目 次

第1章　実数

この章では実数の性質について復習する. 実数全体のなす集合は

(i) 全順序体であり

(ii) 連続性の公理をみたす.

以下このふたつの性質について述べる.

1.1　全順序体

実数全体のなす集合 $\mathbb{R}$ には
加法;

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (a, b) \mapsto a + b \in \mathbb{R}$$

すなわち $a, b \in \mathbb{R}$ に対しその和 $a + b$ を対応させる $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像と
乗法;

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (a, b) \mapsto ab \in \mathbb{R}$$

すなわち $a, b \in \mathbb{R}$ に対しその積 ab を対応させる $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への写像
の 2 つの演算が定まっていて以下の条件をみたす.
$a, b, c \in \mathbb{R}$ とする.

(i) (結合律, associativity) $(a + b) + c = a + (b + c)$

$$(ab)c = a(bc)$$

(ii) (可換律, commutativity) $a + b = b + a$

$$ab = ba$$

(iii) 加法に関する単位元の存在
$a + 0 = a$ を, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対してみたす元 $0 \in \mathbb{R}$ が存在する.

(iv) 加法に関する逆元の存在
任意の $a \in \mathbb{R}$ に対してある元 $b \in \mathbb{R}$ が (a に応じて) 存在して $a + b = 0$ となる.
b を a の加法に関する逆元といい $-a$ と書く.

(v) (分配律, distributive law) $a(b + c) = ab + ac$

(vi) 乗法に関する単位元の存在
$a \cdot 1 = a$ を, 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対してみたす元 $1 \in \mathbb{R}$ が存在する.

(vii) 乗法に関する逆元の存在
$a \neq 0$ ならば, ある元 $b \in \mathbb{R}$ が (a に応じて) 存在して $ab = 1$ となる. b を a の乗法に関する逆元といい $1/a$ あるいは a^{-1} と書く.

一般に上の (i)〜(vii) をみたす加法, 乗法の定義された集合を 可換体 とよぶ.
$\mathbb{R}$ は可換体である.

$\mathbb{R}$ における数の大小関係 ($\leq$) は次の 3 条件をみたす.
$a, b, c \in \mathbb{R}$

(i) (反射律) $a \leq a$

(ii) (同値律) $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば $a = b$

(iii) (推移律) $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば $a \leq c$

一般にこの 3 つをみたす関係を 順序 (order) といい, 順序の与えられた集合を 順序集合 (ordered set) という.
さらに $\mathbb{R}$ における $\leq$ は次もみたす.
(iv) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し $a \leq b$ か $b \leq a$ の少なくとも一方が必ず成立する.
(iv) をみたす順序を 全順序 (total order) あるいは 線型順序 (linear order) という.
$\mathbb{R}$ は数の大小関係 $\leq$ により全順序集合である.
$\mathbb{R}$ における順序と加法, 乗法の間には次の関係 ($*$) がある.

(i) $a \leq b$ ならば任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し $a + c \leq b + c$

(ii) $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば $ab \geq 0$

一般に全順序の入った体が上の ($*$) をみたすとき 全順序体 とよぶ.
$\mathbb{R}$ は全順序体である.
$a \leq b$ かつ $a \neq b$ のとき $a < b$ と書く.
可換体の性質および上の ($*$) から次がわかる.

(i') $a < b$ ならば任意の $c \in \mathbb{R}$ に対し $a + c < b + c$

(ii') $a > 0$ かつ $b > 0$ ならば $ab > 0$

体の定義の (i)〜(vii) と上の ($*$) から (すなわち全順序体においては) 次が示せる.

Proposition 1.1.1. $a, b, c \in \mathbb{R}$ とする.

(i) $a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a$

(ii) $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$

(iii) $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$

(iv) $a \leq b$ かつ $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$

(v) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

(vi) $a^2 \geq 0$

証明はやさしい. □

Proposition 1.1.2. $a < b$ であるような任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し $a < c < b$ をみたす実数 $c \in \mathbb{R}$ が無数に存在する.

Proof.

$$c = a + \frac{b-a}{2}$$

とおく.

$$c - a = \left(a + \frac{b-a}{2}\right) - a = \frac{b-a}{2} > 0.$$

また

$$b - c = b - a - \frac{b-a}{2} = (b-a)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{b-a}{2} > 0.$$

よって $a < c < b$.

a, c あるいは c, b に対して上の議論を適用すると無数にあることがわかる. □

Remark . 全順序体において $1+1$ を 2 と書くことにすると $2 > 0$, 特に $2 \neq 0$ であり上の証明は任意の全順序体で正しい.

Definition 1.1.3. $A \subset \mathbb{R}$ を部分集合とする.

$$M \in \mathbb{R} \text{ が } A \text{ の } \underline{\text{最大数}} \text{ である} \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & M \in A \\ \text{(ii)} & \text{任意の } x \in A \text{ に対し } x \leq M. \end{cases}$$

このとき $M = \max_{x \in A} x = \max_A x = \max A$ 等と書く.

$$m \in \mathbb{R} \text{ が } A \text{ の } \underline{\text{最小数}} \text{ である} \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & m \in A \\ \text{(ii)} & \text{任意の } x \in A \text{ に対し } m \leq x. \end{cases}$$

このとき $m = \min_{x \in A} x = \min_A x = \min A$ 等と書く.

exercise 1. $\min A = -\max\{-x \mid x \in A\}$ を示せ.

Definition 1.1.4. 実数 a に対し

$$|a| := \max\{a, -a\}$$

を a の <u>絶対値</u> という.

exercise 2. 次を示せ.

(i) $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$
$a \leq 0 \Rightarrow |a| = -a$

(ii) 任意の $a \in \mathbb{R}$ について $|a| \geq 0$ であり
$|a| = 0$ となるのは $a = 0$ のときかつこれに限る.

(iii) $|ab| = |a| \cdot |b|$

(iv) $|a + b| \leq |a| + |b|$

Definition 1.1.5. 実数 a, b ($a \leq b$) に対し

$$[a, b] := \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$$

を a, b を端点とする <u>閉区間</u> という.

$$(a, b) := \{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$$

を a, b を端点とする <u>開区間</u> という.

Caution! . 開区間の記号 (a, b) は $\mathbb{R}^2$ (あるいはもっと一般に直積集合) の元を表す記号と同じなので注意が必要であるが, 通常文脈からどちらの意味かは判断出来る.

exercise 3. $\max[a, b] = b,\ \min[a, b] = a$ を示せ.

Example 1.1.6. $\max(a, b)$, $\min(a, b)$ はともに存在しない.
　実際, $M \in \mathbb{R}$ が (a, b) の最大数だとする. Def 1.1.3 (i) より $M \in (a, b)$ ゆえ $a < M < b$. Prop 1.1.2 より $M < c < b$ となるような実数 c が存在する. $a < M$ なので $a < c < b$ すなわち $c \in (a, b)$. Def 1.1.3 (ii) より $c \leq M$. 従って $c \leq M < c$ となり矛盾.* 最小数についても同様. □

exercise 4. 最小数について示せ.

---

* $c \leq M < c \Leftrightarrow c \leq M$ かつ $M < c \Leftrightarrow c \leq M$ かつ $M \leq c$ かつ $c \neq M$
$\Leftrightarrow c = M$ かつ $c \neq M$. (同様な議論で $a \leq b < c$ ならば $a < c$ 等が示せる.)

Definition 1.1.7. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(i) $m \in \mathbb{R}$ が A の 上界 (upper bound) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対し $a \leq m$ が成り立つ.

(ii) $l \in \mathbb{R}$ が A の 下界 (lower bound) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対し $l \leq a$ が成り立つ.

Caution! . 上界, 下界とも 1 つだけというわけではない.

(iii) A が上界 (下界) をもつとき A は上 (下) に 有界 (bounded) であるという.
上にも下にも有界であるとき有界であるという.

定義より「A が有界 $\Leftrightarrow$ 実数 l, m が存在して, 任意の $a \in A$ について $l \leq a \leq m$ となる」ことがわかる.

exercise 5. A が有界 $\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}\ s.t.\ \forall a \in A,\ |a| \leq K$.

Definition 1.1.8. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

(i) A が上に有界であるとする. A の上界全体の集合に最小数が存在するときそれを A の上限 (supremum) とよび

$$\sup_{a \in A} a \text{ または } \sup A$$

で表す.

A が上に有界でないとき $\sup A = \infty$ と書く.

(ii) A が下に有界であるとする. A の下界全体の集合に最大数が存在するときそれを A の下限 (infimum) とよび

$$\inf_{a \in A} a \text{ または } \inf A$$

で表す.

A が下に有界でないとき $\inf A = -\infty$ と書く.

Remark . 実は $A \subset \mathbb{R}$ が空集合ではなく上 (下) に有界であれば上限 (下限) が存在する. これについては連続性の公理のところで述べる.

Proposition 1.1.9. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \text{任意の } a \in A \text{ に対し } a \leq s \\ \text{(ii)} & b < s \text{ ならば } b < a \text{ となるような } a \in A \text{ が存在する.} \end{cases}$$

Proof. 条件 (i) は s が A の上界であることをいっている.

一方対偶を考えると条件 (ii) は「b が A の上界ならば $s \leq b$」と同値 (ここで $\mathbb{R}$ が全順序集合であることを用いている).

すなわち (i),(ii) は s が A の上界の最小数であることをいっている. □

Proposition 1.1.10. $\max A$ が存在すれば $\sup A = \max A$.

Proof. $M = \max A$ とする.

最大数の定義 (ii) より任意の $a \in A$ に対し $a \leq M$. 従って M は A の上界である.

また最大数の定義 (i) より $M \in A$. 従って任意の A の上界 m に対し $M \leq m$.

よって M は A の最小の上界, すなわち A の上限である. □

exercise 6. 下限について Prop 1.1.9, 1.1.10 に相当することを示せ.

Example 1.1.11. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $A = (a, b) \subset \mathbb{R}$ とすると $\sup A = b$, $\inf A = a$ である.

$x \in A$ ならば $a < x < b$ であるから b は A の上界, a は A の下界である.

$c < b$ とする. $d = \max\{a, c\}$ とおくと, $d < b$. よって Prop 1.1.2 より $d < y < b$ となる $y \in \mathbb{R}$ が存在する. $a \leq d$ に注意すると $a < y < b$, すなわち $y \in A$ である. また $c \leq d$ であるから $c < y$. よって Prop 1.1.9 より $b = \sup A$.

$\inf A = a$ も同様.

exercise 7. $\inf(a, b) = a$ を示せ.

exercise - 問題集 . 55 (1) (2), 56 (1) 〜 (4), 57 (1)(2)

1.2　実数列の収束

Definition 1.2.1. $a, b \in \mathbb{R}$ に対し a と b の <u>距離</u>$d(a, b) \in \mathbb{R}$ を

$$d(a, b) = |a - b|$$

で定める.

絶対値の性質 (exercise 2) より上で定めた距離は次の (i)〜(iii) をみたすことがわかる.

(i) $d(a, b) \geq 0$ であり
$d(a, b) = 0$ となるのは $a = b$ のときかつこれに限る.

(ii) $d(a, b) = d(b, a)$.

(iii) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.[†]

† $|a - c| = |(a - b) + (b - c)| \leq |a - b| + |b - c|$.

Definition 1.2.2. $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$[‡] に対して $\mathbb{R}$ の部分集合

$$U_\varepsilon(a) = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ d(x,a) < \varepsilon\}$$

を a の **ε近傍** という.

定義から $U_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ であることがわかる.

Definition 1.2.3. 自然数全体 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

を (実)数列 という.

普通 $a(n)$ を a_n と書いて, 数列を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とか $\{a_n\}$ と表す.

Caution! . 数列 $\{a_n\}$ と書いたときは記号 $\{\}$ は集合を表しているのではないことに注意する. 記号の濫用であるが, 通常文脈からどちらの意味であるかはわかる. わかりにくい場合はどちらであるか明記する.

例えば集合としては $\{(-1)^n\} = \{1,-1\} = \{(-1)^{n-1}\}$ であるが数列としては $\{(-1)^n\} \neq \{(-1)^{n-1}\}$ である.

Definition 1.2.4. 数列 $\{a_n\}$ が $n \to \infty$ のとき $a \in \mathbb{R}$ に 収束 する

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $a_n \in U_\varepsilon(a)$ となる.

このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

あるいは

$$a_n \to a \quad (n \to \infty)$$

と書く.

a を数列 $\{a_n\}$ の 極限値 という.

数列 $\{a_n\}$ がある実数 a に収束するとき 収束列 という. 収束列でないときその数列は 発散 するという.

絶対値を使って書きかえると

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} a_n = a \\
\Leftrightarrow\ &\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \{a_n\}_{n\geq N} \subset U_\varepsilon(a)^{\S} \\
\Leftrightarrow\ &『\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ n \geq N \Rightarrow d(a_n,a) < \varepsilon』 \\
\Leftrightarrow\ &『\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon』
\end{aligned}$$

となる.

[‡] 以下このように書くときは ε が実数であることを特に明示しない.
[§] ここでは $\{a_n\}_{n\geq N}$ は集合を表している.

Definition 1.2.5. 数列 $\{a_n\}$ は, 任意の $K \in \mathbb{R}$ に対しある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $a_n > K$ となるとき, 正の無限大に発散 するといって $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ と書く.

数列 $\{a_n\}$ は, 任意の $K \in \mathbb{R}$ に対しある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $a_n < K$ となるとき, 負の無限大に発散 するといって $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ と書く.

exercise 8. 数列 $\{a_n\}$ が正または負の無限大に発散するとき, この数列は発散する (すなわち収束列ではない) ことを示せ.

exercise 9. 数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するとき $\{a_n\}$ は (集合として) 下に有界で上には有界でない.

また負の無限大に発散するときは, 上に有界で下には有界ではない.

Proposition 1.2.6. 数列 $\{a_n\}$ の極限値は, 存在すれば, 唯一つである.

Proof. $a \in \mathbb{R}$ を $\{a_n\}$ の極限値であるとする. $b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ とする.
$\varepsilon = d(a,b)/2$ とおくと $\varepsilon > 0$.
$x \in U_\varepsilon(a) \Rightarrow d(x,a) < \varepsilon \Rightarrow d(a,b) \leq d(a,x) + d(x,b) < \varepsilon + d(x,b) \Rightarrow$
$d(x,b) > d(a,b) - \varepsilon = \varepsilon \Rightarrow x \notin U_\varepsilon(b)$ だから

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset.$$

今 $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ であるから, ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $a_n \in U_\varepsilon(a)$ となる. 従って $n \geq N$ ならば $a_n \notin U_\varepsilon(b)$ となり b は $\{a_n\}$ の極限値ではない. □

Definition 1.2.7. 数列 $\{a_n\}$ が コーシー (Cauchy) 列 である
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して $m, n \geq N$ ならば $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ となる.

コーシー列のことを 基本列 ということもある.

Lemma 1.2.8. 収束列はコーシー列である.

Proof. $\{a_n\}$ を収束列とし, $a \in \mathbb{R}$ をその極限値とする.

任意の $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $d(a_n, a) < \varepsilon/2$ となる. よって $m, n \geq N$ ならば

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となり $\{a_n\}$ はコーシー列である. □

Remark . 実は $\mathbb{R}$ においてはコーシー列は収束列となっている. このことは次節で述べる.

Lemma 1.2.9. コーシー列は有界 (すなわち集合として $\{a_n\}$ が有界) である.

Proof. $\{a_n\}$をコーシー列とするとある自然数Nが存在して$m, n \geq N$ならば$d(a_m, a_n) < 1$となる. (コーシー列の定義において$\varepsilon = 1$とする.) 特に$n \geq N$ならば$d(a_n, a_N) < 1$すなわち$\{a_n\}_{n \geq N} \subset U_1(a_N)$となり$\{a_n\}_{n \geq N}$は有界. 集合として

$$\{a_n\} = \{a_1, \dots, a_{N-1}\} \cup \{a_n\}_{n \geq N}$$

であり$\{a_1, \dots, a_{N-1}\}$は有限集合だから有界, よって$\{a_n\}$も有界.

