幾何学序論講義ノート

佃 修一

2019 年 7 月 17 日

注意

- このノートは講義用のノートである．自習を想定したものではない．
- 講義のすすみ方に伴いしばしば内容を更新する．最新版は以下を見よ．
  `http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes`

凡例

- $\mathbb{N}$: 自然数全体
  $\mathbb{Z}$: 整数全体
  $\mathbb{Q}$: 有理数全体
  $\mathbb{R}$: 実数全体
  $\mathbb{C}$: 複素数全体
  これらには, 必要ならば, <u>とくにことわらないかぎり</u>, 通常の加法, 乗法, 距離および（$\mathbb{C}$ を除いては）順序を与えるものとする．
- $\mathbb{R}^n$ の距離あるいは位相は, <u>とくにことわらないかぎり</u>, ユークリッド距離により定まるものとする．
- $A \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B$ は, 左辺 A を右辺 B で定義することを意味する．
- $A \Rightarrow B$ は, A が成り立つならば B も成り立つことを意味する．数学序論の講義での使い方とは意味が違うことに注意せよ．数学序論でいうところの「$A \Rightarrow B$ が真である」ことを, この講義では $A \Rightarrow B$ と表す．

ギリシア文字

大文字	小文字	読み	英語綴
A	α	アルファ	alpha
B	β	ベータ	beta
Γ	γ	ガンマ	gamma
Δ	δ	デルタ	delta
E	ϵ, ε	イプシロン, エプシロン	epsilon
Z	ζ	ゼータ	zeta
H	η	エータ, イータ	eta
Θ	θ, ϑ	シータ, テータ	theta
I	ι	イオタ	iota
K	κ	カッパ	kappa
Λ	λ	ラムダ	lambda
M	μ	ミュー	mu
N	ν	ニュー	nu
Ξ	ξ	グザイ, クシー	xi
O	o	オミクロン	omicron
Π	π, ϖ	パイ	pi
P	ρ, ϱ	ロー	rho
Σ	σ, ς	シグマ	sigma
T	τ	タウ	tau
Υ	υ	ユプシロン, ウプシロン	upsilon
Φ	ϕ, φ	ファイ	phi
X	χ	カイ	chi
Ψ	ψ	プサイ	psi
Ω	ω	オメガ	omega

(注) 読みは日本の数学において一般的と思われるものを示したが, 他の読み方をする人もあると思う.

目次

第 1 章

集合

1.1　論理式

数学序論で学んだ論理式を復習する.

定義 1.1.1.

1. 二つの命題 p, q は, その真偽が一致するとき**論理同値**であるといって, $p \equiv q$ と書く.
2. 同じ変数を持つ二つの述語 P, Q は, 変数にどのような値を代入しても, その真偽が一致するとき**論理同値**であるといって, $P \equiv Q$ と書く.

1.1.1　命題と論理結合子

与えられた一つあるいは二つの命題から新しい命題を作ることを考える. その際, 出来た命題の真偽はもとの命題の真偽だけで定まるように作りたい. 以下 1 は真を, 0 は偽をあらわす.

一つの命題 p の真偽に応じて真偽を定める方法は次の $2^2 = 4$ 通り. (0) は p の真偽によ

p	(0)	(1)	(2)	(3)
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1

表 1.1

らず偽, (3) は p の真偽によらず真, (2) は p と同じだから新たに名前をつける意味がありそうなのは (1) である.

定義 1.1.2. 次の真理表で真偽が定まる命題 $\neg p$ を p の**否定 (negation)** という.

p	$\neg p$
1	0
0	1

すなわち, $\neg p$ は p が真のとき偽, p が偽のとき真である.

$\neg p$ は普通「p でない」と読む.

二つの命題 p, q の真偽に応じて真偽を定める方法は次の $2^4 = 16$ 通り.

p	q	(0)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	(15)	(14)	(13)	(12)	(11)	(10)	(9)	(8)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

表 1.2

下の段の (n) と上の段の $(15-n)$ は互いに他の否定だから下の段だけ考えよう. (15) は常に真, (12) は p の真偽と同じ, (10) は q の真偽と同じ, (11) と (13) は p, q を入れかえる（2 行目と 3 行目を入れかえる）と移り合うので, 新たに名前をつける意味がありそうなのは (14), (11),(9),(8) の 4 つ.

定義 1.1.3. 次の真理表を考える.

p	q	(14)	(11)	(9)	(8)
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0

1. (14) で真偽が定まる命題を $p \vee q$ と書き, p と q の**論理和 (disjunction)** あるいは選言（せんげん）という.

$p \vee q$ は普通「p または q」と読む.

2. (8) で真偽が定まる命題を $p \wedge q$ と書き, p と q の**論理積 (conjunction)** あるいは**連言**(れんげん)という.

   $p \wedge q$ は普通「p かつ q」と読む.
3. (11) で真偽が定まる命題を $p \to q$ と書く. また記号 $\to$ は**含意**(がんい) **(implication)** 等とよばれる.

   $p \to q$ は普通「p ならば q」と読む.

   (ちなみに (13) は $q \to p$ である.)
4. (9) で真偽が定まる命題を $p \leftrightarrow q$ と書く.

   $p \leftrightarrow q$ は普通「p と q は同値」と読む.

記号 $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$ を**論理結合子 (logical connective)** という.

注意*!* . 数学序論の教科書 [6] では含意をあらわす記号として「$\Rightarrow$」を用いているが, この講義では「$\to$」を用いる.

この講義では「$p \Rightarrow q$」を「$p \to q$ が真である」, すなわち, p が成り立てば q も成り立つという意味で使う.

注意 . 上で「意味がありそうなのは (14), (11),(9),(8) の 4 つ」と書いたが

1. 実際には他のものにも名前がついている. 例えば (7) は**否定論理積**, **NAND** 等とよばれ, $p|q$ といった記号であらわされる.
2. これらは互いに無関係なわけではなく, 例えば $p \leftrightarrow q$ は $\wedge$ と $\to$ を使って $(p \to q) \wedge (q \to p)$ とあらわせる.

   実は NAND だけを用いて表 1.1, 1.2 に出てくるものを全てあらわすことができる. 例えば $\neg p \equiv p|p$, $p \wedge q \equiv (p|q)|(p|q)$ といった具合.

問* 1. $p \vee q$ を NAND だけであらわせ.

定義 1.1.4. 0 と 1 からなる集合を [2] と書く:

$$[2] := \{0, 1\}.$$

定義 1.1.2, 1.1.3 の真理表を見ると, $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ は集合 [2] 上に(足し算や掛け算のような)**二項演算 (binary operation)** を, $\neg$ は**単項演算 (unary operation)** を定めていると見ることができる. $0 \vee 1 = 1$ とか $\neg 0 = 1$ といった具合.

$p \vee q$

$p \backslash q$	0	1
0	0	1
1	1	1

$p \wedge q$

$p \backslash q$	0	1
0	0	0
1	0	1

$p \to q$

$p \backslash q$	0	1
0	1	1
1	0	1

$p \leftrightarrow q$

$p \backslash q$	0	1
0	1	0
1	0	1

明らかに $p \to q$ を除いて p と q に関して対称である.

定理 1.1.5. p, q, r を命題とする. 次が成り立つ.

1. （交換法則, commutative law）
   (i) $p \vee q \equiv q \vee p$.
   (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
2. （結合法則, associative law）
   (i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.
   (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.
3. （分配法則, distributive law）
   (i) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
   (ii) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
4. $\neg(\neg p) \equiv p$.
5. (i) $p \vee (\neg p) \equiv 1$.
   (ii) $p \wedge (\neg p) \equiv 0$.
6. （ド・モルガンの法則, de Morgan's law）
   (i) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.
   (ii) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.

定理 1.1.6. p, q を命題とする. 次が成り立つ.

1. $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$.
2. $p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p)$.
3. $\neg(p \to q) \equiv p \wedge (\neg q)$.

証明. いずれも真理表を書けば分かる.

なお, 定理 1.1.5.6 については, 4 を使えば, 一方を示せば他方はすぐ分かる.

また 定理 1.1.6.2, 3 は, 定理 1.1.5 と 定理 1.1.6.1 を使って示すこともできる. □

注意*!* . 間違える人がよくいるが, $p \to q$ の否定は $p \wedge (\neg q)$ であって, $p \to (\neg q)$ ではない.

注意 . すぐ分かるように $\to$ は可換ではなく $(p \to q \not\equiv q \to p)$, 結合的でもない $(p \to (q \to r) \not\equiv (p \to q) \to r)$. 定理 1.1.5 と定理 1.1.6.1 を使えば $\to$ を含む式をいろい

ろと変形できる.

注意．$p, q, r \in [2] = \{0, 1\}$ とすると定理 1.1.5 と定理 1.1.6 の式で $\equiv$ を $=$ としたものが成立する.

1.1.2　述語と量化子

「x は偶数である」等のように変数（今の場合 x）を含む文で, 変数に値を代入すると真偽が判定できるものを**述語 (predicate)** というのであった. 定理 1.1.5, 定理 1.1.6 は述語に対しても同様に成り立つ.

定理 1.1.7. P, Q, R を述語とする. 次が成り立つ.

1. （交換法則）
   (i) $P \vee Q \equiv Q \vee P$.
   (ii) $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$.
2. （結合法則）
   (i) $P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$.
   (ii) $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$.
3. （分配法則）
   (i) $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.
   (ii) $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
4. $\neg(\neg P) \equiv P$.
5. (i) $P \vee (\neg P) \equiv 1$.
   (ii) $P \wedge (\neg P) \equiv 0$.
6. （ド・モルガン (de Morgan) の法則）
   (i) $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$.
   (ii) $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$.

定理 1.1.8. P, Q を述語とする. 次が成り立つ.

