'(s)^2}} \cdot \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} + \sqrt{1+f'(s)^2} \cdot \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \\
 &= \sqrt{1+f'(s)^2} \cdot \left[f'(s) + \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \right]
 \end{aligned}$$

なので、

$$\textcircled{22} = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{1+f'(s)^2} \cdot \left[f'(s) + \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \right] ds \quad \dots\dots\dots \textcircled{23}$$

となります。

一方、曲線の長さは定理 A.11 で与えられます。

$$\begin{aligned}
 \left\{ s - \frac{f'(s)(1+f'(s)^2)}{f''(s)} \right\}' &= 1 - \left\{ f'(s) \cdot \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \\
 &= 1 - f''(s) \cdot \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\} - f'(s) \cdot \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \\
 &= 1 - 1 - f'(s)^2 - f'(s) \cdot \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \\
 &= -f'(s) \left[f'(s) + \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \right] \\
 \left\{ f(s) + \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' &= f'(s) + \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}'
 \end{aligned}$$

ですから、弧 $\widehat{Q_0Q_1}$ の長さは

$$\begin{aligned}
 &\int_{s_0}^{s_1} \sqrt{f'(s)^2 \left[f'(s) + \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \right]^2 + \left[f'(s) + \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \right]^2} ds \\
 &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\{1+f'(s)^2\} \left[f'(s) + \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \right]^2} ds \\
 &= \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{1+f'(s)^2} \left[f'(s) + \left\{ \frac{1+f'(s)^2}{f''(s)} \right\}' \right] ds
 \end{aligned}$$

よって②3より

$$= P_1Q_1 - P_0Q_0$$

となります。

6 エピローグ

実は、サイクロイド振り子を持つ振り子時計はその後ほとんど作られることはなくなりました。ひとつには、振り子をサイクロイドにするための機構による摩擦などの影響が大きく、サイクロイド振り子にするメリットがあまりなかったためです。もうひとつの大きな理由は、振り子により動力を制御するとともに、その動力により振り子にエネルギーを与える脱進機という機構（これもホイヘンスの時計に組み込まれていました）が改良され、振り子の振幅の減衰の影響が少なくなったためでした。

さらに航海用の時計として振り子時計が利用されることもほとんどなかったようです。何と云っても、やはり、ゆれる船の上では振り子の振動を正確に保つというのは無理があったのでしょうか。

さて、代表的な単振動といえばバネの運動があります。これが発見されたのは1660年、ロバート・フック^{††}によります。ホイヘンスはテンプというものを開発し、ヒゲゼンマイ（バネの一種）を利用した携帯用の時計（現在の腕時計の元祖）も発明しました。（フックもヒゲゼンマイを用いた時計を開発しており、どちらが先かという論争があったようです。）

航海用時計として満足いくものが作られたのはずっと後の1759年のことで、振り子ではなくバネを利用したものでした。ジョン・ハリソンという時計技士が製作したこの時計は81日間の大西洋の航海でわずか8秒しか誤差がなかったそうです。

振り子時計としてのある意味での完成型は1921年にショートという人が開発した自由振り子時計というものです。これは誤差が1日に1/1000～2/1000秒というもので、1930年代後半に水晶時計が実用化されるまでは天文台などでの計時に使用されていました。

ホイヘンス自身は、航海用の時計を完成させられなかったことや、最も気に入っていたサイクロイド時計が普及しなかったこと等から、自分自身のことを、科学者としてはあまり成功しなかったと考えていたそうです。

しかし、彼が振り子時計の研究の過程で行った様々な研究は現代の数学や物理学に多大な影響を与えています。例えば伸開線・縮閉線の理論は、曲率という概念につながり、微分幾何学という分野を生み出しました。曲率は現代の微分幾何学でも中心的研究テーマです。最近話題になった、ポアンカレ予想を解決したペレルマンの研究も曲率を用いたもので、ある意味ではホイヘンスの直系の子孫といえるでしょう。

^{††} コルクを顕微鏡で観察したことで有名ですね。

A 数III+αの予習

A.1 微分

A.1.1 積・商の微分

定理 A.1. ふたつの関数 $f(x)$, $g(x)$ の積, 商の微分について次のことが成り立つ.

$$(i) \{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(ii) \left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

A.1.2 合成関数の微分

定理 A.2. ふたつの関数 $y = f(x)$, $z = g(y)$ の合成関数 $z = g \circ f(x)$ について次のことが成り立つ.