具体的には$L = \min\{a_1, \dots, a_{N-1}, a_N - 1\}$, $M = \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, a_N + 1\}$とすれば, 任意の$n \in \mathbb{N}$について$L \leq a_n \leq M$となる. □

Corollary 1.2.10. 収束列は有界である. □

Definition 1.2.11. 自然数列$\{i_k\}$すなわち写像$i \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ i(k) = i_k$は任意の$k \in \mathbb{N}$に対し$i_k < i_{k+1}$となっているとき狭義単調増加自然数列とよばれる.

$\{a_n\}$を数列とする. aと狭義単調増加自然数列iとの合成によって得られる数列

$$a \circ i \colon \mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{R}$$

を$\{a_n\}$の部分列といって$\{a_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{a_{i_k}\}$等と表す.

Lemma 1.2.12. 収束列の部分列は収束列であり, もとの数列と同じ値に収束する.

またコーシー列の部分列はコーシー列である.

Proof. $\{i_k\}$が狭義増加自然数列であるとき任意の$k \in \mathbb{N}$について$i_k \geq k$であることが帰納法により容易に示せる.

$\{a_n\}$を収束列, その極限値をa, $\{a_{i_k}\}$を部分列とする. $a_n \to a$であるから任意の$\varepsilon > 0$に対しある自然数Nが存在して$n \geq N$ならば$d(a_n, a) < \varepsilon$となる. このNについて$k \geq N$ならば$i_k \geq k \geq N$であるから, $d(a_{i_k}, a) < \varepsilon$. すなわち$a_{i_k} \to a \quad (k \to \infty)$.

コーシー列の方も同様. □

exercise 10. コーシー列の場合について示せ.

このセクションのここまでの議論においては距離の性質しか用いていないことに注意. 以下では全順序体の性質も用いる.

Definition 1.2.13. 数列$\{a_n\}$は任意の$n \in \mathbb{N}$について$a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$)となっているとき(狭義)単調増加列とよばれる.

また任意の$n \in \mathbb{N}$について$a_n \geq a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$)となっているとき(狭義)単調減少列とよばれる.

これらをまとめて単調列という.

Lemma 1.2.14. $\{a_n\}$を単調増加列とする. $\lim_{n \to \infty} a_n, \sup a_n$のいずれかが存在すれば他方も存在してそれらは等しい.

単調減少列の極限値と下限についても同様.

Proof. $\{a_n\}$ が収束列でその極限値が a であるとき $a = \sup a_n$ を示す.

ある自然数 N について $a < a_N$ であるとすると $\varepsilon = a_N - a > 0$. $n \geq N$ ならば $a_n \geq a_N$ であるから $a_n - a \geq a_N - a = \varepsilon$. したがって $|a_n - a| \geq \varepsilon$ となり a が $\{a_n\}$ の極限値であることに反する. よって任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a \geq a_n$, すなわち a は $\{a_n\}$ の上界である.

$b < a$ とすると $\varepsilon = a - b > 0$. $a_n \to a$ だから $a_n \in U_\epsilon(a)$ となる $n \in N$ がある. $U_\varepsilon(a) = (b, a+\varepsilon)$ に注意すると, $a_n > b$.

よって Proposition1.1.9 より $a = \sup a_n$ である.

逆に $\sup a_n$ が存在するとしてそれを a とする.

a は $\{a_n\}$ の上界であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a \geq a_n$ である.

また任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $a-\varepsilon < a$ であるから, ある自然数 N が存在して $a_N > a-\varepsilon$ となる (Proposition 1.1.9). $\{a_n\}$ は単調増加であるから $n \geq N$ ならば $a_n \geq a_N$.

以上をあわせると, $n \geq N$ ならば $a - \varepsilon < a_n \leq a$, 特に $a_n \in U_\varepsilon(a)$. 従って数列 $\{a_n\}$ は a に収束する. □

Proposition 1.2.15. 二つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がともに収束列ならば $\{a_n + b_n\}, \{a_n b_n\}$ も収束列で

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n)$

さらに $b_n \neq 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ならば $\{a_n/b_n\}$ も収束列で

(iii)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$$

□

Proposition 1.2.16. $\{a_n\}, \{b_n\}$ を収束列, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$ とする. $\{c_n\}$ を数列とする.

(i) 任意の自然数 N に対して $n_N \geq N$ となる自然数 n_N が存在して $a_{n_N} \leq b_{n_N}$ となるならば $a \leq b$ である.

(ii) (はさみうち) $a = b$ とする. ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $a_n \leq c_n \leq b_n$ であるとすると $\{c_n\}$ も収束して $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ である.

Proof. (i) $a > b$ とすると $\varepsilon = a - b$ とおけば $\varepsilon > 0$. 仮定からどんな自然数 N に対してもある $n_N \geq N$ である自然数 n_N が存在して $a_{n_N} \leq b_{n_N}$ となる. すなわち $a_{n_N} - b_{n_N} \leq 0$ となり $a_{n_N} - b_{n_N} \notin U_\varepsilon(a-b) = (0, 2a-2b)$. これは $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$ に矛盾する.

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ であるから, 任意の正の数 ε に対してある自然数 N_0 が存在して $n \geq N_0$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$ となる. 特に $a-\varepsilon < a_n, b_n < a+\varepsilon$. ゆえに $n \geq \max\{N, N_0\}$ ならば $a-\varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a+\varepsilon$ すなわち $c_n \in U_\varepsilon(a)$. □

1.3　連続性の公理

ここまでの議論は全順序体において成立するものであった. 例えば有理数の全体 $\mathbb{Q}$ は全順序体であるからこれまでの議論は $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ に,「実数」を「有理数」と置き換えても成立する.

実数を特徴づけるのが連続性の公理である. 連続性の公理としてよく採用されるものとしてデデキントによるものとカントールによるものがある. ここではカントールによるものを採用しデデキントの公理にはふれない.

実数は次の性質をみたす.

C. 連続性の公理

(i) (カントール) $\mathbb{R}$ においてはコーシー列は収束列である.

(ii) (アルキメデス) 任意の正の実数 a, b に対してある自然数 n が存在して $na > b$ となる.

(i) の性質を $\mathbb{R}$ は距離に関して完備 (complete) であるという. 数列の収束の定義には極限値がふくまれている. すなわち定義からある数列が収束するかどうかを判定するためには極限値を知らなければならない. しかしそれがコーシー列であるかどうかは数列のみからわかる. $\mathbb{R}$ は完備であるのでコーシー列は収束する. したがってコーシー列かどうかで収束性を判定することが出来る.

Remark . (ii) の性質は $\mathbb{Q}$ においてもみたされている.

C(ii) から次が導かれる.

Lemma 1.3.1. 任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 n が存在して $1/n < \varepsilon$ となる.

Proof. C(ii) において $a = \varepsilon, b = 1$ とするとある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $n\varepsilon > 1$ となることがわかる. $n > 0$ であるから求める結果をえる. □

Corollary 1.3.2.

(i)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

(ii)
$$|a| < 1 \text{ ならば } \lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Proof. (i) は Lemma 1.3.1 よりすぐわかる.

(ii) $a = 0$ のときは明らかなので $a \neq 0$ とする. $1/|a| > 1$ であるから $1/|a| = 1 + h$ とおくと $h > 0$.

$$(1+h)^n = \sum_{j=0}^{n} {}_nC_j h^j \geq nh > 0$$

であるから

$$(1+h)^{-n} \leq \frac{1}{nh}$$

$$0 < |a|^n = (1+h)^{-n} \leq \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n} \to 0.$$

Prop. 1.2.16 より $|a|^n \to 0$. □

exercise - 問題集 . 55 (3)(4)

以下, 連続性の公理からみちびかれる性質をいくつかみていく.

Theorem 1.3.3.

(i) $\mathbb{R}$ の空でない部分集合が上に有界ならば上限が存在する.

(ii) $\mathbb{R}$ の空でない部分集合が下に有界ならば下限が存在する.

また (i) と (ii) は同値である.

Proof. (i) $A \subset \mathbb{R}$ を上に有界な空でない部分集合とする. $a \in A$ をひとつとる. $a \in U_A$ であれば $a \in A \cap U_A$ すなわち $a = \max A$ であるので Prop 1.1.10 より a は A の上限となる.

$a \notin U_A$ の場合を考える. U_A を A の上界全体, $b \in U_A$ とする.

２つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を帰納的に以下のように定める. $a_1 = a$, $b_1 = b$ とする. a_n, b_n まで決まったとして, a_{n+1}, b_{n+1} を

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (\frac{a_n+b_n}{2}, b_n), & \frac{a_n+b_n}{2} \notin U_A \\ (a_n, \frac{a_n+b_n}{2}), & \frac{a_n+b_n}{2} \in U_A \end{cases}$$

で定める. $a_1 = a < b = b_1$ と $a_1 = a \notin U_A$, $b_1 = b \in U_A$ であることに注意すると帰納的に $\{a_n\}$ は単調増加, $a_n \notin U_A$, $\{b_n\}$ は単調減少, $b_n \in U_A$, $a_n < b_n$, $b_n - a_n = (b-a)/2^{n-1}$ であることがわかる.

$m \geq n$ ならば $a_n \leq a_m < b_m \leq b_n$ なので

$$|a_m - a_n| = a_m - a_n < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

$$|b_m - b_n| = b_n - b_m < b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

となり Cor. 1.3.2 より $(b-a)/2^{n-1} \to 0$ であるから $\{a_n\}, \{b_n\}$ はコーシー列であることがわかる. (ここで C(ii) を用いている.)

従って C(i) により $\{a_n\}, \{b_n\}$ は収束列であり $b_n - a_n \to 0$ であるからその極限値は等しい. この極限値を α とする. $\alpha = \sup A$ であることを示す.

$x \in A$ とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について b_n は A の上界であるから $b_n \geq x$. $b_n \to \alpha$ であるから Prop. 1.2.16 より $x \leq \alpha$. すなわち α は A の上界である.

s を A の上界とする. 任意の $n \in N$ について a_n は A の上界ではないので $a_n < s$ である. (実際 $a_n \geq s$ ならば明らかに a_n は A の上界. よって $a_n \not\geq s$. $\mathbb{R}$ の順序は全順序である.) $a_n \to \alpha$ であるから $\alpha \leq s$

従って α は A の上界の最小値すなわち A の上限である.

(i) と (ii) が同値であることは次の練習問題からわかる. □

exercise 11. $\inf A = -\sup\{-x \mid x \in A\}$ を示せ.

Theorem 1.3.4.

(i) 上に有界な単調増加数列は収束列である.

(ii) 下に有界な単調減少列は収束列である.

また (i) と (ii) は同値である.

Proof. (i) と (ii) が成り立つことは Thm. 1.3.3 と Lem. 1.2.14 より明らか. また (i) と (ii) が同値であることは数列 $\{a_n\}$ と $\{-a_n\}$ を考えれば明らか. □

Theorem 1.3.5. $\mathbb{R}$ の有界な閉区間 (空でない) の列 $I_1, I_2, \ldots$ があって $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ ならば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

Proof. $I_n = [a_n, b_n]$ とすると $I_n \supset I_{n+1}$ であるから $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ となる. よって数列 $\{a_n\}$ は単調増加で, 上界 b_1 を持つので上に有界, 数列 $\{b_n\}$ は単調減少で, 下界 a_1 を持つので下に有界. Thm. 1.3.4 より $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに収束する. 極限値をそれぞれ a, b とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq b_n$ であるから $a \leq b$, とくに $[a, b] \neq \emptyset$ である. また Lem. 1.2.14 より $a = \sup a_n$, $b = \inf b_n$ であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq a$, $b \leq b_n$ すなわち $I_n \supset [a, b]$. 従って

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \supset [a, b] \neq \emptyset.$$

実はこのとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$$

となっていることがわかる．なぜなら任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq c \leq b_n$ ならば $a = \sup a_n \leq c \leq \inf b_n = b$, よって

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset [a, b].$$

$\square$

Corollary 1.3.6. 上と同様で $b_n - a_n \to 0$ ならば共通部分はただ一点

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{a\}$$

であり $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Proof. $\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$ $\square$

Cor. 1.2.10 で収束列は有界であることを示した．もちろん逆は成り立たない, つまり有界な数列ならば収束列であるということはいえない．しかし次のことが成立する．

Theorem 1.3.7 (ボルツァノ・ワイエルシュトラス, Bolzano-Weierstrass). 有界な数列は収束する部分列を含む.

Proof. $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ を有界な数列とすると, ある実数 M, m が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $m \leq a_n \leq M$ となる．$I = [m, M]$ とおけば $a(\mathbb{N}) \subset I$. I を中点で二分してえられる閉区間 $[m, \frac{m+M}{2}]$, $[\frac{m+M}{2}, M]$ を考える．

$$\mathbb{N} = a^{-1}(I) = a^{-1}([m, \frac{m+M}{2}]) \cup a^{-1}([\frac{m+M}{2}, M])$$

であるから $a^{-1}([m, \frac{m+M}{2}])$, $a^{-1}([\frac{m+M}{2}, M])$ の少なくとも一方は無限集合．無限集合である方を $I_1 = [m_1, M_1]$ とする．

$$I \supset I_1, \quad M_1 - m_1 = \frac{M-m}{2}.$$

以下この操作を繰り返して帰納的に閉区間の列 $I_k = [m_k, M_k]$ で

$$I_k \supset I_{k+1}, \quad M_k - m_k = \frac{M-m}{2^k}, \quad \sharp a^{-1}(I_k) = \infty$$

となるものがえられる．$M_k - m_k \to 0$ $(k \to \infty)$ であるから (ここで C(ii) を用いていることに注意) Cor. 1.3.6 よりある実数 a が存在して

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_n = \{a\}, \quad \lim_{k\to\infty} m_k = \lim_{k\to\infty} M_k = a$$

となる．

自然数列 $i\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を帰納的に以下のように定義する．

$i(1) = \min(a^{-1}(I_1))$ とおく．$i(k-1)$ まで定義されたとして

$$i(k) = \min(a^{-1}(I_k) \setminus \{i(1), \ldots, i(k-1)\})$$

とおく．$a^{-1}(I_k)$ は無限集合であるから $a^{-1}(I_k) \setminus \{i(1), \ldots, i(k-1)\} \neq \emptyset$ となりこの最小値は存在する．$I_k \subset I_{k-1}$ であるから

$$\begin{aligned} i(k) \in a^{-1}(I_k) \setminus \{i(1), \ldots, i(k-1)\} \subset & a^{-1}(I_{k-1}) \setminus \{i(1), \ldots, i(k-1)\} \\ & \subset a^{-1}(I_{k-1}) \setminus \{i(1), \ldots, i(k-2)\} \end{aligned}$$

であり，

$$i(k-1) = \min(a^{-1}(I_k) \setminus \{i(1), \ldots, i(k-2)\})$$

ゆえ $i(k) \geq i(k-1)$ かつ $i(k) \neq i(k-1)$．すなわち $i(k) > i(k-1)$．よって i は狭義単調増加自然数列となり i と a の合成によって $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{i(k)}\}$ がえられる．$i(k) \in a^{-1}(I_k)$ なので $a_{i(k)} \in I_k$ すなわち $m_k \leq a_{i(k)} \leq M_k$ である．$m_k \to a$ かつ $M_k \to a$ であるから $\{a_{i(k)}\}$ は収束列である． □

参考

ここまでを見直してみると $\mathbb{R}$ が全順序体であるという前提の下で C ⇒ Thm.1.3.3 ⇒ Thm.1.3.4 ⇒ Cor.1.3.6.