1. $P \to Q \equiv (\neg P) \vee Q$.
2. $P \to Q \equiv (\neg Q) \to (\neg P)$.
3. $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge (\neg Q)$.

述語は変数に値を代入すると命題となるが, 述語から命題を作る別の方法がある. 変数 x に関する述語 $P(x)$ に対し, x に代入したときに $P(a)$ が真となるような a の量, 個数を考えてみる.

例 1.1.9. $x \in \{1,2,3,4,5\}$ に関する述語 $P(x) =$「x は偶数である」に対し以下の文章を考える.

1. $P(x)$ が真となるような $x \in \{1,2,3,4,5\}$ は 1 個である.
2. $P(x)$ が真となるような $x \in \{1,2,3,4,5\}$ は 2 個である.
3. $P(x)$ が真となるような $x \in \{1,2,3,4,5\}$ は全てである.
4. $P(x)$ が真となるような $x \in \{1,2,3,4,5\}$ はない.
5. $P(x)$ が真となるような $x \in \{1,2,3,4,5\}$ が少なくとも 1 個はある.

$P(x)$ が真となる $x \in \{1,2,3,4,5\}$, つまり $1,2,3,4,5$ のうち偶数であるのは $2,4$ の 2 個だから 1, 3, 4 は偽, 2, 5 は真である. とくにこれらの文章は全て命題である.

このように述語 $P(x)$ に対し, それが真となるような x の量を指定することで命題を作ることができる. 指定する量として最も基本的であるのは「全て」と「無い」であろう. 実際に数学で使う際には「無い」よりはその否定である「(少なくとも 1 個は) ある」の方が使いよい. この「全て」と「ある」については記号が用意されている.

定義 1.1.10. $P(x)$ を変数 x に関する述語とする.

1. 「全ての x に対して $P(x)$ が真である」という命題を
$$\forall x : P(x)$$
と表し, 普通「任意の x に対して, $P(x)$ が成り立つ」とか「任意の x に対して, $P(x)$」と読む.
2. 「$P(x)$ が真であるような x が少なくとも 1 個はある」という命題を
$$\exists x : P(x)$$
と表し, 普通「ある x が存在して, $P(x)$ が成り立つ」とか「ある x が存在して, $P(x)$」と読む.

注意 . このように述語が真となるような変数の量を指定する記号を**量化子 (quantifier)** という. $\forall$ は**全称量化子 (universal quantifier)**, あるいは**全称記号**と呼ばれる. $\exists$ は**存在量化子 (existential quantifier)**, あるいは**存在記号**と呼ばれる.

注意 . 述語を考える際, 普通, 変数に代入できるものの範囲をあらかじめ決めておく.

例えば, 「$x^2 \geq 1$」という式の x に「りんご」を代入した「りんご$^2 \geq 1$」という式は(何らかの約束をしないかぎり) 意味をなさない. 特に真偽を判定できるものではない.

x が整数をあらわす変数であると約束しておけば, 「$\forall x : x^2 \geq 1$」は真の命題である.

x が実数をあらわす変数であると約束しておけば, 「$\forall x : x^2 \geq 1$」は偽の命題である.

定義 1.1.11. $P(x)$, $Q(x)$ を変数 x に関する述語とする.

1. $\forall x : P(x) \to Q(x)$ という命題を
$$\forall x(P(x)) : Q(x)$$
と書くことがある. ふつうこれを「$P(x)$ が成り立つような任意の x に対して, $Q(x)$」等と読む.
2. $\exists x : P(x) \wedge Q(x)$ という命題を
$$\exists x(P(x)) : Q(x)$$
と書くことがある. ふつうこれを「$P(x)$ が成り立つようなある x が存在して, $Q(x)$」等と読む.

注意 . 変数が二つ以上ある述語についても同様なことを繰り返して命題を作ることができるが, 記法は次の規約によることとする. 例えば $P(x, y)$ が変数 x, y に関する述語であるとき,
$$\forall y : P(x, y)$$
は変数 x に関する述語であり,
$$\forall x : (\forall y : P(x, y))$$
は命題である. この命題を
$$\forall x, \forall y : P(x, y) \quad \text{とか} \quad \forall x \forall y : P(x, y)$$
等と書く.

量化子 $\forall$, $\exists$ の順番について次が成り立つ.

定理 1.1.12. $P(x, y)$ を変数 x, y に関する述語とする. 次が成り立つ.

1. $\forall x, \forall y : P(x, y) \equiv \forall y, \forall x : P(x, y)$.
2. $\exists x, \exists y : P(x, y) \equiv \exists y, \exists x : P(x, y)$.

証明. 意味を考えれば明らか. □

注意*!* . 一般に $\forall x, \exists y : P(x, y) \not\equiv \exists y, \forall x : P(x, y)$ である.

量化子 $\forall$, $\exists$ を含む命題の否定について次が成り立つ.

定理 1.1.13. $P(x), Q(x)$ を変数 x に関する述語とする. 次が成り立つ.

1. $\neg\bigl(\forall x : P(x)\bigr) \equiv \exists x : \neg P(x)$.
2. $\neg\bigl(\exists x : P(x)\bigr) \equiv \forall x : \neg P(x)$.
3. $\neg\bigl(\forall x(P(x)) : Q(x)\bigr) \equiv \exists x(P(x)) : \neg Q(x)$.
4. $\neg\bigl(\exists x(P(x)) : Q(x)\bigr) \equiv \forall x(P(x)) : \neg Q(x)$.

証明. 1, 2 は意味を考えれば明らか. 3 も意味を考えれば分かると思うが, 少し形式的にやると,

$$\begin{aligned}\neg\bigl(\forall x(P(x)) : Q(x)\bigr) &= \neg\bigl(\forall x : P(x) \to Q(x)\bigr)\\ &\equiv \exists x : \neg\bigl(P(x) \to Q(x)\bigr)\\ &\equiv \exists x : P(x) \wedge \neg Q(x)\\ &\equiv \exists x(P(x)) : \neg Q(x).\end{aligned}$$

4 も同様. □

量化子 ∀, ∃ と論理結合子 ∨, ∧, → の関係については数学序論のノート (`http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/joron-note.html`, §12) に少しまとめてあるが, この後すぐ使うであろうもの, 注意が必要なものをいくつか挙げておく.

定理 1.1.14. $P(x)$, $Q(x)$ を変数 x に関する述語, r を命題（あるいは変数 x を含まない述語）とする. 次が成り立つ.

1. $\forall x : r \vee Q(x) \equiv r \vee (\forall x : Q(x))$.
2. $\exists x : r \wedge Q(x) \equiv r \wedge (\exists x : Q(x))$.
3. $\forall x(P(x)) : r \vee Q(x) \equiv r \vee (\forall x(P(x)) : Q(x))$.
4. $\exists x(P(x)) : r \wedge Q(x) \equiv r \wedge (\exists x(P(x)) : Q(x))$.
5. $\forall x : P(x) \wedge Q(x) \equiv (\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$.
6. $\exists x : P(x) \vee Q(x) \equiv (\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$.

証明. 1, 2 は意味を考える, あるいは r の真偽で場合分けして両辺の真偽を比べる等すればよい. 3 も同様に考えてもよいが,

$$p \to (r \vee q) \equiv (\neg p) \vee (r \vee q) \equiv r \vee ((\neg p) \vee q) \equiv r \vee (p \to q)$$

に注意すれば 1 を使って

$$\begin{aligned}\forall x(P(x)) : r \vee Q(x) &= \forall x : P(x) \to (r \vee Q(x))\\ &\equiv \forall x : r \vee (P(x) \to Q(x))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv r \vee (\forall x : P(x) \to Q(x)) \\
&= r \vee (\forall x(P(x)) : Q(x))\,.
\end{aligned}
$$

4 も同様だがもう少しやさしい. 5,6 も意味を考える, あるいは両辺の真偽を比べる等すればよい. □

注意*!* . 上の 5,6 で ∀ と ∃ を入れかえたものは一般には正しくない.

問 2. 次の二つの命題の真偽が異なるような $P(x)$, $Q(x)$ の例を挙げよ.

1. $\forall x : P(x) \vee Q(x)$
2. $(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$

1.2　集合

集合の記法等の復習もかねて**ラッセルのパラドックス (Russell's paradox)** を紹介しよう.

定義 1.2.1.

1. 我々の思考の対象で条件のはっきりしたものの集まりを**集合 (set)** とよぶ.
2. S を集合とするとき, S を構成する個々のものを S の**元**(げん)または**要素 (element)** という.
   - x が S の元であることを,「x が S に属する」,「x が S に含まれる」,「S が x を含む」 等といって, $x \in S$ または $S \ni x$ と表す.
   - $\neg(x \in S)$ であること, すなわち x が S の元でないことを,「x は S に属さない」,「x は S に含まれない」,「S は x を含まない」等といって, $x \notin S$ または $S \not\ni x$ と表す.

定義 1.2.2. A, B を集合とする.

1. A は B の**部分集合 (subset)** である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A の任意の元 x に対して, $x \in B$ である.
   論理式を使って書けば, $\forall x : x \in A \to x \in B$ (別の書き方をすれば $\forall x \in A : x \in B$) が真であるということ.
   このとき, $A \subset B$ または $B \supset A$ と表す.
2. 集合 A と集合 B は**等しい** $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $A \subset B$ かつ $B \subset A$ である.
   このとき, $A = B$ と書く.

定義 1.2.3. 集合の表し方.