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

A.1.3 パラメータ表示された関数の微分

定理 A.3. $x = f(t)$, $y = g(t)$ とパラメータ表示された関数について次のことが成り立つ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

A.1.4 三角関数の微分

定理 A.4.

$$(i) (\sin x)' = \cos x$$

$$(ii) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(iii) (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

A.1.5 例

例 A.5. (i) n を自然数とする. 帰納的に

$(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = x' \cdot x^{n-1} + x \cdot (x^{n-1})' = 1 \cdot x^{n-1} + x \cdot (n-1)x^{n-2} = nx^{n-1}$
であることが分かる. (もちろん, $(x+h)^n$ を二項定理により展開して微分の定義から示すこともやさしい.)

$$(ii) \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

例 A.6. (i) $y = f(x) = 2x + 1$, $z = g(y) = y^3$ とすると合成関数は $z = g \circ f(x) = (2x + 1)^3$ となる. $f'(x) = 2$, $g'(y) = 3y^2$ だから

$$\{(2x + 1)^3\}' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2$$

(ii) a を定数とする. $y = f(x) = ax$, $z = g(y)$ とすると合成関数は $z = g \circ f(x) = g(ax)$ となる. $f'(x) = a$ だから

$$\{g(ax)\}' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(ax) \cdot a = ag'(ax)$$

(iii) $y = f(x)$, $z = g(y) = y^n$ とすると合成関数は $z = g \circ f(x) = f(x)^n$ となる. $g'(y) = ny^{n-1}$ だから

$$\{f(x)^n\}' = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = nf(x)^{n-1} \cdot f'(x)$$

例 A.7. $x = \cos t$, $y = \sin t$ で表される曲線 (原点を中心とする半径 1 の円) の, 点 $(\cos t, \sin t)$ における接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\sin t)'}{(\cos t)'} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t} \left(= -\frac{x}{y} \right)$$

例 A.8.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

A.2 積分

A.2.1 部分積分

定理 A.9.

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

この定理は積の微分の公式を積分の立場から見直したものである.

A.2.2 置換積分

定理 A.10.

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

この定理は合成関数の微分の公式を積分の立場から見直したものである.

$x = \varphi(t)$ とおくと, $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ だから形式的に式変形すると $dx = \varphi'(t)dt$ となる. これらを左辺に代入すると右辺の式が得られる. この定理はこのような形式的な変形をしてもよいということを保障している.

A.2.3 曲線の長さ

定理 A.11. パラメータ t を用いて $x = f(t)$, $y = g(t)$ であらわされる曲線の, t が a から b まで動くときの長さ l は

$$\int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt$$

で与えられる.

A.2.4 例

例 A.12. 自然数 n にたいし

$$n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdots \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 & n : \text{奇数} \\ n \cdot (n-2) \cdots \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 & n : \text{偶数} \end{cases}$$

と定める. また $0!! = (-1)!! = 1$ と定める. n が自然数であるとき次が成り立つ.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Proof. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$ とおく. $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sin^{2n-1} x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)' \cdot \sin^{2n-1} x dx \\ &= [-\cos x \cdot \sin^{2n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (\sin^{2n-1} x)' dx \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x) \cdot (2n-1) \sin^{2n-2} x \cdot \cos x dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^{2n-2} x dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^{2n-2} x dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x dx - (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx \\ &= (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n \end{aligned}$$

よって

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$

また

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

であるから求める結果がえられる. □

問題 11. n を自然数とするとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x dx$$

を求めよ.

例 A.13.

$$\int_1^2 (x+1)^2 dx$$

もちろん展開してそのまま計算してもよいが, $x+1=t$ すなわち $x=t-1$ とおくと, $dx=dt$, $x=1$ のとき $t=2$, $x=2$ のとき $t=3$ だから

$$\int_1^2 (x+1)^2 dx = \int_2^3 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_2^3 = \frac{1}{3} (3^3 - 2^3) = \frac{19}{3}$$

例 A.14. 原点を中心とする半径 $r > 0$ の円はパラメータ θ を用いて $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ とあらわされる. $x' = -r \sin \theta$, $y' = r \cos \theta$ であるから円周の長さは

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} d\theta = r \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi r$$

A.3

$\alpha < \beta$ とすると

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} dx = \pi.$$

(厳密にいうと, もとの被積分関数が $x = \alpha$ と $x = \beta$ で定義されていないので, これは普通の定積分ではなく広義積分とよばれるものです.)