Cor.1.3.6 & C(ii) ⇒ Thm.1.3.7

という流れで証明されている．実は全順序体においてはこれらの条件 C, Thm.1.3.3, Thm.1.3.4, Thm.1.3.7 および Cor.1.3.6 & C(ii) は同値となる．これを示すためには Thm.1.3.4 ⇒ C(ii) および Thm.1.3.7 ⇒ C を示せばよい．以下これを示そう．

Proposition 1.3.8. Thm.1.3.4 を仮定すると C(ii) が成り立つ．

Proof. $a, b > 0$ とする．背理法で示そう．$na > b$ となる自然数 n が存在しないとする．数列 $\{na\}$ を考える．仮定は任意の自然数 n に対し $na \leq b$ ということなので，$\{na\}$ は上に有界である．また $(n+1)a - na = a > 0$ ゆえ単調増加．したがって Thm.1.3.4 からこれは収束列である．極限値を α とする．$a > 0$ であるから，ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $na \in U_a(\alpha)$ となる．とくに $\alpha - a < Na$ であるから $\alpha + a < Na + 2a = (N+2)a$ となり，$(N+2)a \notin U_a(\alpha)$ となって矛盾． □

Proposition 1.3.9. Thm.1.3.7 を仮定すると C が成り立つ．

Proof. C(i) $\{a_n\}$ をコーシー列とする．Lem.1.2.9 により $\{a_n\}$ は有界である．従って Thm.1.3.7 により $\{a_n\}$ は収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ を含む．その極限値を a とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 K が存在して $k \geq K$ ならば $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ となる．また $\{a_n\}$

はコーシー列であるから, ある自然数 N が存在して $m,n \geq N$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon$ となる. $k \geq K$ かつ $n_k \geq N$ となる $k \in \mathbb{N}$ をひとつ固定する. $n \geq N$ ならば

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となる. 従って a は $\{a_n\}$ の極限値であり $\{a_n\}$ は収束列である.

C(ii) $na > 0$ に注意すれば, 背理法を用いて Prop.1.3.8 と同様に示される. □

以上により全順序体においては, これら 5 つの条件は同値であることがわかった. この他にも同値な条件はいろいろ知られている. デデキントの切断の公理もこれらと同値である (cf. [3]).

また連続性の公理をみたす全順序体は本質的にひとつしかない (全て同型である) ことが知られている (cf. [4]).

1.4　上極限・下極限

Definition 1.4.1. $\{a_n\}$ を数列とする.

(i) $\{a_n\}$ が上に有界のとき.

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\{a_i | i \geq n\}$ も上に有界であるから上限 $\overline{a}_n := \sup\{a_i | i \geq n\}$ が存在する. この数列 $\{\overline{a}_n\}$ の下限を数列 $\{a_n\}$ の <u>上極限</u> といい, $\limsup a_n$ あるいは $\overline{\lim}\, a_n$ と書く. すなわち

$$\limsup a_n = \inf\{\overline{a}_n\} = \inf\left\{\sup\{a_i | i \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$\{a_n\}$ が上に有界でないとき.

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\overline{a}_n = \sup\{a_i | i \geq n\} = +\infty$ となる. なぜなら, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し $\overline{a}_n < \infty$ とすると $i \geq n$ ならば $a_i \leq \overline{a}_n$ であるから

$$\{a_n\} = \{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \cup \{a_i | i \geq n\}$$

は上に有界.

このとき $\limsup a_n = +\infty$ と定める.

(ii) $\{a_n\}$ が下に有界のとき.

数列 $\{\underline{a}_n\}$ を $\underline{a}_n := \inf\{a_i | i \geq n\}$ で定め, この数列の上限を数列 $\{a_n\}$ の <u>下極限</u> といい, $\liminf a_n$ あるいは $\underline{\lim}\, a_n$ と書く. すなわち

$$\liminf a_n = \sup\{\underline{a}_n\} = \sup\left\{\inf\{a_i | i \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$\{a_n\}$ が下に有界でないとき.

$\liminf a_n = -\infty$ と定める.

明らかに任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n$ であることに注意する.

Proposition 1.4.2. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界のとき, $\{\overline{a}_n\}$ は単調減少列であり $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \limsup a_n$ である.

数列 $\{a_n\}$ が下に有界のとき, $\{\underline{a}_n\}$ は単調増加列であり $\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \liminf a_n$ である.

Proof. 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\{a_i | i \in \mathbb{N}\} \supset \{a_i | i \geq n\} \supset \{a_i | i \geq n+1\}$$

であることに注意すると, $\{a_n\}$ が上に有界, すなわちある実数 M が存在して任意の $i \in \mathbb{N}$ について $a_i \leq M$ であれば, $M \geq \overline{a}_n \geq \overline{a}_{n+1}$ となる. よって $\{\overline{a}_n\}$ は単調減少列である.

$\{\overline{a}_n\}$ が下に有界であれば Thm 1.3.4 により $\{\overline{a}_n\}$ は収束列であり Prop 1.2.14 によりその極限値は $\inf\{\overline{a}_n\}$ に等しい. すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \inf\{\overline{a}_n\} = \limsup a_n.$$

$\{\overline{a}_n\}$ が下に有界でないとすると任意の $K \in \mathbb{R}$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\overline{a}_N < K$ となる. $\{\overline{a}_n\}$ は単調減少だから $n \geq N$ ならば $\overline{a}_n \leq \overline{a}_N < K$ となり $\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = -\infty$ である. $\{\overline{a}_n\}$ は下に有界でないので $\inf\{\overline{a}_n\} = -\infty$. したがって

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = -\infty = \inf\{\overline{a}_n\} = \limsup a_n.$$

下極限についても同様. □

Remark. $\{a_n\}$ が上に有界 $\Leftrightarrow \limsup a_n \neq \infty$, 下に有界 $\Leftrightarrow \liminf a_n \neq -\infty$ となっている.

Proposition 1.4.3. $\{a_n\}$ を数列, $a \in \mathbb{R}$ または $a = \pm\infty$ とする. このとき次が成り立つ.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = a.$$

Proof. $a \in \mathbb{R}$ とする.

$\Leftarrow$)

$\limsup a_n = \liminf a_n = a \in \mathbb{R}$ であるから $\{a_n\}$ は有界である. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n$ であり, Prop 1.4.2 より $\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \liminf a_n = a = \limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$ なので, はさみうちにより $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

$\Rightarrow$)

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, すなわち $\{a_n\}$ は収束列であるから有界である. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\underline{a}_n \leq a_n \leq \overline{a}_n$ だから, Prop 1.4.2 より

$$\sup\{\underline{a}_n\} = \liminf a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n \leq a \leq \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n = \limsup a_n = \inf\{\overline{a}_n\}$$

となる. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ であるからある自然数 n が存在して $i \geq n$ ならば $a - \varepsilon/2 < a_i < a + \varepsilon/2$ となる. したがって

$$a - \varepsilon < a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf\{a_i | i \geq n\} = \underline{a}_n.$$

すなわち $a \geq \sup\{\underline{a}_n\}$ かつ任意の $\varepsilon > 0$ に対し $a - \varepsilon < \underline{a}_n$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する. よって $a = \sup\{\underline{a}\} = \liminf a_n$. 同様に $a = \limsup a_n$.

$a = +\infty$ のとき.

$\Leftarrow$)

$\liminf a_n \neq -\infty$ であるから $\{a_n\}$ は下に有界である. したがって先の Prop より $\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = \liminf a_n = +\infty$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\underline{a}_n \leq a_n$ であるから $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

$\Rightarrow$)

$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ であるから $\{a_n\}$ は下に有界であり上に有界ではない. 上に有界でないので $\limsup a_n = +\infty$ である. また $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ であるから, 任意の $K \in \mathbb{R}$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $i \geq N$ ならば $a_i > K$ となる. このとき $n \geq N$ ならば $\underline{a}_n \geq \underline{a}_N = \inf\{a_i | i \geq N\} \geq K$ であるから $\lim_{n\to\infty} \underline{a}_n = +\infty$.

$a = -\infty$ のときも同様. □

exercise - 問題集 . 数列が有界の場合のみでよい.

59 (1),(2) 62 (1)〜(4),(5)*, 64 (1)〜(4), 65 (1)〜(4),

プリントミスがあるので注意

66 (1),(2), 67 (1)(2)(ヒント (1) と 56(4) を使う)(3)

第2章　距離空間

2.1　距離

Definition 2.1.1. X を集合とする.

$X \times X$ 上定義された実数値関数

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

が次の 3 つの条件をみたすとき X 上の 距離関数 という.

D1 (i) 任意の $x, y \in X$ について $d(x, y) \geq 0$.

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

D2 任意の $x, y \in X$ について $d(x, y) = d(y, x)$.

D3 (三角不等式) 任意の $x, y, z \in X$ について $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Definition 2.1.2. 集合 X とその上の距離関数 d が与えられたとき, 組 (X, d) を 距離空間 という.

また $x, y \in X$ に対し実数 $d(x, y)$ を x と y の 距離 という.

混乱のおそれがないときは d を省略して単に距離空間 X と書くことが多い.

Definition 2.1.3. X を距離空間とする. $x \in X$, $\varepsilon > 0$ に対し次で定義される X の部分集合

$$\mathrm{U}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

を x を中心とする半径 ε の 開球 (open ball), 開円盤 (open disc) あるいは ε近傍 という.

また

$$\mathrm{S}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$$

を x を中心とする半径 ε の 球面 (sphere) という.

exercise - 問題集 . 68(1)(2), 69(1)(2), 71(1), 76, 80(1)(2)

Example 2.1.4 (n 次元ユークリッド空間, n-dimensional Euclidian space). $\mathbb{R}$ の n 個の直積

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$

の 2 点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ に対し x と y の距離 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

で定めると d は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.

Proof. D1 明らかに $d(x, y) \geq 0$ であり, $x = y$ ならば $d(x, y) = 0$ である.

$d(x, y) = 0$ とすると,

$$0 \leq (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 0$$

であるから $x_i - y_i = 0$. よって $x = y$.

D2 明らか.

D3 $\mathbb{R}^n$ の 3 点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ に対し $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$ とおく. $x_i - z_i = x_i - y_i + y_i - z_i = a_i + b_i$ であるから

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}, \quad d(y, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}, \quad d(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$$

となる.

$$\begin{aligned}(d(x, y) + d(y, z))^2 - d(x, z)^2 &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} - \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \\ &= 2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) \geq 0.\end{aligned}$$

ここで最後の不等号は次に示す Schwartz の不等式をもちいた. $d(x, y)$, $d(y, z)$ はともに非負であるから $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ となる. □

Lemma 2.1.5 (Schwartz の不等式). a_i, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ を実数とすると次の不等式が成立する.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Proof. $\sum b_i^2 = 0$ ならば全ての i について $b_i = 0$ であるので両辺ともに 0 となり成立する.

$\sum b_i^2 \neq 0$ とする. 任意の実数 t に対して

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i + t b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + t^2 (\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$$

であり, $\sum b_i^2 > 0$ であるから, 判別式を考えると

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leq 0$$

となる. □

この距離をユークリッドの距離といい, $\mathbb{R}^n$ にこの距離を与えて得られる距離空間を n 次元ユークリッド空間という.

$n = 1$ のとき

$$d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$$

$$\mathrm{U}_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

$$\mathrm{S}_\varepsilon(x) = \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}$$

$n = 2$ のとき

$$\mathrm{U}_\varepsilon((x_0, y_0)) = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

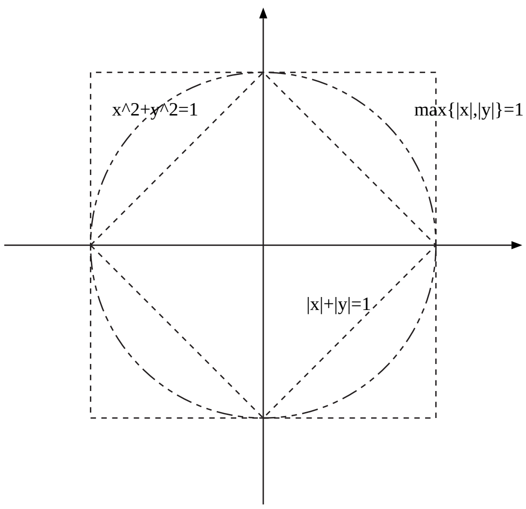

図 2.1: $\mathrm{U}_1((0,0))$, Ex 2.1.7, 2.1.8 参照

Example 2.1.6.

$$\mathbb{R}^\infty := \left\{ (x_1, x_2, \dots) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$$

とする. すなわち $\mathbb{R}^\infty$ の元は実数列 $\{x_i\}$ であって級数 $\sum x_i^2$ が収束するもの.

$x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ に対し

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

で定まる関数は $\mathbb{R}^\infty$ 上の距離関数である.
($\mathbb{R}^\infty$ を l_2 と書くことも多い.)

Proof. まず $d(x,y)$ が well-defined すなわち級数 $\sum(x_i - y_i)^2$ が収束することを示そう.
$s_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2$ とおく. $\{s_n\}$ は単調増加である. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の 3 点 $(x_1, \dots, x_n), (0, \dots, 0), (y_1, \dots, y_n)$ に対する三角不等式から

$$0 \le s_n = (\sqrt{s_n})^2 \le \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right)^2 < \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2}\right)^2$$

であるから $\{s_n\}$ は有界である. よって収束する.
これが D1, D2 をみたすことはあきらかである. 三角不等式をみたすことは上と同様に n 次元ユークリッド空間における三角不等式を考えてその極限をとることで示すことが出来る. □

exercise 12. 上の三角不等式を示せ.

Example 2.1.7. $\mathbb{R}^n$ において

$$d(x,y) = \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i|$$

を考えると $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.

Proof. D1, D2 は明らか.

$$\begin{aligned} d(x,y) + d(y,z) &= \max_i |x_i - y_i| + \max_i |y_i - z_i| \\ &\ge |x_j - y_j| + |y_j - z_j| \ge |x_j - z_j| \end{aligned}$$

が任意の $1 \le j \le n$ について成り立つので

$$d(x,y) + d(y,z) \ge \max_i |x_i - y_i| = d(x,z).$$

□

$n = 2$ のとき $\mathrm{U}_\varepsilon((0,0)) = \{(x_1, x_2) | \max |x_i| < \varepsilon\}$ (図 2.1).

Example 2.1.8. $\mathbb{R}^n$ において

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

は距離関数である.

Proof. D1, D2 は明らか.

$$\begin{aligned}
d(x,y)+d(y,z) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i| \\
&= \sum_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|+|y_i-z_i|) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i| = d(x,z).
\end{aligned}$$

□

$n=2$ のとき $\mathrm{U}_\varepsilon((0,0))=\{(x_1,x_2)||x_1|+|x_2|<\varepsilon\}$ (図 2.1).

Example 2.1.9. X を集合とする. 関数 $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ を

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

で定めると d は X 上の距離関数になる. (問題集 71(1) 参照.)

(X,d) を <u>離散距離空間</u> という.

$$\mathrm{U}_\varepsilon(x)=\begin{cases}\{x\}, & \varepsilon\leq 1\\ X, & \varepsilon>1\end{cases}$$

$$\mathrm{S}_\varepsilon(x)=\begin{cases}\emptyset, & \varepsilon\neq 1\\ X-\{x\}, & \varepsilon=1\end{cases}$$

Example 2.1.10 (p 進距離). p を素数とする. $l\in\mathbb{Z}$ に対し

$$v_p(l)=\begin{cases}\max\{n\mid n\in\mathbb{Z},\ p^n|l\}, & l\neq 0\\ \infty, & l=0\end{cases}$$

とおく. $l\neq 0$ のとき $v_p(l)$ は $p^n|l$, $p^{n+1}\nmid l$ となるような $n\in\mathbb{Z}$ である. すなわち l を素因数分解したときの p の重複度.

$d_p\colon\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ を

$$d_p(l,m)=\exp(-v_p(l-m))$$

で定める. ただし $\exp(-\infty)=0$ と約束する. d_p は $\mathbb{Z}$ 上の距離関数である. この距離を p 進距離という.