1. **外延的**(がいえんてき) **(extensional) 記法**
   集合の元をすべて列挙し, それを括弧 $\{\}$ でくくる.
   元が無限個ある場合, あるいは有限個でも全てを列挙出来ない場合, 誤解を生じるおそれが無ければ $\ldots$ を使う.
2. **内延的**(ないえんてき) **(intensional) 記法**
   何某かの条件をみたすもの全体として集合を表す方法. $P(x)$ を変数 x に関する述語とする. $P(x)$ が真となるようなすべての x からなる集合を $\{x \mid P(x)\}$ と表す.
   変数 x のとる値がある集合 U に制限されているとき, $P(x)$ が真となるようなすべての x (ただし $x \in U$) からなる集合を $\{x \in U \mid P(x)\}$ と表す. つまり, $\{x \in U \mid P(x)\} = \{x \mid x \in U \wedge P(x)\}$ である.

注意．$P(x) \equiv Q(x)$ であれば, $\{x \mid P(x)\} = \{x \mid Q(x)\}$ である．実際, $P(x) \equiv Q(x)$ であるとき,

$$\begin{aligned} a \in \{x \mid P(x)\} &\Leftrightarrow P(a) \text{ が真} \\ &\Leftrightarrow Q(a) \text{ が真} \\ &\Leftrightarrow a \in \{x \mid Q(x)\} \end{aligned}$$

例 1.2.4. $n \in \mathbb{N}$ に対し n より小さい非負整数全体のなす集合を $[n]$ と書く:

$$[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\} = \{i \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq i < n\}.$$

$[n]$ は n 個の元を持つ集合である．例えば

$$\begin{aligned} [1] &= \{0\} \\ [2] &= \{0, 1\} \\ [3] &= \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

といった具合．$n = 0$ の場合もこの記号を使うことがある．

$$[0] = \{i \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq i < 0\} = \emptyset.$$

例 1.2.5 (ラッセルのパラドックス, Russell's paradox)**.** 次の集合

$$S = \{X \mid X \notin X\}$$

を考える．つまり集合 X であって, X 自身は X の元ではないようなものたちの集まりが S である．例えば $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$ だから $\mathbb{N} \in S$ である．さて, S については $S \in S$ と $S \notin S$ どちらが成り立つだろうか？

$S \in S$ とすると, S の定め方から $S \notin S$ となる．$S \notin S$ とすると, S の定め方から $S \in S$ となる．すなわち S は S の元でありかつ, S の元ではないということになってしまう．

このように集合やその構成法をあまり素朴に考えていると困ったことがおきてしまう．現在ではこれらの困難を回避するため**公理的集合論 (axiomatic set theory)** により集合をあつかうことが多い．中でも **Zermelo-Fraenkel の公理系＋選択公理 (ZFC)** という公理系（集合をあつかうためのルール）が一般的に用いられている．（が, 他にも色々な立場, 方法がある.）ZFC については集合論の本には必ず載っているし, [2] 等にも短い解説がある．普通の数学をやる分にはあまりこういったことを意識する必要は無いし, そういう機会も少ない．この講義では素朴な立場で集合をあつかうが, 選択公理については少しふれる．

1.3　集合の演算

数学序論で学んだ集合の演算を思い出そう.

定義 1.3.1.

1. A, B を集合としたとき, A, B の少なくとも一方に属する要素を全部集めたものを A と B の**合併集合**（または**和集合 (union)**, **結び**）といって, $A \cup B$ で表す.
   つまり
   $$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$
2. A と B の両方に属する要素を全部集めたものを A と B の**共通集合**（または**積**, **交わり (intersection)**）といって, $A \cap B$ で表す.
   つまり
   $$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$
   $A \cap B = \emptyset$ のとき, A と B は**互いに素 (disjoint)** という.
   また, A と B が互いに素であるとき, 和集合 $A \cup B$ を $A \amalg B$ と書き, A と B の **非交和 (disjoint union)** ということがある.
3. A に属して, B に属さない要素の全体を A から B を引いた**差集合 (difference)** といって, $A - B$ または $A \setminus B$ で表す.
   つまり
   $$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$
4. ある集合 X を固定して, X の部分集合についてのみ考えるとき, $X - A$ を A の（X に関する）**補集合 (complement)** といって A^c であらわす. すなわち
   $$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\} = \{x \in X \mid \neg(x \in A)\}.$$
   このとき X を**普遍集合 (universal set)** あるいは**全体集合**という.

次の補題は集合の包含関係を考えるときに基本的であり, 以降ことわりなく使う. 証明は定義からほとんど明らかである.

補題 1.3.2. A, B, C を集合とする. 次が成り立つ.

1. $A \subset B$ かつ $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.
2. $A \subset C$ かつ $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$.
3. $A \supset C$ かつ $B \supset C \Rightarrow A \cap B \supset C$.

問 3. 上の 2, 3 では逆も成り立つことを示せ.

定理 1.1.7 から次が分かる.

定理 1.3.3. A, B, C を集合とする. 次が成り立つ.

1. （交換法則, commutative law）
   (i) $A \cup B = B \cup A$.
   (ii) $A \cap B = B \cap A$.
2. （結合法則, associative law）
   (i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
   (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
3. （分配法則, distributive law）
   (i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

証明. 3.(i) を示してみよう.

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B \cup C\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\ &= \{x \mid\ (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} \\ &= \{x \mid\ (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)\} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C)\,. \end{aligned}$$

他も同様である. もちろん, 補題 1.3.2 等を使って, 左辺が右辺に含まれ, 右辺が左辺に含まれるということを示してもよい. □

定理 1.3.4. X を全体集合, $A, B \subset X$ とする. 次が成り立つ.

1. $(A^c)^c = A$.
2. (i) $A \cup A^c = X$.
   (ii) $A \cap A^c = \emptyset$.
3. （ド・モルガンの法則, de Morgan's law）
   (i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
   (ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

証明. x は X の元を表すとする（述語の変数と考えた時の変域を X とする）. このとき,

$$x \in A^c \Leftrightarrow \neg(x \in A)$$

である.

1.

$$\begin{aligned}(A^c)^c &= \{x \in X \mid \neg(x \in A^c)\} \\ &= \{x \in X \mid \neg(\neg(x \in A))\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A\} \\ &= A\end{aligned}$$

2. (i)

$$\begin{aligned}A \cup A^c &= \{x \in X \mid x \in A \vee x \in A^c\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A \vee \neg(x \in A)\}\end{aligned}$$

$x \in A \vee \neg(x \in A)$ は常に真だから

$$= X.$$

他も同様である. □

差集合について時々使うかもしれない性質をまとめておく.

定理 1.3.5. A, B, C を集合とする. 次が成り立つ.

1. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.
2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.
3. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

注意 . 上記 1, 2 で, $A = X$, $B, C \subset X$ としたものがド・モルガンの法則. 3 で $A = B = X$, $C \subset X$ とすると, $(C^c)^c = C$ という式になる.

証明. 1.

$$\begin{aligned}x \in A - (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \cap C \\ x \in (A - B) \cup (A - C) &\Leftrightarrow x \in A - B \vee x \in A - C\end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned}x \in A \wedge x \notin B \cap C &\equiv x \in A \wedge \neg\,(x \in B \cap C) \\ &\equiv x \in A \wedge \neg\,(x \in B \wedge x \in C) \\ &\equiv x \in A \wedge (\neg x \in B \vee \neg x \in C) \\ &\equiv x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C) \\ &\equiv (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \\ &\equiv x \in A - B \vee x \in A - C\end{aligned}$$

ゆえ

$$x \in A - (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \cup (A - C)$$

2. 同様.

3.

$$\begin{aligned} x \in A \wedge x \notin B - C &\equiv x \in A \wedge \neg (x \in B - C) \\ &\equiv x \in A \wedge \neg (x \in B \wedge x \notin C) \\ &\equiv x \in A \wedge (\neg x \in B \vee \neg x \notin C) \\ &\equiv x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \\ &\equiv (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\equiv x \in A - B \vee x \in A \cap C \end{aligned}$$

□

注意．この講義では記号 $\Leftrightarrow$ は左辺と右辺が同値であることを表す．すなわち, 左辺が成り立てば右辺も成り立ち, 右辺が成り立てば左辺も成り立つということ．言い換えれば「左辺 $\leftrightarrow$ 右辺」という命題が真であるということ.

問 4. $\cup, \cap, -,\ \ {}^c$ の間の関係を表す（定理 1.3.3, 1.3.5 等のような）「公式」を作って, それを証明せよ.

問題集． 4(1), 6, 7(1)(2)(3)(4)

定義 1.3.6. X を集合とする．X の部分集合の全てを要素として持つ集合を X の**冪（べき）集合 (power set)** といって $\mathcal{P}(X)$ で表す．つまり

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

定義から明らかに次が成り立つ.

定理 1.3.7.
1. $A \subset X \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(X)$.
2. $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$.
3. $X \in \mathcal{P}(X)$.

例 1.3.8.
1. $\mathcal{P}([2]) = \mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.
2. $\mathcal{P}([1]) = \mathcal{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\}$.
3. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. 右辺は空集合ではない．空集合という元を一つ持つ集合である.

問 5. $\mathcal{P}([3])$ を求めよ.

定義 1.3.9. 二つの対象 a, b に対し, それを順に並べて括弧でくくったもの (a, b) を a と b の**順序対**(じゅんじょつい) **(ordered pair)** という.

二つの順序対 $(a, b), (a', b')$ は, $a = a'$ かつ $b = b'$ であるときに**等しい**といって, $(a, b) = (a', b')$ と書く.

注意．二つの対象からなる集合 $\{a, b\}$ については, $\{a, b\} = \{b, a\}$ である. 一方, 順序対の場合, $a \neq b$ であれば, $(a, b) \neq (b, a)$ である.

注意．集合論では a と b の順序対を $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ により定義することが多い.

定義 1.3.10. X, Y を集合とする. 次で与えられる集合 $X \times Y$ を X と Y の**デカルト積** **(Cartesian product)** という. デカルト積のことを**直積**ということも多い.

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

$X = Y$ のとき, $X \times X$ を X^2 と書くことが多い.