∴)

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta$$

とおくと, x が α から β まで動くとき, θ は 0 から π まで動く. よって $\sin \theta \geq 0$. また

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \theta d\theta \\ x - \alpha &= \frac{\beta - \alpha}{2} (1 - \cos \theta) \\ \beta - x &= \frac{\beta - \alpha}{2} (1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{2}(1-\cos\theta) \cdot \frac{\beta-\alpha}{2}(1+\cos\theta)}} \cdot \frac{\beta-\alpha}{2} \sin\theta d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\pi} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\pi} = \pi\end{aligned}$$

□

注意 A.15. 逆三角関数 (三角関数の逆関数) を使うと, この積分は

$$t = x - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

あるいは

$$t = \sqrt{\frac{\beta-x}{x-\alpha}}$$

と置換することでも計算出来ます.

あとがき

最後にこの小文を書くにあたって参考にした文献等を紹介しましょう。

- [1] S. G. ギンディキン, (三浦伸夫 訳), ガリレイの17世紀〜ガリレイ, ホイヘンス, パスカルの物語〜シュプリンガー・フェアラーク東京

この本は副題のとおりガリレイ, ホイヘンス, パスカルの3人の数学と物理学の研究を中心とした歴史読みものです. この小文の歴史に関する記述と, ホイヘンスがサイクロイドの等時性を示した方法に関する部分は主にこの本によりました.

ホイヘンス自身の書いたものの日本語訳が

- [2] ホイヘンス, (原亨吉 編集), ホイヘンス:光についての論考他, (科学の名著 第2期 10 (20)) 朝日出版社

で読めます. 少し古い本なので図書館等で探さなければならないと思いますが, 例えば琉大の図書館にはあります.

- [3] E. ハイラー, G. ワナー, (蟹江幸博 訳) 解析教程 (上), シュプリンガー・フェアラーク東京

この本は大学生向けの微積分学の教科書なのですが, 標準的な教科書と違い歴史的流れに沿った叙述になっていて, 微積分が生まれてきた背景であるとか, それが生まれた当時の興奮といったものを感じることもできるとてもおもしろい本だと思います.

§2.3で楕円積分というものを少し紹介しました. この辺りは, きちんと勉強しようとする, 微積分と複素関数論あたりを勉強しておかないとちょっとつらいかと思えます. 興味をもたれた方は「楕円積分」とか「楕円関数」といったキーワードで検索してみてください.

- [4] 安藤四郎, 楕円積分・楕円関数入門, 日新出版

の第1章には単振り子の例が載っており今回参考にしました.

力学については, 私は物理が専門ではないので, これがよいと自信をもってお薦めできるわけではありませんが, この小文を書くにあたっては

- [5] 戸田盛和, 一般力学30講, (物理学30講シリーズ) 朝倉書店

等を参考にしました. これは教科書というよりは副読本という感じのものだと思いますが単振り子, サイクロイド振り子をはじめ, いろいろとおもしろい例が載っています.

サイクロイドは今回扱った性質の他に, 最速降下線であるという性質も持っています. これについては 2004 年に開邦高校の SSH の講義で扱いました. 手前味噌ですが, そのときのノートが

[6] <http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/ssh04.html>

においてあります. 興味のある方はこのノートとそこで挙げた参考文献を見て下さい.

この pdf ファイルの中の色のついているグラフは, 大阪教育大学附属高等学校池田校舎の友田勝久先生が作られた GRAPES というソフトウェアを使って描きました.

[7] <http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/>

フリーソフトウェアなのですが, 高機能で非常に使い勝手がよいソフトです.

時計の歴史に関する事柄は

[8] 織田 一郎, 時と時計の百科事典, グリーンアロー出版社

の他, Wikipedia 等を参考にしました.