Proof. D1, D2 は明らか. D3 を示そう. まず

$$v_p(l+m) \geq \min\{v_p(l), v_p(m)\}$$

であることに注意する. なぜなら l が p^n で, m が p^k で割れれば $l+m$ は $p^{\min\{n,k\}}$ で割れるから. $\exp(-x)$ は x に関して単調減少であることに注意すれば

$$\begin{aligned} d_p(k,l)+d_p(l,m) &= \exp(-v_p(k-l))+\exp(-v_p(l-m)) \\ &\geq \max\{\exp(-v_p(k-l)), \exp(-v_p(l-m))\}(\text{どちらも非負だから}) \\ &= \exp(-\min\{v_p(k-l), v_p(l-m)\}) \\ &\geq \exp(-v_p(k-l+l-m)) = d_p(k,m). \end{aligned}$$

□

参考. この距離は $\mathbb{Q}$ に拡張できる. 写像 $v_p\colon \mathbb{Q}\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$ を以下のように定義する. 任意の 0 でない有理数 r は $r = p^n s/t$, ($n, s, t \in \mathbb{Z}$, s, t は p で割れない) と表せ, この n は r により一意に定まる. $v_p(r) = n$ とする. また $v_p(0) = \infty$ と定める (p 進付値).

$d_p\colon \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を

$$d_p(l,m) = \exp(-v_p(l-m))$$

で定める. ただし $\exp(-\infty) = 0$ と約束する. d_p は $\mathbb{Q}$ 上の距離関数である. この距離を p 進距離という.

Proof. D1, D2 は明らか. D3 を示そう. まず

$$v_p(l+m) \geq \min\{v_p(l), v_p(m)\}$$

であることに注意する. 実際 $l = p^n s/t$, $m = p^k u/v$ で $s, t, u, v \in \mathbb{Z}$ は p で割れないとする. $n \leq k$ として一般性を失わない.

$$\begin{aligned} l+m &= p^n\frac{s}{t}+p^k\frac{u}{v} \\ &= p^n\left(\frac{s}{t}+p^{k-n}\frac{u}{v}\right) \\ &= p^n\frac{vs+p^{k-n}u}{tv} \end{aligned}$$

であるが $vs+p^{k-n}u \in \mathbb{Z}$ なので $vs+p^{k-n}u = p^e w$ と書ける, ただし $e, w \in \mathbb{Z}$, $e \geq 0$, w は p で割れない. したがって $l+m = p^{n+e}w/tv$ となり, tv は p で割れないことに注意すれば $v_p(l+m) = n+e \geq n$ であることがわかる.

$\exp(-x)$ は x に関して単調減少であることに注意すれば

$$\begin{aligned} d_p(k,l)+d_p(l,m) &= \exp(-v_p(k-l))+\exp(-v_p(l-m)) \\ &\geq \max\{\exp(-v_p(k-l)), \exp(-v_p(l-m))\}(\text{どちらも非負だから}) \\ &= \exp(-\min\{v_p(k-l), v_p(l-m)\}) \\ &\geq \exp(-v_p(k-l+l-m)) = d_p(k,m). \end{aligned}$$

□

Example 2.1.11. (X_1, d_1), (X_2, d_2) を距離空間とする. (x_1, x_2), $(x_1', x_2') \in X_1 \times X_2$ に対して

(i) $\sqrt{d_1(x_1, x_1')^2 + d_2(x_2, x_2')^2}$

(ii) $\max\{d_1(x_1, x_1'), d_2(x_2, x_2')\}$

(iii) $d_1(x_1, x_1') + d_2(x_2, x_2')$

で定まる関数はいずれも $X_1 \times X_2$ 上の距離関数である.

Example 2.1.12. 上の例は有限個の距離空間の直積に拡張出来る. (X_i, d_i) $(i = 1, \ldots, n)$ を距離空間とすると $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1', \ldots, x_n') \in X_1 \times \cdots \times X_n$ に対して

(i) $\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i')^2}$

(ii) $\max\{d_1(x_1, x_1'), \ldots, d_n(x_n, x_n')\}$

(iii) $\sum_{i=1}^n d_i(x_i, x_i')$

で定まる関数はいずれも $X_1 \times \cdots \times X_n$ 上の距離関数である.

exercise 13. 上の (i)(ii)(iii) が距離関数であることを示せ.

Definition 2.1.13. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ をその空でない部分集合とする. このとき

$$\delta(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

を A の 直径 (diameter) という.

(空集合については必要なら $\delta(\emptyset) = -\infty$ と考える.)

$\delta(A) < +\infty$ であるとき A は 有界 (bounded) であるという.

Example 2.1.14. ユークリッド空間の点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ を中心とする半径 $r(> 0)$ の開球 $\mathrm{U}_r(x)$ の直径は $2r$ である.

Proof. 任意の 2 点 $y, z \in \mathrm{U}_r(x)$ について

$$0 \leq d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < r + r = 2r.$$

したがって $0 \leq \delta(\mathrm{U}_r(x)) \leq 2r$ である.

任意の正の数 $\varepsilon \leq 2r$ に対し $\mathbb{R}^n$ の 2 点

$$x_\pm = (x_1 \pm (r - \frac{\varepsilon}{4}), x_2, \ldots, x_n)$$

を考えると $d(x_\pm, x) = r - \varepsilon/4$ だから $x_\pm \in \mathrm{U}_r(x)$. $d(x_+, x_-) = 2r - \varepsilon/2 > 2r - \varepsilon$. よって $\delta(\mathrm{U}_r(x)) = 2r$. $\square$

Remark . 一般の距離空間において $\delta(\mathrm{U}_r(x)) \leq 2r$ であることが上の証明の前半よりわかるが, 等号は必ずしも成立するとはかぎらない.

exercise 14. 上で等号が成立しない, すなわち $\delta(\mathrm{U}_r(x)) < 2r$ となる例を挙げよ.

Lemma 2.1.15. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ をその空でない部分集合とする. このとき A は有界. $\Leftrightarrow$ 任意の点 $x \in X$ に対し, ある $r > 0$ が存在して $A \subset \mathrm{U}_r(x)$ となる.

Proof. $\Rightarrow$) $\delta(A) = s$, $x \in X$ とする. $a \in A$ をひとつ固定する. $r = s + d(x, a) + 1$ とすると, 任意の $a' \in A$ に対し

$$d(x, a') \leq d(x, a) + d(a, a') \leq d(x, a) + s < r$$

だから $a' \in \mathrm{U}_r(x)$. よって $A \subset \mathrm{U}_r(x)$.

$\Leftarrow$) $A \subset \mathrm{U}_r(x)$ ならば $\delta(A) \leq \delta(\mathrm{U}_r(x)) \leq 2r$. □

Definition 2.1.16. (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ をその空でない部分集合とする. このとき

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

を $\underline{A \text{ と } B \text{ の距離}}$ という.

特に A が 1 点 $x \in X$ からなる集合 $A = \{x\}$ であるときは $d(\{x\}, B)$ を $d(x, B)$ と書いて, ($\{x\}$ と B の距離といわずに) x と B の距離という.

$$d(x, B) = \inf\{d(x, b) \mid b \in B\}$$

である.

あきらかに $A \cap B \neq \emptyset$ ならば $d(A, B) = 0$ であるが, 逆は一般には正しくない.

Example 2.1.17. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A, B を次のように定義する.

$$A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \left\{ \left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x > 0 \right\}$$

このとき任意の正の数 x に対し

$$d(A, B) \leq d\left((x, 0), \left(x, \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}$$

であるから $d(A, B) = 0$ であるが, $A \cap B = \emptyset$.

exercise 15. $r \in \mathbb{R}$ とする. 任意の正の数 ε に対し $r \leq \varepsilon$ であれば $r \leq 0$ であることを示せ.

2.2 開集合, 閉集合, 距離の定める位相

Definition 2.2.1. (X, d) を距離空間, $O \subset X$ を部分集合とする. このとき

O が X の 開集合 (open set) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x \in O$ に対し, ある正の数 $\varepsilon > 0$ が存在して $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O$ となる.

X の開集合全体からなる $\mathcal{P}(X)$ の部分集合

$$\mathcal{O} = \{O \mid O \text{ は } X \text{ の開集合}\}$$

を考える. $\mathcal{O}$ を 距離 d の定める位相 (topology) という.

Theorem 2.2.2. (X, d) を距離空間, $\mathcal{O}$ を距離 d の定める位相とすると次が成り立つ.

O1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$.

O2) $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

O3) $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

Proof. O1) $X \in \mathcal{O}$ はあきらか. $\emptyset$ については $x \in \emptyset$ となる点 x が存在しないので開集合である.

O2) $x \in O_1 \cap O_2$ とすると, $i = 1, 2$ について, $x \in O_i$ で, O_i は開集合だから, ある正数 ε_i が存在して $\mathrm{U}_{\varepsilon_i}(x) \subset O_i$ となる. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと, $\varepsilon > 0$ であり $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset \mathrm{U}_{\varepsilon_i}(x)$ であるから, $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O_1 \cap O_2$. よって $O_1 \cap O_2$ は開集合.

O3) $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ とすると, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $x \in O_{\lambda_0}$. O_{λ_0} は開集合であるから, ある正の数 ε が存在して $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O_{\lambda_0}$ となる. $O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ であるから $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ となり $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ は開集合である.

□

Remark . 上のことから距離空間において「距離の定める位相」は 位相 であることがわかる. すなわち距離空間 X における開集合の全体は X に位相を定める.

Remark . O2 から帰納法により, 有限個の開集合の共通部分は開集合となることがわかるが, 無限個では一般にはそうではない. (次の exercise 参照.)

exercise - 問題集 . 75(1)

Example 2.2.3. 開球 $\mathrm{U}_r(x)$ は開集合, とくに 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の開区間 (a, b) は開集合.

Proof. $y \in \mathrm{U}_r(x)$ とする. $d(x,y) < r$ であるから $\varepsilon = r - d(x,y)$ とおくと $\varepsilon > 0$ である. $\mathrm{U}_\varepsilon(y) \subset \mathrm{U}_r(x)$ を示そう.

$z \in \mathrm{U}_\varepsilon(y)$ とすると $d(y,z) < \varepsilon$ であるから

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ &< d(x,y) + \varepsilon \\ &= d(x,y) + r - d(x,y) = r \end{aligned}$$

となり $z \in \mathrm{U}_r(x)$ である. よって $\mathrm{U}_\varepsilon(y) \subset \mathrm{U}_r(x)$. したがって $\mathrm{U}_r(x)$ は開集合.

1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において開区間 (a,b) は $(a+b)/2$ を中心とする半径 $(b-a)/2$ の開球であるから開集合である. □

Theorem 2.2.4. O が開集合 $\Leftrightarrow$ O は開球の和集合.

Proof. $\Leftarrow$) 上で見たように開球は開集合であるから Thm 2.2.2 O3 よりその和集合は開集合.

$\Rightarrow$) O を開集合とすると, 任意の $x \in O$ についてある正数 ε_x が存在して $\mathrm{U}_{\varepsilon_x}(x) \subset O$ となる. したがって

$$O \subset \bigcup_{x \in O} \mathrm{U}_{\varepsilon_x}(x) \subset O,$$

よって $O = \bigcup \mathrm{U}_{\varepsilon_x}(x)$. □

exercise - 問題集 . 71(2)

exercise 16. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i) = (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n) = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid a_i < x_i < b_i \ (\forall i)\}$$

は開集合であることを示せ. これを $\mathbb{R}^n$ の開区間という.

exercise 17. (X,d) を距離空間, $x \in X$ とする. $\mathrm{E}_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) > r\}$ は X の開集合であることを示せ.

Definition 2.2.5. (X,d) を距離空間, $F \subset X$ を部分集合とする. このとき

F が X の閉集合 (closed set) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ F の補集合 F^c が X の開集合である.

Theorem 2.2.6. $\mathcal{F} = \{F \mid F$ は X の閉集合 $\}$ は次をみたす.

F1) $X, \emptyset \in \mathcal{F}$.

F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

F3) $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

Proof. Thm 2.2.2 より

F1) $X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$, $\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$.

F2) $(F_1 \cup F_2)^c = F_1^c \cap F_2^c \in \mathcal{O}$.

F3) $(\cap F_\lambda)^c = \cup(F_\lambda^c) \in \mathcal{O}$.

□

Remark . F2 により有限個の閉集合の和集合は閉集合であることがわかるが, 無限個の場合は一般にはそうではない. (開集合のときを参照.)

Example 2.2.7. 距離空間において 1 点のみからなる集合 $\{x\}$ は閉集合である. したがって F2 により有限部分集合も閉集合である.

Proof. $\{x\}^c = X - \{x\}$ が開集合であることをいえばよい.
$y \in X - \{x\}$ とすると $x \neq y$. よって $\varepsilon = d(x, y)$ とおくと $\varepsilon > 0$ であり, あきらかに $x \notin \mathrm{U}_\varepsilon(y)$. よって $\mathrm{U}_\varepsilon(y) \subset X - \{x\}$. □

Example 2.2.8. $\mathrm{B}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ を点 x を中心とする半径 r の閉球 (closed ball) という. $\mathrm{B}_r(x)^c = \mathrm{E}_r(x)$ であるから exercise 17 より, 閉球は閉集合である. とくに 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において閉区間は閉集合である.

exercise 18. $\mathrm{S}_r(x)$ は閉集合であることを示せ.

exercise 19. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i\ (\forall i)\}$$

は閉集合であることを示せ. これを $\mathbb{R}^n$ の 閉区間 という.

Remark . $X, \emptyset$ は開かつ閉集合である. また開集合でも閉集合でもない部分集合もある.

exercise 20. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の半開区間 $(a, b]$ は $a < b$ ならば開集合でも閉集合でもない.

exercise - 問題集 . 73(1)(2) 74(1)(2)

ひとつの集合上の異なる距離関数が同じ位相を定めることもある.

Example 2.2.9. Example 2.1.4, 2.1.7, 2.1.8 で与えられた $\mathbb{R}^n$ 上の距離

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \\
d_1(x,y) &= \max_{1\le i\le n}|x_i - y_i| \\
d_2(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|
\end{aligned}
$$

を考える．$\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ をそれぞれ d, d_1, d_2 の定める位相とすると $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ である．

Proof. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ を示そう．

任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ について $d_1(x,y) \le d(x,y) \le \sqrt{n}d_1(x,y)$ であることに注意する．実際任意の i について

$$|x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} = d(x,y)$$

であるから $d_1(x,y) = \max|x_i - y_i| \le d(x,y)$. また任意の i について

$$(x_i - y_i)^2 \le (\max|x_i - y_i|)^2 = d_1(x,y)^2$$

であるから

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}d_1(x,y)^2} = \sqrt{n}d_1(x,y).$$

距離 d_1 に関する開球を $\mathrm{U}_\varepsilon(x)_1$ で表す．

$O \in \mathcal{O}$ とする．任意の $x \in O$ に対しある正数 r が存在して $\mathrm{U}_r(x) \subset O$ となる．$\varepsilon = r/\sqrt{n}$ とおくと $\varepsilon > 0$. 任意の $y \in \mathrm{U}_\varepsilon(x)_1$ に対し

$$d(x,y) \le \sqrt{n}d_1(x,y) < \sqrt{n}\varepsilon = \sqrt{n}r/\sqrt{n} = r$$

だから $y \in \mathrm{U}_r(x)$. よって $\mathrm{U}_\varepsilon(x)_1 \subset \mathrm{U}_r(x) \subset O$ であり $O \in \mathcal{O}_1$. したがって $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1$.

逆に $O \in \mathcal{O}_1$ であれば, 任意の $x \in O$ に対しある正数 ε が存在して $\mathrm{U}_\varepsilon(x)_1 \subset O$ となる．$d_1(x,y) \le d(x,y)$ であるから $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset \mathrm{U}_\varepsilon(x)_1$ となり $O \in \mathcal{O}$ である．よって $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$. 以上から $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ が示せた．

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_2$ も $d(x,y) \le d_2(x,y) \le nd(x,y)$ に注意すれば同様に示せる． □

exercise 21. 上の不等式 $d(x,y) \le d_2(x,y) \le nd(x,y)$ を示せ．

exercise 22. 集合 X 上の 2 つの距離関数 d_1 と d_2 が条件 $*$「ある正数 M, m が存在して, 任意の $x, y \in X$ について $md_1(x,y) \le d_2(x,y) \le Md_1(x,y)$ が成立する」をみたすとき $d_1 \sim d_2$ と書くことにする. 距離 d_i に関する開球を $\mathrm{U}_\varepsilon(x)_i$, 距離 d_i の定める位相を $\mathcal{O}_i$ と書く.