例 1.3.11.

$$\begin{aligned} [3] \times [4] = \{0,1,2\} \times \{0,1,2,3\} = \big\{&(0,0),(1,0),(2,0),\\ &(0,1),(1,1),(2,1),\\ &(0,2),(1,2),(2,2),\\ &(0,3),(1,3),(2,3)\big\} \end{aligned}$$

例 1.3.12. $X \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times X$. 実際, $y \in \emptyset$ となる y は無いので, $x \in X \wedge y \in \emptyset$ は常に偽.

三つ以上の集合のデカルト積も考えることができる.

定義 1.3.13. $n \in \mathbb{N}$ とし, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を集合とする.

$(X_1 \times X_2) \times X_3$ を, $X_1 \times X_2 \times X_3$ と書く. また, $X_1 \times X_2 \times X_3$ の元は, $((x_1, x_2), x_3)$ とは書かずに, (x_1, x_2, x_3) と書く.

より一般に, 帰納的に

$$X_1 \times \cdots \times X_n := (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$$

と定める. また, $X_1 \times \cdots \times X_n$ の元は $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ と書く.

$X_1 = \cdots = X_n = X$ であるとき, $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{ 個}}$ を X^n と書くことが多い.

問 6. $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$ とする. 次を適当に図示せよ.

1. $I \times I$.
2. $S^1 \times I$.
3. $S^1 \times S^1$.
4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

注意．$\mathbb{R}^2$ を Gauss 平面 $\mathbb{C}$ と同一視（$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ と $x + yi \in \mathbb{C}$ を同一視）して $S^1 \subset \mathbb{C}$ と見ると, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ である.

問題集． 13, 14

1.4　関係と写像

1.4.1　関係

定義 1.4.1. X, Y を集合とする.

R が X と Y の間の**二項関係 (binary relation)** である

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ R が $X \times Y$ の部分集合である.

また, $(x, y) \in R$ であるとき, xRy と書く.

とくに誤解が生じなければ二項関係のことを単に**関係 (relation)** という.

例 1.4.2. $X = Y = \mathbb{R}$ とする.

1. $$\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

   とすると, $x\Delta y \Leftrightarrow x = y$.

2. $$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \leq y\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

   とすると, $xLy \Leftrightarrow x \leq y$.

3. $$\Gamma = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

   とすると, $x\Gamma y \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

1.4.2　写像

例 1.4.2 の最後の Γ は, 関数 $f(x) = 2x + 1$ のグラフである. 一般に関数が与えられるとそのグラフを作れるが, 逆にグラフが分かればもとの関数も分かる. そういう意味で, グラフを考えることと関数を考えることは同じである. 集合論的には, グラフの方が関数の本体であると考える. （のではあるけれど, 大抵の人にとってはそのように考えて物事が分かりやすくなるわけでもないので, 今までどおり X の各元それぞれに y の元をただ一つ対応させる規則と思ってよい.）

定義 1.4.3. X, Y を集合とする.

f が X から Y への**写像 (map)** である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}1. & f \text{ は } X \text{ と } Y \text{ の間の関係である.}\\ 2. & \text{任意の } x \in X \text{ に対し, ある } y \in Y \text{ がただ一つ存在して,}\\ & (x,y) \in f \text{ となる.}\end{cases}$$

f が X から Y への写像であることを, $f\colon X \to Y$ あるいは $X \xrightarrow{f} Y$ 等と表し, X を f の**定義域 (domain)** あるいは**始域**, **source** 等という. Y に名前をつけてよぶことは少ないが, **終域**, **codomain**, **target** 等という.

f を $X \times Y$ の部分集合と思ったとき, その部分集合を写像 f の**グラフ (graph)** という. 同じ記号を使うとややこしいので $f\colon X \to Y$ のグラフを Γ_f 等と書く.

また, $(x,y) \in \Gamma_f$ であるとき, y を $f(x)$ と書き, **x の f による像 (image)** という : $y = f(x) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x,y) \in \Gamma_f$. 明らかに $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ である.

注意 . f を X から Y への写像とする. 定義より, $(x,y),(x,y') \in \Gamma_f$ ならば $y = y'$ である. したがって, 例 1.4.2.2 の L は写像ではない. 残りの二つは写像である.

定義 1.4.4. $f,g\colon X \to Y$ を写像とする. 任意の $x \in X$ に対し $f(x) = g(x)$ となるとき, 写像 f と g は**等しい**といって $f = g$ と書く.

注意 . $f = g \Leftrightarrow \Gamma_f = \Gamma_g$ である.

例 1.4.5. 写像 $f,g\colon \{0,1\} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ により定めると, $f = g$ である.

例 1.4.6. X を集合とする.

1. 空集合 $\emptyset$ から X への写像がただ一つ存在する.
   $X \neq \emptyset$ であれば, X から $\emptyset$ への写像は存在しない.
2. 1 点からなる集合 $[1] = \{0\}$ を考える.
   X から $[1]$ への写像がただ一つ存在する.
   $[1]$ から X への写像を定めることと, X の元を一つ指定することは同じことである. もちろん, これらのことは $\{0\}$ に特有の性質ではなく, 元の個数が 1 個である集合全てに対して成り立つ. 元の個数が 1 個である集合を（そのまんまだが）**1 元集合 (singleton)** という.
   $0 \in [1]$ を $x \in X$ にうつす $[1]$ から X への写像を $x\colon [1] \to X$ と書くことがある.
3. X を集合, $X \neq \emptyset$ とする. 写像 $s\colon X \to \mathcal{P}(X)$ を $s(x) = \{x\}$ により定める. これを **singleton map** という.
   $X = \emptyset$ のときは, 必要ならば, ただ一つ存在する写像 $\emptyset \to \mathcal{P}(\emptyset)$ を singleton map と考える.
   （s は単射である.）

定義 1.4.7. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする．このとき $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ により定まる写像 $g \circ f\colon X \to Z$ を f と g の**合成 (composition)** あるいは**合成写像 (composite map)** という．$g \circ f$ を gf と略記することもある．

定義 1.4.8. 1. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon X \to Z$ を写像とする．$h = gf$ であるとき次の図式は**可換 (commutative)** である, あるいは**可換図式 (commutative diagram)** であるという：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & . \end{tikzcd}$$

2. $f_i\colon X \to Y_i$, $g_i\colon Y_i \to Z$（$i = 1, 2$）を写像とする．$g_1 f_1 = g_2 f_2$ であるとき次の図式は**可換 (commutative)** である, あるいは**可換図式 (commutative diagram)** であるという：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & Y_1 \arrow[d, "g_1"] \\ Y_2 \arrow[r, "g_2"'] & Z. \end{tikzcd}$$

例 1.4.9. 写像 $f\colon X \to Y$ は, ある $y_0 \in Y$ が存在して, 任意の $x \in X$ に対し, $f(x) = y_0$ となるとき,（y_0 に値をとる）**定値写像 (constant map)** という．

写像 $f\colon X \to Y$ が定値写像であることと, ある $y_0 \in Y$ が存在して, 次の図式が可換となることは同値である：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & {[1]} \arrow[ur, "y_0"'] & . \end{tikzcd}$$

例えば, $c \in \mathbb{R}$ としたとき, $f(x) = c$ で定義される定数関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は, c に値をとる定値写像である．

注意．任意の $x, x' \in X$ に対し $f(x) = f(x')$ であるときに定値写像とする流儀もある．二つの定義は $X = Y = \emptyset$ の場合に（のみ）異なる．

定義 1.4.10. 集合 X の各要素をそれ自身にうつす X から X への写像を X の**恒等写像 (identity map)** という．恒等写像を id_X や 1_X といった記号で表すことが多い．

$$\mathrm{id}_X\colon X \to X,$$
$$\mathrm{id}_X(x) = x.$$

恒等写像のグラフは**対角線集合 (diagonal set)** である：

$$\Gamma_{\mathrm{id}_X} = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X.$$

命題 1.4.11. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ を写像とする．このとき次が成り立つ．

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
2. $f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$.

証明．明らか． □

問* 7. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ を写像とする．

1. 合成 gf のグラフ Γ_{gf} はどのような集合か？
2. $h(gf) = (hg)f$ となることをグラフを用いて説明せよ．

定義 1.4.12. X を集合, $A \subset X$ を部分集合とする．

1. A の要素 $a \in A$ を X の要素 $a \in X$ と見ることにより得られる A から X への写像を**包含写像 (inclusion map)** という．つまり $i\colon A \to X$ を包含写像とすると $i(a) = a$.
   また, $i\colon A \to X$ が包含写像であるとき, $i\colon A \hookrightarrow X$ と書くこともある．
2. $f\colon X \to Y$ を写像とする．包含写像 $i\colon A \to X$ と f の合成 $f \circ i$ を f の A への**制限 (restriction)** といい, $f|_A$, $f|A$ 等と表す：
$$f|_A = f \circ i\colon A \to Y.$$

定義 1.4.13. $f\colon X \to Y$ を写像とする．

1. X の部分集合 A に対して, Y の部分集合
$$\{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$$
   を, **集合 A の f による像 (image)** といって $f(A)$ で表す．
2. $f(X)$ を f の**像 (image)** あるいは**値域 (range)** といい $\mathrm{Im}\, f$ 等と書く．
3. Y の部分集合 B に対して, X の部分集合
$$\{x \in X \mid f(x) \in B\}$$
   を **f による B の逆像 (inverse image)** といい, $f^{-1}(B)$ で表す．
   B が 1 点からなる集合 $\{b\}$ であるとき, 誤解のおそれがなければ, しばしば $f^{-1}(\{b\})$ を $f^{-1}(b)$ と略記する．

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(b) &= f^{-1}(\{b\}) \\
&= \{x \in X \mid f(x) \in \{b\}\} \\
&= \{x \in X \mid f(x) = b\}
\end{aligned}
$$

である.

命題 1.4.14. $f\colon X \to Y$ を写像, $A, A_1, A_2 \subset X$, $B, B_1, B_2 \subset Y$ とする. このとき次が成り立つ.

1. $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.
2. (i) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.
   (ii) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
   (iii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
   (iv) $f(A^c) \supset f(X) \cap f(A)^c$.
3. (i) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
   (ii) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
   (iii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
   (iv) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$.

証明. 1 は定義より明らか. 2.(iv) も明らか. 例えば 2.(ii) より $f(X) = f(A \cup A^c) = f(A) \cup f(A^c)$ ゆえ $f(X) \cap f(A)^c \subset f(A^c)$. 3.(iv) も定義より明らか. 実際

$$
\begin{aligned}
&x \in f^{-1}(B^c) \Leftrightarrow f(x) \in B^c \Leftrightarrow \neg\,(f(x) \in B) \\
&x \in f^{-1}(B)^c \Leftrightarrow \neg\left(x \in f^{-1}(B)\right) \Leftrightarrow \neg\,(f(x) \in B)\,.
\end{aligned}
$$

他は練習問題. □

問題集 . 16(1)(2)(3)(4)(5)(6)

定義 1.4.15. $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. f が X から Y への**全射 (surjection)** または**上への写像 (onto map)** である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$.
   言い換えれば f が全射であるとは, $f(X) = Y$ ということ.
2. f が**単射 (injection)** または **1 対 1(one-to-one)** である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X(x_1 \neq x_2) : f(x_1) \neq f(x_2)$.
3. f が**全単射 (bijection)** である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$ は全射かつ単射である.
   X から Y への全単射が存在するとき X と Y は**対等 (equinumer-**

ous,equipotent) という.

この講義では（少なくとも第 1 章の間はおそらく）X と Y が対等であるとき $X \cong Y$ と書く.

命題 1.4.16. $f\colon X \to Y$ を単射, $A, A_1, A_2 \subset X$ とする. このとき次が成り立つ.

1. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
2. $f(A^c) = f(X) \cap f(A)^c$.

証明. 練習問題. □

問題集 . 16(7)(8)

命題 1.4.17. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする. このとき次が成り立つ.

1. f,g ともに単射ならば $g \circ f$ も単射である.
2. f,g ともに全射ならば $g \circ f$ も全射である.
3. $g \circ f$ が単射ならば f も単射である.
4. $g \circ f$ が全射ならば g も全射である.

証明. 練習問題. □

問 8. 上の 1, 2 を示せ.

問題集 . 18(2)(3)

定義 1.4.18. 写像 $f\colon X \to Y$ が単射のとき, 各 $y \in f(X)$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ がただ一つ存在する. この x を $f^{-1}(y)$ と書くと f^{-1} は $f(X)$ から X への写像となる. これを f の**逆写像 (inverse map)** という.

とくに f が全単射であれば, f^{-1} は Y から X への写像になる.

命題 1.4.19. 写像 $f\colon X \to Y$ が全単射 $\Leftrightarrow$ ある写像 $g\colon Y \to X$ が存在して, $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたす.

証明. 問題集 80(1). □

問 9. $f_i\colon X_i \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ を全単射, $g_1\colon X_1 \to X_2$, $g_2\colon Y_1 \to Y_2$ を写像とする. この

とき $g_2 \circ f_1 = f_2 \circ g_1 \Leftrightarrow f_2^{-1} \circ g_2 = g_1 \circ f_1^{-1}$:

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y_1 \arrow[d, "g_2"] \\
X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y_2
\end{tikzcd}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "g_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y_1 \arrow[l, "f_1^{-1}"'] \arrow[d, "g_2"] \\
X_2 & Y_2. \arrow[l, "f_2^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

定義 1.4.20. $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. 写像 $r\colon Y \to X$ で, $r \circ f = \mathrm{id}_X$ をみたすものを f の**レトラクション (retraction)** あるいは**左逆写像 (left inverse map)** という. 恒等写像は全単射なので, f がレトラクションを持てば f は単射であり, レトラクションは全射である.
2. 写像 $s\colon Y \to X$ で $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ をみたすものを f の**切断 (section)** あるいは**右逆写像 (right inverse map)** という. f が切断を持てば f は全射であり, 切断は単射である.

注意 . $f\colon X \to Y$ を写像とし $B \subset Y$ を $f(X) \subset B$ であるような部分集合とする. このとき f は X から B への写像を定める. 制限のように適当な記号があればよいのだが, 習慣としてしばしばこれを同じ記号で $f\colon X \to B$ と表す.

問 10. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする. f が全射であれば $\mathrm{Im}\, g \circ f = \mathrm{Im}\, g$ であることを示せ.

問題集 . 15(1)(2)(3)(4), 17(1)(2), 18(1), 19(1)(2)(3)(4), 25,26, 80(1)(2)(3)

1.4.3　デカルト積と写像

この 1.4.3 節では集合は全て空集合ではない場合のみ考える. （空集合についても適当に扱えばよいがここでは省略する.）

定義 1.4.21.

1. X_1, X_2 を集合とする. $i = 1, 2$ に対し, $p_i(x_1, x_2) = x_i$ により定まる写像 $p_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ を第 i 成分への**射影 (projection)** という.
（厳密には $p_i((x, y))$ と書くべきであるが見にくくなるだけなので普通このように書く.）
2. $f_i\colon Y \to X_i$ $(i = 1, 2)$ を写像とする. 写像 $\langle f_1, f_2 \rangle\colon Y \to X_1 \times X_2$ を $\langle f_1, f_2 \rangle(y) = (f_1(y), f_2(y))$ により定める.
3. X を集合とする. 写像 $\Delta = \langle 1_X, 1_X \rangle\colon X \to X \times X$ を**対角線写像 (diagonal map)** という. $\Delta(x) = (x, x) \in X \times X$ である.

4. $f_i\colon X_i \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ を写像とする．写像 $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ を $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ により定める．

注意． 1. 写像 $\langle f_1, f_2\rangle\colon Y \to X_1 \times X_2$ は (f_1, f_2) という記号で書かれることが多い. 直積集合の元と同じ記号なので, 混乱をさけるためここでは $\langle\rangle$ を使ったが, 実は, 後で（時間があれば）見る（命題 1.4.34）ように, 混同してもあまり問題は無い.

2. 二つの写像が等しいことと, 二つの順序対が等しいことの定義より, 写像 $f_i, g_i\colon Y \to X_i$ について, $f_i = g_i$ $(i = 1, 2) \Leftrightarrow \langle f_1, f_2\rangle = \langle g_1, g_2\rangle$ である.

例 **1.4.22.** 1. $a, b > 0$ とし, $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\right\}$$

（楕円）の射影 $p_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ による像を考える．$p_1(E) = [-a, a]$, $p_2(E) = [-b, b]$ である.

2. $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_1(t) = a\cos(t)$, $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_2(t) = b\sin(t)$ で定めると, $\langle f_1, f_2\rangle\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は $\langle f_1, f_2\rangle(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$ という写像（楕円の媒介変数表示）である.

3. $I = [0, 1]$ を閉区間とすると, 対角線写像 $\Delta\colon I \to I \times I$ の像 $\Delta(I)$ は正方形 $I \times I$ の対角線.

4. $i\colon S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, $j\colon I = [0, 1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ を包含写像とする．このとき $i \times j\colon S^1 \times I \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ の像は

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le 1\right\}.$$

次の命題は $X_1 \times X_2$ への写像を考えることと, X_1 への写像と X_2 への写像の組を考えることは本質的に同じことであるということをいっている（命題 1.4.34 参照）.

命題 **1.4.23.** $f_i\colon Y \to X_i$ $(i = 1, 2)$, $g\colon Y \to X_1 \times X_2$ を写像とする．このとき次が成り立つ.

1. $p_i \circ \langle f_1, f_2\rangle = f_i$ $(i = 1, 2)$.
2. $g = \langle p_1 \circ g, p_2 \circ g\rangle$.

よって写像 g が $p_i \circ g = f_i$ $(i = 1, 2)$ をみたせば $g = \langle f_1, f_2 \rangle$ である.

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dl, bend right, "f_1"'] \arrow[dr, bend left, "f_2"] \arrow[d, "\langle f_1, f_2 \rangle"', "g"] & \\
X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X_2
\end{tikzcd}
$$

とくに $1_{X_1 \times X_2} = \langle p_1, p_2 \rangle$ である（定義から明らかではあるが）.

証明.　1. 任意の $y \in Y$ に対し, $(p_1 \circ \langle f_1, f_2 \rangle)(y) = p_1(f_1(y), f_2(y)) = f_1(y)$.

2. 射影の定義より, 任意の $y \in Y$ に対し, $g(y) = (p_1 g(y), p_2 g(y))$.

□

系 1.4.24. $f, g \colon Y \to X_1 \times X_2$ を写像とする. $p_i \circ f = p_i \circ g$ $(i = 1, 2)$ であれば, $f = g$ である.

証明. $f = \langle p_1 \circ f, p_2 \circ f \rangle = \langle p_1 \circ g, p_2 \circ g \rangle = g$. □

問 11. $f_i \colon Y \to X_i$ $(i = 1, 2)$, $h \colon Z \to Y$ を写像とする. $\langle f_1, f_2 \rangle \circ h = \langle f_1 \circ h, f_2 \circ h \rangle$ を示せ.

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[d, "h"'] \arrow[ddl, bend right, "f_1 h"'] \arrow[ddr, bend left, "f_2 h"] & \\
 & Y \arrow[dl, bend right, "f_1"] \arrow[dr, bend left, "f_2"'] \arrow[d, "\langle f_1, f_2 \rangle"'] & \\
X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X_2
\end{tikzcd}
$$

問 12.　1. $f_i \colon X_i \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ を写像, $p_i \colon X_1 \times X_2 \to X_i$, $q_i \colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ を射影とする.