(i) 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.

(ii) d_1 と d_2 が条件 $*$ をみたすとする. このとき任意の $x \in X$ と $\varepsilon > 0$ について

$$\mathrm{U}_{m\varepsilon}(x)_2 \subset \mathrm{U}_\varepsilon(x)_1$$

$$\mathrm{U}_{\frac{\varepsilon}{M}}(x)_1 \subset \mathrm{U}_\varepsilon(x)_2$$

であることを示せ.

(iii) $d_1 \sim d_2$ であるときこれらの定める位相は等しい, すなわち $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ であることを示せ.

exercise 23. Example 2.1.11 における $X_1 \times X_2$ 上の 3 つの距離関数の定める位相はどれも等しいことを示せ. Example 2.1.12 についてはどうか？

$\mathbb{R}^\infty$ の場合も考えてみよ.

2.3　近傍

Definition 2.3.1. X を距離空間, $U \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とする.

U が $x \in X$ の <u>近傍 (neighbourhood)</u> である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x \in O \subset U$ となる開集合 O が存在する.

特に点 x を含む開集合は x の近傍である.

x を含む開集合を x の <u>開近傍</u> という.

x の近傍でかつ閉集合であるものを x の <u>閉近傍</u> という.

集合

$$\mathcal{U}(x) = \{U \mid U \subset X, U \text{ は } x \text{ の近傍}\}$$

を x の <u>近傍系</u> という.

$A \subset X$ を部分集合とする.

$U\ (\subset X)$ が A の近傍である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $A \subset O \subset U$ となる開集合 O が存在する.

Remark . 近傍の定義は開集合にもとづいているので, 距離関数は異なっていても位相が一致すれば$\mathcal{U}(x)$ は一致する.

exercise 24. $U \in \mathcal{U}(x) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ s.t.\ \mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset U$ を示せ.

Theorem 2.3.2. 次が成り立つ.

U1) $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$

U2) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$

U3) $U_1 \in \mathcal{U}(x), U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2 \in \mathcal{U}(x)$

U4) 任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対し, ある $V \in \mathcal{U}(x)$ が存在して, $V \subset U$ かつ, 任意の $y \in V$ について $U \in \mathcal{U}(y)$, すなわち $U \in \bigcap_{y \in V} \mathcal{U}(y)$ となる.

Proof. U1 はあきらか.

U2. $U_i \in \mathcal{U}(x)$ とすると, ある開集合 O_i が存在して $x \in O_i \subset U_i$ となる. このとき $x \in O_1 \cap O_2 \subset U_1 \cap U_2$ であり, $O_1 \cap O_2$ は開集合であるから $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.

U3. $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ とすると, $x \in O \subset U_1$ となる開集合 O がある. $U_1 \subset U_2$ であれば $x \in O \subset U_2$ であるから $U_2 \in \mathcal{U}(x)$.

U4. $U \in \mathcal{U}(x)$ とすると, $x \in O \subset U$ となる開集合 O がある. $V := O$ とすると, 任意の $y \in V$ に対し V は開集合であるから $V \in \mathcal{U}(y)$. 特に $V \in \mathcal{U}(x)$. □

Theorem 2.3.3. $O \subset X$ を部分集合とする. このとき

O が開集合である. $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in O$ について $O \in \mathcal{U}(x)$.

Proof. $\Rightarrow$: あきらか. (x を含む開集合は x の近傍である.)

$\Leftarrow$: 任意の $x \in O$ に対し O は x の近傍であるから, $x \in O_x \subset O$ となる開集合 O_x が存在する. O の各点に対しこのような開集合をとると

$$O \subset \bigcup_{x \in O} O_x \subset O$$

となり, $O = \cup O_x$ であるから O は開集合.

(距離空間であるので先の exercise を使った証明も可.) □

Definition 2.3.4. $x \in X$ とし $\mathcal{U}(x)$ を x の近傍系, $\mathcal{U}^*(x) \subset \mathcal{U}(x)$ を $\mathcal{U}(x)$ の部分集合とする. (すなわち $\mathcal{U}^*(x)$ は x の近傍からなる集合.)

$\mathcal{U}^*(x)$ が x の <u>基本近傍系</u> である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対し, ある $V \in \mathcal{U}^*(x)$ が存在して $V \subset U$ となる.

Remark . 基本近傍系は一意的ではない. また $\mathcal{U}^*(x)$ が基本近傍系であるという性質は距離ではなく位相に依存している.

Example 2.3.5. X を距離空間, $x \in X$ とする.

$$\mathcal{U}^*(x) = \{\mathrm{U}_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\}$$

は基本近傍系である. (exercise 24 参照.)

$$\mathcal{U}^{**}(x) = \{\mathrm{U}_{\frac{1}{n}}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

は可算基本開近傍系である.

Proof. $\mathcal{U}^{**}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ はあきらか.

$\forall U \in \mathcal{U}(x)$, $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset U$. $\exists n \in N$ s.t. $1/n < \varepsilon$. このとき $\mathrm{U}_{1/n}(x) \subset \mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset U$. □

$$\mathcal{U}^{***}(x) = \{\mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

は可算基本閉近傍系である. ($\mathrm{B}_{1/2n}(x) \subset \mathrm{U}_{1/n}(x)$ よりあきらか.)

Example 2.3.6. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において

$$\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$$

は点 (x, y) の基本近傍系である. 実際 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ は Example 2.1.7 で与えた距離に関する (x, y) の ε 近傍であり, この距離の定める位相とユークリッド距離の定める位相は一致する (Example 2.2.9).

同様に n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において

$$\left\{\prod_{i=1}^{n}(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)\right\}_{\varepsilon>0}$$

は点 $(x_1, \ldots, x_n)$ の基本近傍系である.

exercise 25. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系, $\mathcal{U}^{**}(x)$ を $\mathcal{U}(x)$ の部分集合とする. 任意の $U \in \mathcal{U}^*(x)$ に対し, ある $V \in \mathcal{U}^{**}(x)$ が存在して $V \subset U$ となるならば $\mathcal{U}^{**}(x)$ は x の基本近傍系である.

2.4 内部, 外部, 境界

Definition 2.4.1. X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A に含まれる開集合全体の和集合を A の <u>内部 (interior)</u> といい, A° で表す.

$$A^\circ = \bigcup_{A\supset O:\ \text{open}} O.$$

Thm 2.2.2 O3 により A° は開集合である. また A に含まれる (包含関係に関して) 最大の開集合である. (あきらかに $A^\circ \subset A$ であり, $O \subset A$ が開集合であれば $O \subset A^\circ$ である.)

Remark . $A \neq \emptyset$ であっても $A^\circ = \emptyset$ となることもある.

Example 2.4.2. $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ において $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ である.

Proof. 以降何度か使うので次の事実を証明しておく.

(i) 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ と任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある有理数 $r \in \mathbb{Q}$ が存在して, $x < r < x + \varepsilon$ となる. すなわち $(x, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

(ii) 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ と任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある無理数 $y \in \mathbb{Q}^c$ が存在して, $x < y < x + \varepsilon$ となる. すなわち $(x, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c \neq \emptyset$.

これらの事実を, 有理数および無理数は実数のなかで 稠密 であるという (§2.7 参照).

Proof. (i) $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $1/N < \varepsilon$.

$$n := \max\left\{ l \in \mathbb{Z} \mid \frac{l}{N} \leq x \right\}$$

とする. このとき $n/N \leq x < (n+1)/N$.

$$x + \varepsilon - \frac{n+1}{N} = x - \frac{n}{N} + \varepsilon - \frac{1}{N} > 0.$$

よって $(n+1)/N < x + \varepsilon$.

(ii) 同様に $\exists M \in \mathbb{N}$ s.t. $\sqrt{2}/M < \varepsilon$.

$$m := \max\left\{ l \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{2}l}{M} \leq x \right\}$$

とする. このとき $m\sqrt{2}/M \leq x < (m+1)\sqrt{2}/M$.

$$x + \varepsilon - \frac{(m+1)\sqrt{2}}{M} = x - \frac{m\sqrt{2}}{M} + \varepsilon - \frac{\sqrt{2}}{M} > 0.$$

よって $(m+1)\sqrt{2}/M < x + \varepsilon$. またあきらかに $(m+1)\sqrt{2}/M \in \mathbb{Q}^c$. □

$\mathbb{Q}$ に含まれる, $\mathbb{R}$ の空でない開集合 O があったとする. ($\mathbb{Q} \supset O \neq \emptyset$.) $x \in O$ とする. O は開集合であるから, ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset O$ となる. $O \subset \mathbb{Q}$ なので $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{Q}$ とくに $(x, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c = \emptyset$ となるが, これは上の事実に反する. よって $\mathbb{Q}$ に含まれる開集合は空集合のみ. ゆえに $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. □

Definition 2.4.3. $x \in A$ が A の 内点 である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x \in O \subset A$ となるような (X の) 開集合 O が存在する.

あきらかに x が A の内点であることと, A が x の近傍であることは同値である.

また x が A の内点であることと $x \in U \in A$ となる x の近傍 U が存在することは同値である.

Theorem 2.4.4. A の内部 A° は A の内点全体の集合である.

$$A^\circ = \{ x \in A \mid x \text{ は } A \text{ の内点} \}.$$

Proof. x が A の内点ならば, $x \in O \subset A$ となる開集合 O が存在する. O は A に含まれる開集合であるから $O \subset A^\circ$. よって $x \in O \subset A^\circ$ ゆえ $x \in A^\circ$.

一方 $x \in A^\circ$ とすると, $x \in A^\circ \subset A$ かつ A° は開集合であるから x は A の内点. □

exercise 26. $A \supset B \Rightarrow A^\circ \supset B^\circ$.

exercise 27. A: open $\Leftrightarrow A = A^\circ$.

Theorem 2.4.5. X を距離空間, $A, B \subset X$ を部分集合とする. このとき次が成り立つ.

I1 $A \supset A^\circ$.

I2 $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

I3 $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

I4 $X^\circ = X, \emptyset^\circ = \emptyset$.

Proof. I1, I4 は明らか.

I2. $(A \cap B)^\circ \subset A \cap B \subset A$ かつ $(A \cap B)^\circ$: open より $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$. 同様に $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$. よって $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$.

$A^\circ \cap B^\circ \subset A^\circ \subset A$. 同様に $A^\circ \cap B^\circ \subset B$. よって $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. $A^\circ \cap B^\circ$ は開集合だから $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

I3. A° は開集合であり $A^\circ \subset A^\circ$ である. あきらかに A° は A° に含まれる最大の開集合であるから $A^\circ = (A^\circ)^\circ$. □

exercise 28. $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$ が成り立つ.

しかし $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ は一般には成り立たない.

Remark . I2 より有限個の部分集合の共通部分の内部は, 内部の共通部分

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^\circ = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^\circ$$

であるが, 無限個の場合

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^\circ \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^\circ$$

は成り立つが, 等号は一般には成立しない.

exercise 29. 上の包含関係を示せ.

Example 2.4.6. $x \in \mathbb{R}$ と $n \in N$ に対し $\mathbb{R} \supset A_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ とおく.

$\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \{x\}$ であるから $(\bigcap_{n=1}^\infty A_n)^\circ = \{x\}^\circ = \emptyset$.

一方 A_n は開集合であるから $A_n^\circ = A_n$. よって $\bigcap_{n=1}^\infty A_n^\circ = \{x\}$.

Definition 2.4.7. $A^e = (A^c)^\circ$ を A の 外部 (exterior) といい, A^e の点を A の 外点 という.

A の外部は A と交わらない最大の開集合である. 実際 $A^e \subset A^c$ だから $A \cap A^e = \emptyset$ であり, A^c の内部であるから開集合.
O を $O \cap A = \emptyset$ である開集合とすると, $O \subset A^c$ かつ O は開集合であるから $O \subset (A^c)^\circ = A^e$.

Definition 2.4.8. $A^f = (A^\circ \cup A^e)^c$ を A の 境界 (frontier) という.

A°, A^e はともに開集合であるから, その補集合である A^f は閉集合である. また $A^\circ \cap A^e = \emptyset$ であることに注意すると, X は A°, A^f, A^e の disjoint union になっている.

$$X = A^\circ \coprod A^f \coprod A^e.$$

Theorem 2.4.9. $x \in A^f \Leftrightarrow x$ の任意の近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$, $U \cap A^c \neq \emptyset$.

Proof.

$$\begin{aligned}
\exists U \in \mathcal{U}(x),\ U \cap A = \emptyset &\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x),\ U \subset A^c \\
&\Leftrightarrow x \in (A^c)^\circ = A^e \ (\text{Thm } 2.4.4.) \\
\exists U \in \mathcal{U}(x),\ U \cap A^c = \emptyset &\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x),\ U \subset A \\
&\Leftrightarrow x \in A^\circ \\
x \in A^f &\Leftrightarrow x \notin A^\circ \text{かつ}\ x \notin A^e
\end{aligned}$$

□

Remark . $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とすると, 上の定理の条件は “任意の $V \in \mathcal{U}^*(x)$ に対して $V \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A^c \neq \emptyset$” と同値である.

Corollary 2.4.10. $A^f = (A^c)^f$.

Proof.

$$\begin{aligned}
x \in A^f &\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x),\ U \cap A \neq \emptyset,\ U \cap A^c \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x),\ U \cap (A^c)^c \neq \emptyset,\ U \cap A^c \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow x \in (A^c)^f.
\end{aligned}$$

あるいは直接

$$(A^c)^f = ((A^c)^\circ \cup (A^c)^e)^c = (A^e \cup ((A^c)^c)^\circ)^c = (A^e \cup A^\circ)^c = A^f.$$

□

2.5 閉包

Definition 2.5.1. X を距離空間 $A \subset X$ を部分集合とする. A を含む閉集合全体の共通部分

$$A^a := \bigcap_{A \subset F_\alpha \,:\, \text{closed}} F_\alpha$$

を A の閉包 (closure) という. $\overline{A}$ と書くこともある.

A^a の点を A の触点 (adherent point) という.

Thm 2.2.6 F3 より A^a は閉集合である. また定義から A を含む (包含関係に関して) 最小の閉集合である.

Theorem 2.5.2. $A^a = A^\circ \cup A^f = A^{ec}$, $A^{ac} = A^{c\circ}$.

Proof. $A^a \supset A$ ゆえ $A^{ac} \subset A^c$. A^{ac} は開集合だから $A^{ac} \subset A^{c\circ} = A^e$. したがって $A^a \supset A^{ec}$. 一方 $A^e \subset A^c$ ゆえ $A^{ec} \supset A$. A^{ec} は閉集合であるから $A^{ec} \supset A^a$. よって $A^a = A^{ec}$. $A^e = A^{c\circ}$ に注意すると 2 つ目の等式がわかる.

また $X = A^\circ \coprod A^f \coprod A^e$ であったから, $A^{ec} = A^\circ \cup A^f$.

(いろいろと別証は考えられる.) □

Corollary 2.5.3. $A^\circ = A^{cac}$, $A^{\circ c} = A^{ca}$.

Proof. 上の定理を A^c に適用すると $(A^c)^{ac} = (A^c)^{c\circ} = A^\circ$. □

Theorem 2.5.4. $X \supset A$, $x \in X$ とする.

$x \in A^a \iff x$ の任意の近傍 U について $U \cap A \neq \emptyset$.

Proof. $x \in A^e \iff x$ は A^c の内点

$\iff x$ のある近傍 U が存在して, $x \in U \subset A^c$ となる.

$\iff x$ のある近傍 U が存在して, $U \cap A = \emptyset$ となる.

$A^a = A^{ec}$ であることに注意すると,

$x \in A^a \iff x \notin A^e \iff x$ の任意の近傍 U について $U \cap A \neq \emptyset$. □

exercise 30. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とすると, 上の条件は「任意の $U \in \mathcal{U}^*(x)$ に対し $U \cap A \neq \emptyset$」と同値.

Example 2.5.5. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の開球 $U = \mathrm{U}_\varepsilon(x)$ について $U^\circ = U$, $U^a = \mathrm{B}_\varepsilon(x)$, $U^f = \mathrm{S}_\varepsilon(x)$.