(i) $q_i \circ (f_1 \times f_2) = f_i \circ p_i$ $(i = 1, 2)$ を示せ.

(ii) $f_1 \times f_2 = \langle f_1 \circ p_1, f_2 \circ p_2 \rangle$ を示せ.

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "f_1"'] & X_1 \times X_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "f_1 \times f_2"] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\
Y_1 & Y_1 \times Y_2 \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & Y_2
\end{tikzcd}
$$

2. $f_i \colon X_i \to Y_i$, $g_i \colon Z \to X_i$ $(i = 1, 2)$ を写像とする.

(i) $(f_1 \times f_2) \circ \langle g_1, g_2 \rangle = \langle f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2 \rangle$ を示せ.

(ii) $\langle g_1, g_2 \rangle = (g_1 \times g_2) \circ \Delta$ を示せ.

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "\langle f_1 g_1, f_2 g_2 \rangle"] \arrow[dr, "\langle g_1, g_2 \rangle"'] & & Y_1 \times Y_2 \\
& X_1 \times X_2 \arrow[ur, "f_1 \times f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "\langle g_1, g_2 \rangle"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & X_1 \times X_2 \\
& Z \times Z \arrow[ur, "g_1 \times g_2"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

問 13. 1. X, Y を集合とする．$1_X \times 1_Y = 1_{X \times Y}$ を示せ．

2. $f_i\colon X_i \to Y_i,\ g_i\colon Y_i \to Z_i$　$(i = 1, 2)$ を写像とする．$(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) = (g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2)$ を示せ．

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[rr, "g_1 f_1 \times g_2 f_2"] \arrow[dr, "f_1 \times f_2"'] & & Z_1 \times Z_2 \\
& Y_1 \times Y_2 \arrow[ur, "g_1 \times g_2"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

問 14. $f_i\colon X \to Y_i,\ g_i\colon X_i \to Y_i$ を写像とする．以下の主張が正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げよ．

1. f_1, f_2 いずれかが単射ならば $\langle f_1, f_2 \rangle\colon X \to Y_1 \times Y_2$ も単射．
2. f_1, f_2 がともに全射ならば $\langle f_1, f_2 \rangle\colon X \to Y_1 \times Y_2$ も全射．
3. g_1, g_2 いずれかが単射ならば $g_1 \times g_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ も単射．
4. g_1, g_2 がともに単射ならば $g_1 \times g_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ も単射．
5. g_1, g_2 がともに全射ならば $g_1 \times g_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ も全射．

問 15. X, Y を集合とする．写像 $\tau\colon X \times Y \to Y \times X$ を $\tau(x, y) = (y, x)$ により定めると τ は全単射である．

問 16. X, Y を集合，$y \in Y$ とする．写像 $i_y\colon X \to X \times Y$ を $i_y(x) = (x, y)$ により定める．

1. i_y は単射である．
2. $c_y\colon X \to Y$ を y に値をとる定値写像とする．$i_y = \langle 1_X, c_y \rangle$ を示せ．
3. $p_2\colon X \times Y \to Y$ を射影とする．X と $p_2^{-1}(y)$ の間の全単射を一つ作れ．

しばしば，この写像 i_y により X とその像 $X \times \{y\} \subset X \times Y$ を同一視し，X を $X \times Y$ の部分集合とみなすことがある．同様に，X と $X \times \{*\}$ はしばしば同一視される．

問 17. $f_i\colon X \to Y_i,\ g_i\colon X_i \to Y_i$ を写像，$q_i\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$ を射影，$B_i \subset Y_i$ を部分集合とする．次を示せ．

1. $B_1 \times B_2 = q_1^{-1}(B_1) \cap q_2^{-1}(B_2)$.
2. $\langle f_1, f_2 \rangle^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2)$.

3. $(g_1 \times g_2)^{-1}(B_1 \times B_2) = g_1^{-1}(B_1) \times g_2^{-1}(B_2)$.

例 1.4.25. 写像 $p\colon \mathbb{R} \to S^1$ を $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ で定める．

p は全射であり, $p^{-1}(\{(1,0)\}) = \mathbb{Z}$ である．また, p を $[0,1)$ に制限したもの（も p と書くことにする）は全単射である．

よって, 写像 $p \times p\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to S^1 \times S^1$ は全射であり, $(p \times p)^{-1}(\{((1,0),(1,0))\}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. また, 写像 $p \times p\colon [0,1) \times [0,1) \to S^1 \times S^1$ は全単射である．

注意．$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ と見ると, $p(t) = \exp(2\pi i t) = e^{2\pi i t}$ である．

1.4.4　Y^X

定義 1.4.26. X, Y を集合とする．X から Y への写像全体のなす集合を $\mathrm{Map}(X,Y)$ あるいは Y^X と表す．（$\mathrm{Hom}(X,Y)$, $F(X,Y)$ といった記号を使うこともある.）

$$\mathrm{Map}(X,Y) = Y^X = \left\{ f \;\middle|\; f \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への写像} \right\}.$$

例 1.4.27. 例 1.4.6 参照.

任意の集合 Y に対し, $\emptyset$ から Y への写像がただ一つ存在するので $Y^{\emptyset} \cong [1]$. とくに $\emptyset^{\emptyset} \cong [1]$.

$X \neq \emptyset$ のときは, X から $\emptyset$ への写像は存在しないので $\emptyset^X = \emptyset$.

また, 任意の集合 X に対し, X から $[1]$ への写像がただ一つ存在するので $[1]^X \cong [1]$.

$Y^{[1]}$ については例 1.10.2 を見よ.

例 1.4.28. 自然数全体 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

を**実数列** という．普通 $a(n)$ を a_n と書いて, 数列を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とか $\{a_n\}$ と表す.

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ は実数列全体のなす集合である．

定義 1.4.29. $f\colon X \to Y$ を写像, Z を集合とする．

1. 写像 $f_*\colon \mathrm{Map}(Z,X) \to \mathrm{Map}(Z,Y)$ を $f_*(g) = f \circ g$ で定める：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(Z,X) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Map}(Z,Y) \\ \uplus & & \uplus \\ Z \underset{g}{\to} X & \longmapsto & Z \underset{g}{\to} X \underset{f}{\to} Y. \end{array}$$

2. 写像 $f^*\colon \mathrm{Map}(Y,Z) \to \mathrm{Map}(X,Z)$ を $f^*(h) = h \circ f$ で定める：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(Y,Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Map}(X,Z) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ Y \underset{h}{\to} Z & \longmapsto & X \underset{f}{\to} Y \underset{h}{\to} Z. \end{array}$$

写像 f_*, f^* を f により**誘導される写像 (induced map)** という．写像 f_*, f^* は集合 Z にも依存している．f_* を $\mathrm{Map}(Z,f)$, $\mathrm{Map}(\mathrm{id}_Z,f)$, $\mathrm{Hom}(Z,f)$ 等と，f^* を $\mathrm{Map}(f,Z)$, $\mathrm{Map}(f,\mathrm{id}_Z)$, $\mathrm{Hom}(f,Z)$ 等と書くこともある．

Y^X という記法を使う場合，f_* を f^Z と，f^* を Z^f と書くこともある：

$$f^Z = f_*\colon X^Z \to Y^Z$$
$$Z^f = f^*\colon Z^Y \to Z^X$$

注意*!* ．写像の向きに注意．

例 1.4.30. X を集合，$A \subset X$，$i\colon A \to X$ を包含写像とする．$i^*\colon \mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(A,Y)$ は写像 $f\colon X \to Y$ に対し，その A への制限 $f|_A$ を対応させる写像である．

例 1.4.31.

1. 写像 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = 2n$ で定めると，$f^*\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$（すなわち第 n 項が a_{2n} である数列）にうつす写像である．
2. 写像 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = 2x$ で定めると，$g_*\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\{2a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$（すなわち第 n 項が $2a_n$ である数列）にうつす写像である．

命題 1.4.32. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像，W を集合とする．

1. $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}\colon \mathrm{Map}(W,X) \to \mathrm{Map}(W,X)$.
2. $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \mathrm{Map}(W,X) \to \mathrm{Map}(W,Z)$.
3. $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}\colon \mathrm{Map}(X,W) \to \mathrm{Map}(X,W)$.
4. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon \mathrm{Map}(Z,W) \to \mathrm{Map}(X,W)$.

注意．2,4 は別の書き方をすればそれぞれ $(gf)^W = g^W f^W$, $W^{gf} = W^f W^g$：

$$\begin{tikzcd} X^W \arrow[rr, "(gf)^W"] \arrow[dr, "f^W"'] & & Z^W \\ & Y^W \arrow[ur, "g^W"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W^Z \arrow[rr, "W^{gf}"] \arrow[dr, "W^g"'] & & W^X \\ & W^Y \arrow[ur, "W^f"'] & \end{tikzcd} .$$

証明．$h \in \mathrm{Map}(W,X)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{id}_X)_*(h) &= \mathrm{id}_X \circ h = h, \\
(g \circ f)_*(h) &= (g \circ f) \circ h \\
&= g \circ (f \circ h) \\
&= g_*(f \circ h) \\
&= g_*(f_*(h)) \\
&= (g_* \circ f_*)(h).
\end{aligned}
$$

□

問 18. 3, 4 を示せ.

系 1.4.33. $f\colon X \to Y$ が全単射であれば f_*, f^* もそうである.

証明. $g\colon Y \to X$ を $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたす写像（f の逆写像）とすると, $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}$, $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}$ となり, f_* は全単射で, g_* が f_* の逆写像である. f^* も同様. □

命題 1.4.34. X_1, X_2, Y を集合とする.