Example 2.5.6. $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ とすると, $A^\circ = \emptyset$, $A^f = A^a = \mathbb{R}$. 実際 Example 2.4.2 で示したことと Thm 2.4.9 から $A^f = \mathbb{R}$ がわかる.

exercise 31. $A \subset B \Rightarrow A^a \subset B^a$.

exercise 32. A closed $\Leftrightarrow A = A^a$.

Theorem 2.5.7. $A,\ B \subset X$.

A1 $A^a \supset A$.

A2 $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$.

A3 $A^{aa} = A^a$.

A4 $X^a = X, \emptyset^a = \emptyset$.

Proof. Thm 2.4.5, 2.5.2 を使って

$$(A \cup B)^a = (A \cup B)^{coc} = (A^c \cap B^c)^{oc} = (A^{co} \cap B^{co})^c = A^{coc} \cup B^{coc} = A^a \cup B^a$$

等として示せる. □

Remark . $(A \cap B)^a \subset A^a \cap B^a$ だが, 等号は一般には成立しない.

$\mathbb{R} \supset \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}^c$ を考えると, $\mathbb{Q}^{cf} = \mathbb{Q}^f = \mathbb{R}$ であるから $\mathbb{Q}^{ca} = \mathbb{Q}^a = \mathbb{R}$. よって $\mathbb{Q}^c \cap \mathbb{Q}^{ca} = \mathbb{R}$. もちろん $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c)^a = \emptyset$.

$R \supset A,\ B$ を $A = [-1, 0)$, $B = (0, 1]$ と定めると, $A^a = [-1, 0]$, $B^a = [0, 1]$ であるから, $(A \cap B)^a = \emptyset$, $A^a \cap B^a = \{0\}$.

exercise 33. $(A \cap B)^a \subset A^a \cap B^a$ を示せ.

exercise - 問題集 . 78, 79, 83, 100

2.6　集積点, 孤立点, 導集合

Definition 2.6.1. X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

$x \in X$ が A の <u>集積点 (accumulation point)</u> である. $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x の任意の近傍 U に対し, $(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset$.

A の集積点の全体を A の <u>導集合 (derivede set)</u> といい, A' で表す.

A の点 $a \in A$ が A の集積点でないとき a を A の <u>孤立点 (isolated point)</u> という.

つまり x のどんな近くにも x 以外の A の点があるときに x は A の集積点であるという.

Example 2.6.2. $\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$. $\mathbb{Z}$ の点は全て孤立点, $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

Proof. $n \in \mathbb{Z}$ とすると, $(\mathbb{Z} - \{n\}) \cap (n - 1/3, n + 1/3) = \emptyset$ ゆえ, $n \notin \mathbb{Z}'$, すなわち $\mathbb{Z}$ の点は全て孤立点.

$x \notin \mathbb{Z}$ とする. $\varepsilon = \min\{x - [x], [x] + 1 - x\}$ とおくと, $\varepsilon > 0$ で, $\mathbb{Z} \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \emptyset$. よって $x \notin \mathbb{Z}'$. □

Example 2.6.3. $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

Proof. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ に対し $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{Q} - \{x\}) \supset (x, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. □

Proposition 2.6.4. $x \in A' \Leftrightarrow x \in (A - \{x\})^a$.

Proof. Thm 2.5.4 と集積点の定義より $x \in (A - \{x\})^a \Leftrightarrow x$ の任意の近傍 U について $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in A'$. □

Proposition 2.6.5. $A^a = A \cup A'$.

Proof. $A \subset A^a$ である. また $x \in A' \Rightarrow x \in (A - \{x\})^a \subset A^a$. よって $A \cup A' \subset A^a$.
　一方, $x \in A^a$ かつ $x \notin A$ とすると, $A - \{x\} = A$ であるから $x \in A^a = (A - \{x\})^a$ ゆえ $x \in A'$. したがって $A^a \subset A \cup A'$. □

Proposition 2.6.6. $x \in A' \Leftrightarrow x$ の任意の ε 近傍 $\mathrm{U}_\varepsilon(x)$ が, A の点を無限に多く含む. (これは距離空間特有の性質.)

Proof. $\Leftarrow$ はあきらか.
　$\Rightarrow$) 対偶を示す. ある正の数 ε が存在して, $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A$ が有限集合だとする. $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ とする. $\epsilon' = \min_{1 \le i \le n} d(x, a_i)$ とおくと, $\varepsilon' > 0$ で, $\mathrm{U}_{\varepsilon'}(x) \cap (A - \{x\}) = \emptyset$. □

exercise 34. $\mathbb{R} \supset A := \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とすると $A' = \{0\}$ であることを示せ.

exercise 35. $x \in X$ が X の孤立点 $\Leftrightarrow \{x\}$ が X の開集合.

exercise 36. A closed $\Leftrightarrow A' \subset A$.

exercise 37. $x \in A' \Rightarrow (A - \{x\})^a = A^a$. (逆はもちろん正しくない.)

exercise - 問題集 . 70(1),(2),(3), 82(1),(2)

2.7 稠密, 全疎

Definition 2.7.1. $X \supset A$ とする.
　A が X で 稠密 (dense) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A^a = X$.

Definition 2.7.2. ある可算部分集合が存在してそれが X で稠密であるとき, X を 可分 (separable) という.

Proposition 2.7.3. $X \supset A$ が稠密
　$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ と, x の任意の近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$
　$\Leftrightarrow$ 空でない任意の開集合 $O \subset X$ に対し, $O \cap A \neq \emptyset$.

Proof. 最初の同値は Thm 2.5.4 より明らか. 2 番目については

$\Rightarrow$) $X \supset O$: open $\neq \emptyset$ とすると O は空でないので $x \in O$ となる点 x が存在する. O は x を含む開集合だから x の近傍. よって仮定より $O \cap A \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) $x \in X$ とする. U を x の近傍とすると $x \in O \subset U$ となる開集合 O が存在する. 仮定より $O \cap A \neq \emptyset$. よって $U \cap A \supset O \cap A \neq \emptyset$. □

Example 2.7.4. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において $\mathbb{Q}$ は稠密ゆえ $\mathbb{R}$ は可分.

Example 2.7.5. $X = \mathbb{R}$ に離散距離をいれる. このとき $X \supset \forall A$ について $A^a = A$ であるから X は可分ではない.

exercise 38. X を離散距離空間とする. このとき $X \supset A$ について, $A^\circ, A^a, A^e, A^f, A'$ を求めよ.

Example 2.7.6.

$$\mathbb{R}^n \supset \mathbb{Q}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q}\}$$

は稠密だから $\mathbb{R}^n$ は可分.

Proof. 任意の $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し, Example 2.4.2 より $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. よって

$$\left(\prod_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \right) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset.$$

よって $x \in (\mathbb{Q}^n)^a$. (cf. Example 2.3.6.) □

Example 2.7.7. Example 2.1.6 の $\mathbb{R}^\infty$ の部分集合 A を次で定める.

$$\mathbb{R}^\infty \supset A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{Q},\ k \in \mathbb{N}\}.$$

すなわち A の元は, はじめの有限個は有理数, 残りは全て 0 であるような実数列. このとき A は可算集合であり, $\mathbb{R}^\infty$ で稠密である. よって $\mathbb{R}^\infty$ は可分.

Proof.

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{Q}^k$$

であるから A は可算集合である.

$x = (x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$ とする. $\forall \varepsilon > 0$ に対し, $k \in \mathbb{N}$ を十分大きくとると

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 < \varepsilon^2$$

となる. $\mathbb{Q} \ni y_1, y_2, \ldots, y_k$ を $|y_i - x_i| < \varepsilon/\sqrt{k}$ となるようにとる. このとき $y = (y_1, \ldots, y_k, 0, \ldots) \in A$ と x の距離は

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i-1}^{k}(x_i - y_i)^2 + \sum_{i=k+1}^{\infty} x_i^2} < \sqrt{2\varepsilon^2} = \sqrt{2}\varepsilon.$$

よって $\mathrm{U}_{\sqrt{2}\varepsilon}(x) \cap A \neq \emptyset$. したがって $x \in A^a$. □

Definition 2.7.8. $X \supset A, B$ とする.
A が B において稠密 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A^a \supset B$.

Example 2.7.9. $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q},\ \mathbb{Q}^c$. $\mathbb{Q}^a = \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}^c$, $\mathbb{Q}^{ca} = \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$. よって $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}^c$ で, $\mathbb{Q}^c$ は $\mathbb{Q}$ でそれぞれ稠密.

Definition 2.7.10. $X \supset A$ とする.
A が <u>全疎 (nowhere dense)</u> $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (A^a)^\circ = \emptyset$.

Proposition 2.7.11. A が全疎 $\Leftrightarrow A^e$ が X で稠密.

Proof.

$$\emptyset = (A^a)^\circ = A^{acac} = A^{eac} \Leftrightarrow X = A^{ea}$$

□

Proposition 2.7.12. A が全疎 $\Leftrightarrow$ 任意の空でない開集合 $O \subset X$ に対し, O に含まれる空でない開集合 $O' \subset O$ が存在して, $O' \cap A = \emptyset$.

Proof. A が全疎 $\Leftrightarrow A^e$ が X で稠密 $\Leftrightarrow \emptyset \neq \forall O$: open, $O \cap A^e \neq \emptyset$ (Prop 2.7.3) .
$\Rightarrow$) $O' = O \cap A^e$ とおくと O' は空でない開集合で O に含まれ, $O' \cap A \subset A^e \cap A \subset A^c \cap A = \emptyset$ だから $O' \cap A = \emptyset$.
$\Leftarrow$) $O \neq \emptyset$ を開集合とする. 仮定より $\emptyset \neq \exists O'$: open $\subset O$ s.t. $O' \cap A = \emptyset$. O' は開集合で $O' \subset A^c$ であるから $O' \subset A^{c\circ} = A^e$. よって $O \cap A^e \supset O' \neq \emptyset$.

□

2.8 点列の収束

特に断らない限り X は位相空間とする.

Definition 2.8.1. X を集合とする. 自然数の全体 $\mathbb{N}$ から X への写像を X の <u>点列</u> という.
点列 $f\colon \mathbb{N} \to X$ は $f(n) = x_n$ であるとき, 普通 $x_1, x_2, \ldots$ あるいは $\{x_n\}$ と表される.

Definition 2.8.2. X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に 収束 する $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x の任意の近傍 U に対し, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる.

このとき x を点列 $\{x_n\}$ の 極限点 (limit point) といい $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ あるいは $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ とかく.

Remark . X を距離空間とする.

$\{\mathrm{U}_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ および $\{\mathrm{U}_{1/k}(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ は x の基本近傍系であるから

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} x_n = x\\ \Leftrightarrow&\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(x)\\ \Leftrightarrow&\forall k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow x_n \in \mathrm{U}_{1/k}(x).\end{aligned}$$

特に $\mathbb{R}$ の点列 (実数列) の収束については上の定義 2.8.2 ともとの定義 1.2.4 は同値である.

exercise 39. $\mathbb{R}^N$ の点列 $\{x_n\}$, $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nN})$ が $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N)$ に収束するための必要十分条件は, 全ての i について $\{x_{ni}\}$ が a_i に収束することであることを示せ.

Theorem 2.8.3. 距離空間 X においては $\{x_n\}$ の極限点が存在すれば, 唯一点である. (X は Hausdorff 空間 であればよい.)

Proof. 証明は Prop 1.2.6 と全く同様. □

Theorem 2.8.4. $X \supset A$ とする. A の点からなる点列 $\{a_n\}$ $(a_n \in A)$ が $x \in X$ に収束すれば $x \in A^a$ である.

距離空間においては逆も正しい. すなわち X を距離空間とすると

$$\begin{aligned}x \in A^a &\Leftrightarrow \exists\{a_n\}, a_n \in A \ s.t. \lim_{n\to\infty} a_n = x\\ &\Leftrightarrow d(x, A) = 0.\end{aligned}$$

Proof. $a_n \in A$, $a_n \to x \in X$ とする. x の任意の近傍 U に対し, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $a_n \in U$ である. 特に $a_N \in A \cap U \neq \emptyset$. したがって Thm 2.5.4 より $x \in A^a$.

X を距離空間とする. Thm 2.5.4 と $\{\mathrm{U}_{1/n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が x の基本近傍系であることから,

$$\begin{aligned}x \in A^a &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{U}_{1/n}(x) \cap A \neq \emptyset\\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A \ s.t. \ d(x, a_n) < \frac{1}{n} \quad (*)\end{aligned}$$

この点列 $\{a_n\}$ を考えると, あきらかに $\lim_{n\to\infty} a_n = x$. また

$$(*) \Leftrightarrow \inf_{a\in A} d(x, a) = 0 \Leftrightarrow d(x, A) = 0.$$

□

Corollary 2.8.5. A : closed $\Rightarrow$ A の点列 $\{a_n\}$ が極限点 $x \in X$ をもてば $x \in A$.
距離空間においては逆も正しい. すなわち X が距離空間のとき
A : closed $\Leftrightarrow$ A の点列 $\{a_n\}$ が極限点 $x \in X$ をもてば $x \in A$.

Proof. A:closed $\Leftrightarrow$ $A = A^a$ と上の Thm2.8.4 より従う. □

exercise 40. X を距離空間とする. このとき

$$x \in A' \Leftrightarrow x = \lim_{n\to\infty} a_n,\ a_n \in A,\ a_n \neq x.$$

2.9 部分距離空間

(X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 距離関数 d を A に制限したもの

$$A \times A \ni (a, b) \mapsto d(a, b) \in \mathbb{R}$$

を考えるとこれは A 上の距離関数になり, この距離により A は距離空間になる.
距離空間 X の部分集合を, このようにして距離空間とみたとき, 距離空間 X の部分距離空間 または単に 部分空間 という.

Caution! . $X \supset A \supset B$. 「B が A の開集合」と「B が X の開集合」とは違う.
$\mathbb{R} \supset [0, 1] \supset [0, 1]$. $[0, 1]$ は $[0, 1]$ の中では open だが, $\mathbb{R}$ では open ではない.

Theorem 2.9.1. X を距離空間, A を部分空間, $B \subset A$ を部分集合とする. このとき
B が A の開集合 $\Leftrightarrow$ X の開集合 O が存在して, $B = O \cap A$.
B が A の閉集合 $\Leftrightarrow$ X の閉集合 F が存在して, $B = F \cap A$.
すなわち部分距離空間の位相は 相対位相 である.

Proof. $a \in A$ に対し a を中心とする半径 r の A における開球

$$\mathrm{U}_r(a)_A = \{x \in A \mid d(a, x) < r\}$$

は a を中心とする半径 r の X における開球 $\mathrm{U}_r(a)$ と A との共通部分 $\mathrm{U}_r(a)_A = \mathrm{U}_r(a) \cap A$ であることに注意する.
B が A の開集合であるとする. 距離空間の開集合は開球の和集合であった (Thm 2.2.4) から

$$B = \bigcup_\alpha U_{A,\alpha} = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap A) = (\bigcup_\alpha U_\alpha) \cap A.$$

$O = \bigcup_\alpha U_\alpha$ とおくとよい.
逆に $B = O \cap A$, O:open in X であるとする. $x \in B$ とすると $x \in O$ であるからある正数 ε が存在して, $x \in \mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O$ となる. $\mathrm{U}_\varepsilon(x)_A = \mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A \subset O \cap A = B$ だから B は A で open.
閉集合の方は練習問題. □

exercise 41. 閉集合の方を示せ.

exercise 42. $X \supset A \supset V \ni x$ とする.
V が A における x の近傍 $\Leftrightarrow$ x の X における近傍 U が存在して $V = U \cap A$.

Proposition 2.9.2. $X \supset A$ とする.
A が X の開 (閉) 集合であるとき, $B \subset A$ が部分空間 A の開 (閉) 集合ならば B は X でも開 (閉) 集合である.