1. $p_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ $(i = 1, 2)$ を射影とすると, $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle\colon \mathrm{Map}(Y, X_1 \times X_2) \to \mathrm{Map}(Y, X_1) \times \mathrm{Map}(Y, X_2)$ は全単射である：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Map}(Y, X_1 \times X_2) &\xrightarrow[\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle]{\cong} \mathrm{Map}(Y, X_1) \times \mathrm{Map}(Y, X_2), \\
(X_1 \times X_2)^Y &\xrightarrow[\langle p_1^Y, p_2^Y\rangle]{\cong} X_1^Y \times X_2^Y.
\end{aligned}
$$

また, $(f, g) \in \mathrm{Map}(Y, X_1) \times \mathrm{Map}(Y, X_2)$ に対し $\langle f, g\rangle\colon Y \to X_1 \times X_2 \in \mathrm{Map}(Y, X_1 \times X_2)$ を対応させる写像が $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle$ の逆写像を与える.

2. $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ とし, $i_k\colon X_k \to X_1 \amalg X_2$ $(k = 1, 2)$ を包含写像とすると, $\langle i_1^*, i_2^*\rangle\colon \mathrm{Map}\,(X_1 \amalg X_2, Y) \to \mathrm{Map}(X_1, Y) \times \mathrm{Map}(X_2, Y)$ は全単射である：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Map}\,(X_1 \amalg X_2, Y) &\xrightarrow[\langle i_1^*, i_2^*\rangle]{\cong} \mathrm{Map}(X_1, Y) \times \mathrm{Map}(X_2, Y), \\
Y^{(X_1 \amalg X_2)} &\xrightarrow[\langle Y^{i_1}, Y^{i_2}\rangle]{\cong} Y^{X_1} \times Y^{X_2}.
\end{aligned}
$$

証明.　1. これは本質的には命題 1.4.23 である. 実際, 命題 1.4.23.1 より $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle$ が全射であることがわかり, 系 1.4.24 から単射であることが分かる.

少し丁寧に書いてみる. 写像 $\varphi\colon \mathrm{Map}(Y, X_1) \times \mathrm{Map}(Y, X_2) \to \mathrm{Map}(Y, X_1 \times X_2)$ を $\varphi(f, g) = \langle f, g\rangle$ により定める.

$(f, g) \in \mathrm{Map}(Y, X_1) \times \mathrm{Map}(Y, X_2)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
(\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle \circ \varphi)(f,g) &= \langle p_{1*}, p_{2*}\rangle (\varphi(f,g)) \\
&= \langle p_{1*}, p_{2*}\rangle (\langle f,g\rangle) \\
&= (p_{1*}(\langle f,g\rangle), p_{2*}(\langle f,g\rangle)) \\
&= (p_1 \circ \langle f,g\rangle, p_2 \circ \langle f,g\rangle) \\
&= (f,g).
\end{aligned}
$$

ただし最後の変形は命題 1.4.23.1 による．よって $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle \circ \varphi = \mathrm{id}$.

$h \in \mathrm{Map}(Y, X_1 \times X_2)$ に対し

$$
\begin{aligned}
(\varphi \circ \langle p_{1*}, p_{2*}\rangle)(h) &= \varphi(\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle(h)) \\
&= \varphi(p_{1*}(h), p_{2*}(h)) \\
&= \varphi(p_1 \circ h, p_2 \circ h) \\
&= \langle p_1 \circ h, p_2 \circ h\rangle \\
&= h.
\end{aligned}
$$

ただし最後の変形は命題 1.4.23.2 による．よって $\varphi \circ \langle p_{1*}, p_{2*}\rangle = \mathrm{id}$.

よって $\langle p_{1*}, p_{2*}\rangle$ は全単射であり φ がその逆写像である.

2. 写像 $\psi\colon \mathrm{Map}(X_1, Y) \times \mathrm{Map}(X_2, Y) \to \mathrm{Map}(X_1 \amalg X_2, Y)$ を

$$
\big(\psi(f,g)\big)(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_1 \\ g(x), & x \in X_2 \end{cases}
$$

により定めると容易に ψ が $\langle i_1^*, i_2^*\rangle$ の逆写像を与えることが分かる.

□

注意．以降, $\langle f,g\rangle$ を (f,g) と書く.

定理 1.4.35. X, Y, Z を集合とする.

写像 $\Phi\colon \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z^Y)$ を

$$
((\Phi(\varphi))(x))(y) = \varphi(x,y)
$$

により定める.

また, 写像 $\Psi\colon \mathrm{Map}(X, Z^Y) \to \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ を

$$
(\Psi(\psi))(x,y) = (\psi(x))(y)
$$

により定める.

このとき, Φ は全単射であり Ψ がその逆写像である：

$$
\Phi\colon \mathrm{Map}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Map}(X, Z^Y).
$$

別の記法で書けば

$$\Phi\colon Z^{X\times Y} \xrightarrow{\cong} \left(Z^Y\right)^X.$$

証明の前に，この写像 Φ の感じをつかむため例を挙げよう．

例 1.4.36. 1. いくつかの場所 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ におけるある年の 5 月 $D = \{1, 2, \dots, 30, 31\}$ の天気 $W = \{$ ☀, ☁, ☂ $\}$ のデータがあるとする：

	x_1	$\dots$	x_n
1	☀	$\dots$	☀
2	☀	$\dots$	☁
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
30	☂	$\dots$	☂
31	☀	$\dots$	☀

このデータは，

(i) 場所 $x \in X$ と日付 $d \in D$ に対し，そこでのその時の天気を対応させる写像

$$f\colon X \times D \to W$$

と見ることができる．$f(x, d) \in W$ は上の表の x 列 d 行目の天気である．

(ii) また，各場所 $x \in X$ に対し，その場所での天気の変化を表す写像 $f_x\colon D \to W$ が与えられている，すなわち写像

$$F\colon X \to \mathrm{Map}(D, W), \quad F(x) = f_x$$

と見ることもできる．もちろん f_x は上の表の x 列目を表している写像であり，$f_x(d)$ は上の表の x 列 d 行目の天気である．

いずれの見方も別の表現をしているだけで，内容は同じである．

明らかに，定理 1.4.35 の

$$\begin{aligned}\Phi\colon \mathrm{Map}(X \times D, W) &\to \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(D, W))\\ \Psi\colon \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(D, W)) &\to \mathrm{Map}(X \times D, W)\end{aligned}$$

により $\Phi(f) = F$, $\Psi(F) = f$ である．つまり Φ は (i) の見方を (ii) の見方に，Ψ は (ii) の見方を (i) の見方に書き換える写像である．

2. もう少し数学的（だけれど実質同じ）例として，$m \times n$ 実行列全体 $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ を考えてみよう．$\mathbf{m} = \{1, \dots, m\}$, $\mathbf{n} = \{1, \dots, n\}$ とする．

(i) $m \times n$ 行列は各 (i,j) 成分を定めれば決まる．すなわち，各 $(i,j) \in \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ に対し $a_{ij} \in \mathbb{R}$ を定めれば，行列 $M = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ が定まるので，写像

$$\mathrm{Map}(\mathbf{m} \times \mathbf{n}, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

が得られ，明らかに全単射である．
（これにより，$\mathrm{Map}(\mathbf{m} \times \mathbf{n}, \mathbb{R})$ と $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ はほとんど同じものだと思うことができるのであるが，この全単射は，$\mathbf{m}, \mathbf{n}$ のどちらが行でどちらが列に対応するかを指定することで定まることに注意.）

(ii) $m \times n$ 行列は n 次元行ベクトルを m 個ならべることでも得られる．また，n 次元行ベクトル $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ は，各 $j \in \mathbf{n}$ に対し $x_j \in \mathbb{R}$ を定めることで定まる，すなわち $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ の元だと思ってよい（例 1.10.4 参照，しかし問 62 も参照のこと）．すなわち各 $i \in \mathbf{m}$ に対し，$a_i \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ を定めれば行列 $M = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdots \\ a_m \end{pmatrix}$ が定まるので，写像

$$\mathrm{Map}(\mathbf{m}, \mathbb{R}^{\mathbf{n}}) \to \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

が得られ，明らかに全単射である．

これら（とその逆写像）の合成がこの場合の定理 1.4.35 の写像 Φ, Ψ である：

$$\mathrm{Map}(\mathbf{m} \times \mathbf{n}, \mathbb{R}) \cong \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Map}(\mathbf{m}, \mathbb{R}^{\mathbf{n}}).$$

つまり，この全単射は，行列を各 (i,j) 成分のあつまりと見る見方と，行ベクトルがならんだものと見る見方の間の対応を与えている．
この例が上の 1 と実質的に同じであるのは明らかであろう．

3. 2 変数関数の偏微分（や累次積分）を思い出そう．$\mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数実数値関数 $f(x,y)$ の，点 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ における y に関する偏微分係数 $f_y(a,b)$ は，$x = a$ を固定して，y の関数 $z = f(a,y)$ を考え，これを $y = b$ で微分するのであった．この，各 $a \in \mathbb{R}$ に対し $f(a,y) \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を対応させる，という写像が，上の定理 1.4.35 の $\Phi(f)$ である：

$$\begin{array}{ccc} \Phi\colon \mathrm{Map}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\ \cong\ } & \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \\ \cup & & \cup \\ f(x,y) & \longmapsto & a \mapsto f(a,y) \,. \end{array}$$

定理 1.4.35 の証明．$f \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ に対し $\Psi \circ \Phi(f) \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ を考える．

$$(\Psi \circ \Phi(f))\,(x,y) = \big(\Psi(\Phi(f))\big)(x,y)$$

$$
\begin{aligned}
&= \big((\Phi(f))\,(x) \big)(y) \\
&= f(x, y)
\end{aligned}
$$

ゆえ $\Psi \circ \Phi(f) = f$, すなわち $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$.