Proof. A:open in X, B:open in A とする. $B = O \cap A$ となる X の開集合 O がある. A は X で開集合だから B もそうである. 閉の方も同様. □

2.10　距離空間の間の連続写像

Definition 2.10.1. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.
写像 $f\colon X \to Y$ は, 距離の定める位相に関して連続であるとき, 連続であるという. すなわち
写像 $f\colon X \to Y$ が点 $a \in X$ で 連続 (continuous) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a の近傍 U が存在して $f(U) \subset V$ となる.
$f\colon X \to Y$ が X の各点で連続であるとき f を 連続写像 という.

距離空間においては ε 近傍が基本近傍系をなすことに注意すると
$f\colon X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続
$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して $f(\mathrm{U}_\delta(a)) \subset \mathrm{U}_\varepsilon(f(a))$
$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して $d(x, a) < \delta$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$
であることがわかる.

Example 2.10.2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ で連続 $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Example 2.10.3. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めると f は連続である.

Proof. $a \in \mathbb{R}$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|a| + 1)\}$ とおくと $\delta > 0$ であり, $|x - a| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2| = |x - a||x + a| = |x - a||2a + x - a| \\ &\leq |x - a|(2|a| + |x - a|) < \delta(2|a| + 1) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}(2|a| + 1) = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Example 2.10.4. (X,d) を距離空間とする. $x_0 \in X$ を固定する. $d_{x_0}(x) = d(x_0,x)$ で定まる関数 $d_{x_0}\colon X \to \mathbb{R}$ は連続である.

Proof. 任意の $a,x \in X$ に対し三角不等式から

$$-d(x,a) \le d(x_0,x) - d(x_0,a) \le d(x,a)$$

がわかる. すなわち $|d(x_0,x) - d(x_0,a)| \le d(a,x)$.

したがって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \varepsilon$ とおくと $d(x,a) < \delta$ ならば

$$|d_{x_0}(x) - d_{x_0}(a)| = |d(x_0,x) - d(x_0,a)| \le d(x,a) < \delta = \varepsilon.$$

□

Theorem 2.10.5. X, Y を距離空間とする.

$f\colon X \to Y$ が $a \in X$ で連続

$\Leftrightarrow$ 点 a に収束する任意の点列 $\{x_n\}$ に対し, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. ($\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n)$).

Remark . $\Rightarrow$ は任意の位相空間でよい. $\Leftarrow$ は $a \in X$ が可算基本近傍系をもてばよい.

Proof. $\Rightarrow$) f が $a \in X$ で連続で, $x_n \to a$ とする. $f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a のある近傍 U が存在して $f(U) \subset V$ となる. この U に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \ge N$ ならば $x_n \in U$ となる. したがって $n \ge N$ ならば $f(x_n) \in f(U) \subset V$ である. よって $f(x_n) \to f(a)$.

$\Leftarrow$) 対偶を示す. すなわち f が点 a で連続でないならば $x_n \to a$ である点列で $f(x_n) \to f(a)$ とはならないものが存在することを示す. f が点 a で連続でないとすると $f(a)$ の近傍 V で, 任意の $n \in N$ に対し $f(\mathrm{U}_{1/n}(a)) \not\subset V$ となるものがある. よって各自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対し点 $x_n \in \mathrm{U}_{1/n}(a)$ で $f(x_n) \notin V$ となるものがある. 点列 $\{x_n\}$ を考えるとあきらかに $x_n \to a$ だが, $f(x_n) \to f(a)$ ではない. □

Example 2.10.6. $f(x,y) = x + y$, $g(x,y) = xy$ で与えられるふたつの写像 $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ はともに連続である.

Proof. $\mathbb{R}^2$ における点列の収束について「$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n) = (x,y) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$」であることが容易にわかる. よって $\mathbb{R}$ の点列の収束の性質 (Prop 1.2.15) と上の Thm 2.10.5 から連続性がわかる. □

exercise 43. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ がともに連続ならば合成 $g \circ f\colon X \to Z$ も連続であることを示せ.

exercise 44. $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を第 i 成分への射影, すなわち $p_i(x_1,\dots,x_n) = x_i$ であたえられる写像とする. このとき「$f\colon X \to \mathbb{R}^n$ が連続 $\Leftrightarrow$ すべての i について $p_i \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ が連続」を示せ.

exercise 45. $Y \supset A$ を部分空間として $i\colon A \to Y$ を包含写像とする．このとき「$f\colon X \to A$ が連続 $\Leftrightarrow$ 合成 $i \circ f\colon X \to Y$ が連続」を示せ．

exercise - 問題集 . 75(2),89,96

Example 2.10.7. X を位相空間, Y を有界 ($\delta(Y) < \infty$) な距離空間とする．X から Y への写像全体を $F(X,Y)$, 連続写像全体を $C(X,Y)$ で表す．$f, g \in F(X,Y)$ に対し実数 $d(f,g)$ を

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

により定める (Y は有界であるので $d(f,g) < \infty$) と d は $F(X,Y)$ 上の距離関数である．

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $F(X,Y)$ の点列すなわち X から Y への写像の列とする．$\{f_n\}$ が上で定めた距離に関して $f \in F(X,Y)$ に収束するとき f_n は f に一様収束するという．いいかえると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば任意の $x \in X$ に対して $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ が成り立つ．

連続写像の列 $\{f_n\}$ が写像 f に一様収束するならば f は連続である．よって Cor.2.8.5 より, この距離の定める位相に関して $C(X,Y)$ は $F(X,Y)$ の閉集合である．

Proof. $a \in X$ を任意の点とする．$a \in X$ で f が連続であること, すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対して a のある近傍 U が存在して, $x \in U$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ であることを示せばよい．

$\{f_n\}$ は f に一様収束するので, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $x \in X$ に対し $d(f_N(x), f(x)) < \varepsilon/3$ となる．

f_N は連続であるから a のある近傍 U が存在して, $x \in U$ ならば $d(f_N(x), f_N(a)) < \varepsilon/3$ となる．

この U について, $x \in U$ ならば

$$d(f(x), f(a)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(a)) + d(f_N(a), f(a)) < \varepsilon.$$

□

exercise 46. 上の d が $F(X,Y)$ 上の距離関数であることを示せ．

exercise 47. $\lim_{n\to\infty} f_n = f \Leftrightarrow$「任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば任意の $x \in X$ に対して $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ が成り立つ」を示せ．

次に距離空間に特有の一様連続性について述べる．

Definition 2.10.8. $f\colon X \to Y$ が一様連続 (uniformly continuous)

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して, $d(x,y) < \delta$ ならば $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ となる．

Remark . ε に対して δ が X の点によらずにとれる．

あきらかに一様連続ならば連続である.

Example 2.10.9. $f(x) = x^2$ で定まる写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は一様連続ではない (Ex 2.10.3 参照).

Proof. $\varepsilon > 0$ とする. 任意の $\delta > 0$ に対し $x = \varepsilon/\delta$ とすると, $|(x+\delta/2) - x| = \delta/2 < \delta$ であるが

$$\begin{aligned} |f(x+\delta/2) - f(x)| &= \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2 \\ &= \delta x + \frac{\delta^2}{4} \\ &> \delta x = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Example 2.10.10. $X \supset A \neq \emptyset$ とする. $d_A(x) = d(x, A)$ で定まる関数 $d_A\colon X \to \mathbb{R}$ は一様連続である.

Proof. 任意の $x, y \in X$ と任意の $a \in A$ に対し

$$d(x,y) + d(y,a) \geq d(x,a) \geq d(x,A)$$

すなわち $d(x,y) + d(y,a) \geq d(x,A)$ であるから

$$d(x,y) + d(y,A) \geq d(x,A)$$

が成り立つ. よって $d(x,y) \geq d(x,A) - d(y,A)$. x と y を入れ換えて $d(x,A) - d(y,A) \geq -d(x,y)$. したがって

$$|d_A(x) - d_A(y)| = |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

□

exercise - 問題集 . 87,93(1),(2),95

2.11　完備性

(X, d) を距離空間とする.

Definition 2.11.1. X の点列 $\{x_n\}$ が <u>基本列</u> あるいは <u>コーシー (Cauchy) 列</u> である
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して $m, n \geq N$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ が成り立つ.

実数列の場合 (Lemma1.2.8,1.2.9, Cor.1.2.10) と同様に, 距離空間における点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するならば $\{x_n\}$ は基本列であること, 基本列は有界であること, 収束列は有界であることがわかる.

exercise 48. 基本列は有界であることを示せ.

$\mathbb{R}$ においては基本列は収束列であったが, 一般の距離空間においては必ずしもそうではない.

Example 2.11.2. 開区間 $(0,1)$ を $\mathbb{R}$ の部分空間として距離空間とみると, $\{1/n\}$ $(n \geq 2)$ は基本列だが収束しない.

Definition 2.11.3. 距離空間 X は, すべての基本列が収束するとき, 完備 (complete) であるという.

Theorem 2.11.4. X は完備 $\Leftrightarrow$ 「X の空でない閉集合の減少列 $X \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ が $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ をみたせば $\bigcap F_n \neq \emptyset$.」

Proof. $\Rightarrow$) 各 n に対し $x_n \in F_n$ をえらぶ. 点列 $\{x_n\}$ は基本列である.

実際, $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $\delta(F_n) < \varepsilon$ となる. この N に対し, $m, n \geq N$ ならば $x_m, x_n \in F_N$ であるから $d(x_m, x_n) \leq \delta(F_n) < \varepsilon$.

X は完備であるから $\{x_n\}$ はある点 $x \in X$ に収束する.

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, $n \geq k$ ならば $F_n \subset F_k$ であるから $x_n \in F_k$. 点列 $\{x_n\}_{n\geq k}$ は x に収束し, F_k は閉集合であるから $x \in F_k$. よって $x \in \bigcap F_k$.

$\Leftarrow$) $\{x_n\}$ を基本列とする. $A_n = \{x_i\}_{i\geq n} \subset X$, $F_n = A_n^a$ とする. あきらかに $F_n \supset F_{n+1}$.

$\{x_n\}$ は基本列であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $m, n \geq N$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ となる. $n \geq N$ ならば $A_n \subset A_N$ であるから

$$\delta(F_n) = \delta(A_n^a) = \delta(A_n) \leq \delta(A_N) = \sup_{l,m\geq N} d(x_l, x_m) \leq \varepsilon$$

となり $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ である.

よって仮定から $x \in \bigcap F_n$ となる点 x がある. $x, x_n \in F_n$ であるから, $d(x_n, x) \leq \delta(F_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ となり $\{x_n\}$ は x に収束する. □

Remark . 教科書 [1] の証明 (p.30) では後半 x が $\{x_n\}$ の集積点であるとしているが, ある番号から先 $x_n = x$ となるような列の場合そうではない. このような場合を別にして議論してもよいが上のように直接示したほうが簡単であろう.

exercise - 問題集 . 85,90(1),(2),(3),91(2),(3),94(1),(2),(3),101(2)

Definition 2.11.5. (位相空間)X の部分集合 A が第 1 類集合 (set of the first category, meager set) である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i : X \text{ で全疎}$$

Theorem 2.11.6. 完備距離空間 X は第 1 類集合ではない.

Proof. A を全疎な部分集合, O を空でない開集合とする. このとき $\emptyset \neq U \subset U^a \subset O \cap A^e$ となる開集合 U が存在する. 実際, A は全疎であるから A の外部は稠密である (Prop.2.7.11). よって $O \cap A^e$ は空でない開集合である (Prop.2.7.3). U として $O \cap A^e$ の点の適当な ε 近傍をとればよい.

定理を証明するには $A_1, A_2, \ldots$ を全疎な集合としたとき $\bigcup A_i \neq X$ であることをいえばよい.

$X \supset O$ を空でない任意の開集合とする. $U_0 = O$ とする. $k \geq 1$ に対し, 空でない開集合 U_k を $U_k^a \subset U_{k-1} \cap A_k^e$, $\delta(U_k) < 1/k$ となるようにとる. X は完備であるから Thm.2.11.4 より $\bigcap U_k^a \neq \emptyset$. $p \in \bigcap U_k^a$ とする. 任意の $k \geq 1$ に対し $p \in U_k^a \subset A_k^e = A_k^{ac}$ であるから $p \notin A_k^a$. よって $p \notin \bigcup A_k$. □

この証明において $A = \bigcup A_k$ とおくと, $p \in A^c$. また $p \in U_1^a \subset U_0 = O$ であるから $O \cap A^c \neq \emptyset$. よって Prop.2.7.3 より A^c は X で稠密. したがって次が証明された.

Theorem 2.11.7 (ベール (Baire) の稠密性定理). 完備距離空間 X において第 1 類集合の補集合は X で稠密である. □

Theorem 2.11.8. X を完備距離空間, O_k を X で稠密な開集合とすると $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$ は X で稠密である.

Proof. $A_k = O_k^c$ とおくと, A_k は閉集合であるから $A_k^e = A_k^{ac} = A_k^c = O_k$ となり A_k は全疎である.

$E = \bigcap O_k = \bigcap A_k^c = (\bigcup A_k)^c$ であるから前定理より E は稠密である. □

Definition 2.11.9. 部分集合 $A \subset X$ が完備 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 部分距離空間 A が完備.

Theorem 2.11.10. $A \subset X$ とする. A が完備ならば A は閉集合である.

Proof. $\{a_n\}$ を A の点列で, $a_n \to x \in X$ とする. $\{a_n\}$ は (X の) 収束列であるから A の基本列である. A は完備だから $\{a_n\}$ の極限点は A の点である. よって Corollary 2.8.5 より A は閉集合. □

Corollary 2.11.11. $A \subsetneq X$ が稠密ならば A は完備ではない.

Proof. $A^a = X \neq A$ ゆえ A は閉集合ではない. □

Example 2.11.12. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ として $\mathbb{Q}$ を距離空間とみると $\mathbb{Q}$ は完備ではない.

Theorem 2.11.13. X が完備で $A \subset X$ が閉集合ならば A は完備である.

Proof. $\{a_n\}$ を A の基本列とする. $\{a_n\}$ は X においても基本列であり, X は完備なので $\{a_n\}$ は X の点 x に収束する. A は閉集合であるから $x \in A$. よって A は完備である. □

Corollary 2.11.14. X を完備距離空間とすると
$A \subset X$ は閉集合 $\Leftrightarrow$ A は完備 □

Example 2.11.15. (Y, d_Y) が完備距離空間ならば Example 2.10.7 の距離空間 $F(X, Y)$ も完備である.

Proof. $\{f_n\}$ を $F(X, Y)$ の基本列とする. 任意の $x \in X$ に対し,

$$d_Y(f_m(x), f_n(x)) \le \sup_{x \in X} d_Y(f_m(x), f_n(x)) = d(f_m, f_n)$$

であるから $\{f_n(x)\}$ は Y の基本列である. Y は完備なので $\{f_n(x)\}$ は収束する. 写像 $f\colon X \to Y$ を $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in Y$ で定める.

$\{f_n\}$ が f に収束することを示そう. $\{f_n\}$ は基本列であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $m, n \ge N$ ならば $d(f_n, f_m) < \varepsilon/2$ となる. 任意の $x \in X$ に対し, $n \ge N$ ならば

$$d_Y(f_N(x), f(x)) \le d_Y(f_N(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + d_Y(f_n(x), f(x))$$

であり, $f_n(x) \to f(x)$ であるから $d_Y(f_N(x), f(x)) \le \varepsilon/2$. したがって $d(f_N, f) \le \varepsilon/2$. よって $n \ge N$ ならば

$$d(f_n, f) \le d(f_n, f_N) + d(f_N, f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

cf. 本質的に同じであるが後半部分は以下のようにしてもよい.
$m \ge N$ に対し

$$\begin{aligned} d(f_m, f) &= \sup_{x\in X} d_Y(f_m(x), f(x)) = \sup_{x \in X} d_Y(f_m(x), \lim_{n\to\infty} f_n(x)) \\ &= \sup_{x \in X} \lim_{n\to\infty} d_Y(f_m(x), f_n(x)) \\ &\le \sup_{x\in X} \sup_{n \ge N} d_Y(f_m(x), f_n(x)) \\ &= \sup_{n \ge N} \sup_{x \in X} d_Y(f_m(x), f_n(x)) \\ &= \sup_{n\ge N} d(f_m(x), f_n(x)) \le \varepsilon. \end{aligned}$$

ただし 1 行目から 2 行目へは $d_Y(f_m(x), -)$ の連続性を使った. □

Example 2.11.16. Example 2.10.7 の距離に関して $C(X,Y)$ は $F(X,Y)$ の閉集合であるから完備である.

exercise 49. X,Y を集合, $f\colon X\times Y\to\mathbb{R}$ を写像とする.

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y)=\sup_x\sup_y f(x,y)=\sup_y\sup_x f(x,y)$$

を示せ.

exercise 50. X を位相空間, Y を (有界とは限らない) 距離空間とする. $f_0\in F(X,Y)$ をひとつ固定し,

$$F_{f_0}(X,Y)=\{f\mid \sup_{x\in X} d_Y(f_0(x),f(x))<\infty\}$$

とする. $F_{f_0}(X,Y)$ は Example 2.10.7 と同様にして距離空間となることを示せ. また Y が完備ならば $F_{f_0}(X,Y)$ も完備であることを示せ.

Theorem 2.11.17. X を距離空間, Y を完備距離空間, $A\subset X$ を部分集合, $f\colon A\to Y$ を一様連続な写像とする.

このとき f は A^a まで一様連続に拡張され, その拡張は一意的である.

Proof. まず一意性を示そう. $g,h\colon A^a\to Y$ をともに連続写像で A の拡張, すなわち $a\in A$ ならば $g(a)=f(a)=h(a)$ となっているとする. $x\in A^a$ とすると, A の点列 $\{a_n\}$ で $a_n\to x$ となるものが存在する. g,h ともに連続であるから

$$g(x)=g(\lim_{n\to\infty}a_n)=\lim_{n\to\infty}g(a_n)=\lim_{n\to\infty}h(a_n)=h(\lim_{n\to\infty}a_n)=h(x).$$

次に拡張が存在することを示そう. $x\in A^a$ とすると, A の点列 $\{a_n\}$ で $a_n\to x$ となるものが存在する. このとき $\{f(a_n)\}$ は Y の基本列であることを示そう.

f は一様連続であるから, 任意の $\varepsilon>0$ に対しある $\delta>0$ が存在して, $d(a,b)<\delta$ である任意の $a,b\in A$ に対し $d(f(a),f(b))<\varepsilon$ となる. $\{a_n\}$ は収束列であるから基本列である. よってある $N\in\mathbb{N}$ が存在して $m,n\geq N$ ならば $d(a_m,a_n)<\delta$ となる. したがって $m,n\geq N$ ならば $d(f(a_m),f(a_n))<\varepsilon$.

Y は完備であるから $\{f(a_n)\}$ は収束する. この極限点は, x に収束する A の点列のとりかたによらない. 実際 $\{b_n\}$ を, A の点列で x に収束するものとする. 点列 $a_1,b_1,a_2,b_2,\ldots$ を $\{c_n\}$ であらわす. あきらかに $\{c_n\}$ も x に収束する. よって先の議論から $\{f(c_n)\}$ は収束する. $\{f(a_n)\},\{f(b_n)\}$ はともに $\{f(c_n)\}$ の部分列であるからその極限点は一致する (Lemma 1.2.12 参照).

$\bar{f}\colon A^a\to Y$ を $\bar{f}(x)=\lim_{n\to\infty}f(a_n)$ で定義する. あきらかに $\bar{f}$ は f の拡張である.

$\bar{f}$ は一様連続であることを示そう. f は一様連続であるから, 任意の $\varepsilon>0$ に対しある $\delta>0$ が存在して, $a,b\in A$ について $d(a,b)<2\delta$ ならば $d(f(a),f(b))<\varepsilon/2$ となる.

$x, y \in A^a$ で $d(x,y) < \delta$ とする. $\{a_n\}, \{b_n\}$ を A の点列で $a_n \to x$, $b_n \to y$ となるものとする.

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, x) + d(x, y) + d(y, b_n)$$

$$d(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leq d(\bar{f}(x), f(a_n)) + d(f(a_n), f(b_n)) + d(f(b_n), \bar{f}(y))$$

であることに注意する.

ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $d(a_n, x) < \delta/2$, $d(b_n, y) < \delta/2$ となるので, $d(a_n, b_n) < 2\delta$ となる. よって $n \geq N$ ならば $d(f(a_n), f(b_n)) < \varepsilon/2$ である.

$\bar{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$, $\bar{f}(y) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ であるから, ある自然数 $N' \geq N$ が存在して, $n \geq N'$ ならば $d(f(a_n), \bar{f}(x)), d(f(b_n), \bar{f}(y)) < \varepsilon/4$ とできる. したがって

$$d(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leq d(\bar{f}(x), f(a_{N'})) + d(f(a_{N'}), f(b_{N'})) + d(f(b_{N'}), \bar{f}(y)) < \varepsilon.$$

同じことであるが, $d\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ が連続であることを用いて

$$\begin{aligned} d(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) &= d\left(\lim_{n\to\infty} f(a_n), \lim_{n\to\infty} f(b_n)\right) \\ &= d\left(\lim_{n\to\infty} (f(a_n), f(b_n))\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} d(f(a_n), f(b_n)) \leq \varepsilon/2 < \epsilon. \end{aligned}$$

としてもよい. □

exercise 51. X, Y を距離空間とし, $X \times Y$ を Example 2.1.11 のいずれかの距離を与えた距離空間とする. このとき $X \times Y$ の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ について

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n)$$

であることを示せ. (exercise 23 よりいずれの距離も同じ位相を定めることに注意.)

exercise 52. (X, d) を距離空間とする. $X \times X$ に Example 2.1.11 の距離を与えて距離空間とする. $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.

d は一様連続か？

Theorem 2.11.18. X を完備距離空間, $f\colon X \to X$ を縮小写像, すなわち, ある $0 \leq k < 1$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対し $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$ であるとする. このとき f はただひとつの不動点($f(a) = f$) を持つ. さらに, 任意の $x \in X$ に対し $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = a$ である.

Proof. $x \in X$ に対し $x_n = f^n(x)$ とおくと $\{x_n\}$ は基本列であることを示そう.

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$$

であるから $d(x_n, x_{n+1}) \leq k^n d(x, x_1)$ である. $k < 1$ であるから任意の $\varepsilon > 0$ に対し N を十分大きくとれば $k^N d(x, x_1)/(1-k) < \varepsilon$ とできる. $n > m \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} k^i d(x, x_1) \\ &= \frac{k^m - k^n}{1-k} d(x, x_1) \\ &\leq \frac{k^N}{1-k} d(x, x_1) < \varepsilon \end{aligned}$$

となり $\{x_n\}$ は基本列である.

X は完備であるから $\{x_n\}$ は収束する. $a \in X$ をその極限点とする.

f は連続であるから

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

であるから a は f の不動点である.

あるいは任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in N$ が存在して, $n \geq N$ ならば $d(a, x_n) < \varepsilon$ となるから,

$$\begin{aligned} d(a, f(a)) &\leq d(a, x_{N+1}) + d(x_{N+1}, f(a)) \\ &\leq d(a, x_{N+1}) + kd(x_N, a) \\ &< \varepsilon + k\varepsilon = (1+k)\varepsilon, \end{aligned}$$

よって $d(a, f(a)) = 0$, すなわち $f(a) = a$ であり, a は f の不動点である.

$b \in X$ について $f(b) = b$ とすると,

$$0 \leq d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b)$$

より $k < 1$ に注意して $d(a, b) = 0$ をえる. よって $a = b$. □

2.12　完備化

Definition 2.12.1. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする. 写像 $f\colon X \to Y$ は, 任意の $x, x' \in X$ に対し $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ であるとき, 距離を保つという.

f が全単射で距離を保つとき等距離写像という.

距離を保つ写像 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ で, $g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$ となるものが存在するとき, X と Y は距離空間として同型であるという.

exercise 53. 距離を保つ写像は一様連続であることを示せ. また距離空間として同型ならば同相であることを示せ.

exercise 54. $f\colon X \to Y$ が距離を保つ写像であれば, X と $f(X)$ は距離空間として同型であることを示せ.

Definition 2.12.2. X を距離空間とする. 完備距離空間 $\hat{X}$ と, 距離を保つ写像 $f\colon X \to \hat{X}$ で, $f(X)$ が $\hat{X}$ で稠密であるものの組 $(\hat{X}, f)$ を距離空間 X の完備化 (completion) という.

Theorem 2.12.3. 任意の距離空間 X に対しその完備化 $(\hat{X}, f)$ が存在する.

さらに完備化は次の意味で一意的である.

$(\hat{X}', f')$ を別の完備化とすると, 等距離写像 $g\colon \hat{X} \to \hat{X}'$ で, $g \circ f = f'$ となるものが存在する.

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[rr, "g"] & & \hat{X}' \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

exercise 55. Theorem 2.12.3 における $\hat{X}$ と $\hat{X}'$ は距離空間として同型であることを示せ.

Proof of Theorem 2.12.3 一意性. まず完備化の一意性を示そう. $(\hat{X}, f)$, $(\hat{X}', f')$ を X の完備化とする. $g'\colon f(X) \to \hat{X}'$ を $g' = f' \circ f^{-1}$ で定義する.

$$\begin{tikzcd} \hat{X} \arrow[rr, dotted, "g"] & & \hat{X}' \\ f(X) \arrow[u, phantom, "\cup" description] \arrow[rr, "g'"] & & f'(X) \arrow[u, phantom, "\cup" description] \\ & X \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

f, f' がともに距離を保つ写像であるから, g' も距離を保つ, 特に g' は一様連続である. Theorem 2.11.17 により g' は $f(X)^a = \hat{X}$ 上の連続写像 $g\colon \hat{X} \to \hat{X}'$ に拡張される. g' が距離を保つので g も距離を保つ. また $g \circ f = g' \circ f = f'$ である. □

exercise 56. X, Y を距離空間, $A \subset X$ とする. $f\colon A^a \to Y$ を連続写像で $f|_A$ が距離を保つとする. このとき f も距離を保つことを示せ.

以下完備化の存在証明をふたとおりあたえる. どちらも $\mathbb{R}$ の完備性を用いる.

Proof of Theorem 2.12.3 その１. X から $\mathbb{R}$ への写像の全体 $F(X, \mathbb{R})$ を考える. 写像 $\delta\colon X \to F(X, \mathbb{R})$ を $\delta(x) = d_x$ で定める. ただし $d_x\colon X \to \mathbb{R}$ は Example 2.10.4 で与

えた連続写像である. $x_0 \in X$ をひとつ固定して $d_0 := d_{x_0}$ とおく. exercise 50 で与えた完備距離空間 $F_{d_0}(X, \mathbb{R})$ を考える. 任意の $x, y \in X$ について

$$|d_0(y) - d_x(y)| = |d(x_0, y) - d(x, y)| \leq d(x_0, x)$$

であり, $|d_0(x) - d_x(x)| = d(x_0, x)$ であるから

$$\sup_{y \in X} |d_0(y) - d_x(y)| = d(x_0, x)$$

となる. よって $d_x \in F_{d_0}(X, \mathbb{R})$ であり, δ は X から $F_{d_0}(X, \mathbb{R})$ への距離を保つ写像を定める. $\hat{X} = \delta(X)^a$ とすると, $\hat{X}$ は, 完備距離空間の閉集合であるから完備であり, あきらかに $\delta(X)$ は $\hat{X}$ で稠密である. □

exercise 57. X を位相空間, $A \subset B \subset X$ を部分集合とする. このとき A が B で稠密であることと, A が部分空間 B で稠密であることは同値であることを示せ. (すなわち, A の X における閉包を A^a, B における閉包を $\bar{A}$ とすると $A^a \supset B \Leftrightarrow \bar{A} = B$.)

Proof of Theorem 2.12.3 その２. 第二の証明は基本列そのものをその列の収束先とみなすというものである. この証明は難しくはないが確かめることが多いという欠点があるが, X がベクトル空間等の構造を持っている場合に $\hat{X}$ に自然にその構造を拡張できるという利点がある. また同じ考え方により有理数体から実数体を構成することができる.

　X の基本列の全体

$$\mathcal{X} = \Big\{ \{x_n\} \mid \{x_n\} \text{ は } X \text{ の基本列} \Big\}$$

における関係 $\sim$ を $\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{X}$ は $\lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0$ であるとき $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ であると定めると, $\sim$ は同値関係である. この同値関係による商集合 $\mathcal{X}/\sim$ を $\hat{X}$ とかく. 点列 $\{x_n\}$ のあらわす同値類を $[x_n]$ とかく.

　$\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{X}$ に対し, 問題集 80(2) より

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$$

であるから実数列 $\{d(x_n, y_n)\}$ は基本列である. よって収束列である.

$$d'(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$$

と定める. $\{x_n\} \sim \{x'_n\}, \{y_n\} \sim \{y'_n\}$ ならば $d'(\{x_n\}, \{y_n\}) = d'(\{x'_n\}, \{y'_n\})$ であることが容易に確かめられる. よって $[x_n], [y_n] \in \hat{X}$ に対し実数 $\hat{d}([x_n], [y_n])$ を

$$\hat{d}([x_n], [y_n]) = d'(\{x_n\}, \{y_n\})$$

により定めることができる. このようにして定めた

$$\hat{d} \colon \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}$$

は $\hat{X}$ 上の距離関数となる.

$f\colon X \to \hat{X}$ を $x \in X$ を $x_n = x$ という定点列に移す写像とすると, あきらかに f は距離を保つ.

$\{x_n\}$ を基本列とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $m \geq N$ ならば $d(x_m, x_N) < \varepsilon/2$ となる. したがって

$$\hat{d}([x_n], f(x_N)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) < \varepsilon$$

である. すなわち $f(x_N) \in \mathrm{U}_\varepsilon([x_n])$ だから $[x_n] \in f(X)^a$. よって $f(X)$ は $\hat{X}$ において稠密.

$\{[x]^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\hat{X}$ の基本列, $\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ を $[x]^n$ をあらわす X の基本列とする. 上でみたように各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $x_n \in X$ で $\hat{d}([x]^n, f(x_n)) < 1/n$ となるものをえらぶことができる. この点列 $\{x_n\}$ は X の基本列である: $\{[x]^n\}$ は基本列であったから, 自然数 $N \geq 3/\varepsilon$ をえらんで, $m, n \geq N$ ならば $\hat{d}([x]^m, [x]^n) < \varepsilon/3$ とできる.

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_k^m) + d(x_k^m, x_k^n) + d(x_k^n, x_n)$$

であるから $m, n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \lim_{k\to\infty}\{d(x_m, x_k^m) + d(x_k^m, x_k^n) + d(x_k^n, x_n)\} \\ &= \hat{d}(f(x_m), [x]^m) + \hat{d}([x]^m, [x]^n) + \hat{d}([x]^n, f(x_n)) \\ &< \frac{1}{m} + \hat{d}([x]^m, [x]^n) + \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

この基本列 $\{x_k\}$ のあらわす点 $[x_k] \in \hat{X}$ を考えると, x_n のえらびかたから $\lim_{n\to\infty} \hat{d}([x]^n, f(x_n)) = 0$ であり, さきの議論から $\lim_{n\to\infty} \hat{d}(f(x_n), [x_k]) = 0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} \hat{d}([x]^n, [x_k]) \leq \lim_{n\to\infty}\{\hat{d}([x]^n, f(x_n)) + \hat{d}(f(x_n), [x_k])\} = 0.$$

すなわち $\{[x]^n\}$ は $[x_k]$ に収束する. よって $\hat{X}$ は完備である. □

参考文献

[1] 静間良次, 「位相 (現代数学への入門=4)」 (サイエンス社, 1975)

[2] 前原龍二・志賀博雄・手塚康誠・日熊隆則・神山靖彦, 「位相空間問題集」 (琉球大学数学教室, 1993)

[3] 赤攝也, 「実数論講義」 (SEG 出版, 1996)

[4] H. D. エビングハウス・K. ラモトケ, 「数」 (シュプリンガー・フェアラク東京, 1991)

索引

U

W

あ

い

か

き

く

こ

さ

し

す

せ