$F \in \mathrm{Map}(X, Z^Y)$ に対し $\Phi \circ \Psi(F) \in \mathrm{Map}(X, Z^Y)$ を考える.

$$
\begin{aligned}
\big((\Phi \circ \Psi(F))\,(x) \big)(y) &= \big((\Phi(\Psi(F)))(x) \big)(y) \\
&= \big(\Psi(F) \big)(x, y) \\
&= \big(F(x) \big)(y)
\end{aligned}
$$

ゆえ $(\Phi \circ \Psi(F))(x) = F(x)$, ゆえ $\Phi \circ \Psi(F) = F$, すなわち $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$. □

注意． Y^X という記法について.

Y^X という記法を使うのは数の冪乗の類似が成り立つことによる.

$$
\begin{aligned}
&X^{\emptyset} \cong [1] && X^{[1]} \cong X \\
&\emptyset^X = \emptyset \ (X \neq \emptyset) && [1]^X \cong [1] \\
&(X \times Y)^Z \cong X^Z \times Y^Z && Z^{(X \amalg Y)} \cong Z^X \times Z^Y \\
&Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X &&
\end{aligned}
$$

（これらの全単射が「自然な」写像で与えられるということが大切なのであるがそれについては時間その他の都合によりあまりふれないことにする.）

なお自然数の自然数乗との直接的関係についていずれ述べる.

1.4.5　冪集合と特性関数

定義 1.4.37. X を集合とする.

1. $A \subset X$ を X の部分集合とする. 次で定義される写像 $\chi_A \colon X \to [2] = \{0, 1\}$ を A の（X 上の）**特性関数 (characteristic function)** という.

$$
\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A). \end{cases}
$$

2. 写像 $\chi \colon \mathcal{P}(X) \to [2]^X$ を $\chi(A) = \chi_A$ により定める.

注意． しばしば $[2]^X$ を 2^X と略記する.

定理 1.4.38. 写像 $\chi \colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ は全単射である.

証明. 写像 $\varphi\colon 2^X \to \mathcal{P}(X)$ を $\varphi(a) = a^{-1}(1)$ で定めると, 明らかに χ の逆写像である. 実際, $a \in 2^X$ に対し,

$$\begin{aligned}(\chi \circ \varphi)(a) &= \chi(\varphi(a)) \\ &= \chi\left(a^{-1}(1)\right) \\ &= \chi_{a^{-1}(1)}\end{aligned}$$

であるが, $x \in X$ に対し,

$$\chi_{a^{-1}(1)}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in a^{-1}(1) \Leftrightarrow a(x) = 1$$

だから $\chi_{a^{-1}(1)} = a$. よって $\chi \circ \varphi = \mathrm{id}_{2^X}$. 一方, $A \in \mathcal{P}(X)$ に対し,

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \chi)(A) &= \varphi(\chi(A)) \\ &= \varphi(\chi_A) \\ &= \chi_A^{-1}(1) \\ &= A.\end{aligned}$$

よって $\varphi \circ \chi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(X)}$. □

命題 1.4.39. $f\colon X \to Y$ を写像とする. $B \in \mathcal{P}(Y)$ に対し, $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)$ を対応させる写像 $\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を f^* と書く.

　このとき, $\chi \circ f^* = f^* \circ \chi$ が成り立つ：

$$\begin{tikzcd}\mathcal{P}(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\chi"', "\cong"] & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "\cong"', "\chi"] \\ 2^Y \arrow[r, "f^*"'] & 2^X.\end{tikzcd}$$

すなわち, $f^{-1}(B) \subset X$ の特性関数は $\chi_{f^{-1}(B)} = f^*(\chi_B) = \chi_B \circ f$ により与えられる.

証明. χ の逆写像を φ と書く. $\varphi \circ f^* = f^* \circ \varphi$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}\varphi(f^*(a)) &= \varphi(a \circ f) \\ &= (a \circ f)^{-1}(1) \\ &= f^{-1}(a^{-1}(1)), \\ f^*(\varphi(a)) &= f^{-1}(a^{-1}(1)).\end{aligned}$$

□

注意．$f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ と書いてもよいのであるが, いろいろと混乱することがあるので, この講義では当面 f^* という記号を使う．f の誘導する写像 $2^Y \to 2^X$ も f^* と書くのであるが, χ により同一視すれば同じなので, こちらはさほど困ることはない.

（**2019** 年度はパス）

定理 1.4.40. $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. 次は同値.
   (i) f は単射.
   (ii) $f^*\colon 2^Y \to 2^X$ は全射.
   (iii) $f^*\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ は全射.
2. 次は同値.
   (i) f は全射.
   (ii) $f^*\colon 2^Y \to 2^X$ は単射.
   (iii) $f^*\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ は単射.

証明．いずれも (ii) と (iii) が同値であることは命題 1.4.39 より明らか.

1. (i)⇒(iii)．$A \in \mathcal{P}(X)$ とする．f は単射なので $f^{-1}(f(A)) = A$, すなわち $f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ に対し, $f^*(f(A)) = A$.
   (iii)⇒(i)．$x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ とする．$\{x_1\} \in \mathcal{P}(X)$ に対し, f^* が全射であるから, $f^*(B) = \{x_1\}$, すなわち $f^{-1}(B) = \{x_1\}$ となる $B \in \mathcal{P}(Y)$ が存在する. $f(x_2) = f(x_1) \in B$ であるから, $x_2 \in f^{-1}(B) = \{x_1\}$, すなわち, $x_2 = x_1$.
2. (i)⇒(ii)．$b_1, b_2 \in 2^Y$, $f^*(b_1) = f^*(b_2)$ とする．このとき $b_1 \circ f = f^*(b_1) = f^*(b_2) = b_2 \circ f$ である．$y \in Y$ とする．f は全射であるから, ある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ となる. よって, $b_1(y) = b_1(f(x)) = b_2(f(x)) = b_2(y)$. ゆえ $b_1 = b_2$.
   (iii)⇒(i)．$f(X), Y \in \mathcal{P}(Y)$ に対し, $f^*(f(X)) = f^{-1}(f(X)) = X = f^{-1}(Y) = f^*(Y)$ であり, 仮定より f^* は単射なので, $f(X) = Y$.
   （もちろん $\chi_Y, \chi_{f(X)}$ を考えて (ii)⇒(i) を示してもよい.）

□

ここまでパス.

1.5　集合族

定義 1.5.1.
1. 元がすべて集合であるような集合を**集合族 (family of sets)** という.
2. 集合 Λ から, ある集合族への写像を, Λ で**添字付けられた集合族 (indexed family of sets)** という.
   添字付けられた集合族 $A\colon \Lambda \to \mathcal{A}$ は, 普通, $A(\lambda) \in \mathcal{A}$ を A_λ と書いて, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と書かれることが多い.

注意 . 添字付けられた集合族は, 集合族の特別な場合ではない. 集合族と, 添字付けられた集合族との関係は, 数の集合と数列との関係と同様である.

なお, 集合族は, それ自身で添字付けられた集合族 (つまり, 恒等写像 $\mathrm{id}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$) と考えることができる.

濫用であるが以下, 添字付けられた集合族のことを, 単に集合族とよぶことが多い.

定義 1.5.2. $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とする.

1. 集合
   $$\{x \mid \exists\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\}$$
   を集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**和集合 (union)** といって,
   $$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$
   等と表す.
   $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ の場合
   $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$
   $\Lambda = \mathbb{N}$ の場合
   $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
   と書くことが多い.
2. 集合
   $$\{x \mid \forall\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\}$$
   を集合族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**共通集合 (intersection)** といって,
   $$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

等と表す.

$\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ の場合

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

$\Lambda = \mathbb{N}$ の場合

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

と書くことが多い.

注意! . $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ と書いたとき, A_∞ という集合が与えられているわけではない.

注意 . 添字集合が空集合 $\Lambda = \emptyset$ である添字付られた集合族 $A\colon \emptyset \to \mathcal{A}$ について考えてみる.

$$\begin{aligned}\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \{x \mid \exists \lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\} \\ &= \{x \mid \exists \lambda \in \emptyset : x \in A_\lambda\}\end{aligned}$$

となるが, 条件「$\exists \lambda \in \emptyset : x \in A_\lambda$」は常に偽であるから

$$= \emptyset$$

である.

一方, 共通集合については注意が必要である. 何らかの条件, 文脈を設定しなければ

$$\begin{aligned}\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \{x \mid \forall \lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\} \\ &= \{x \mid \forall \lambda \in \emptyset : x \in A_\lambda\}\end{aligned}$$

となるが, 条件「$\forall \lambda \in \emptyset : x \in A_\lambda$」は常に真であるから

$$= \left\{x \;\middle|\; x \text{ は何でもよい}\right\}$$

となってしまい, これを集合と考えることはできない. したがって $\Lambda = \emptyset$ の場合を扱うには, 考えることのできる元について何らかの制約を課す必要がある. $\Lambda = \emptyset$ の場合も扱うため, 正確には, 共通部分を

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \left\{x \in \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \;\middle|\; \forall \lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\right\}$$

と定義する. (我々は, 添字付られた集合族, すなわち, 写像 $A\colon \Lambda \to \mathcal{A}$ を考えているので, $\mathcal{A}$ のメンバーの元のみを考えるのは自然であろう.) $\Lambda \neq \emptyset$ のときには上の定義と同じである. $\Lambda = \emptyset$ の場合

$$\bigcap_{\lambda \in \emptyset} A_\lambda = \left\{x \in \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B \;\middle|\; \forall \lambda \in \emptyset : x \in A_\lambda\right\}$$

$$= \bigcup_{B \in \mathcal{A}} B$$

となる．しばしば扱うのは, $\mathcal{A}$ が, ある集合 X の冪集合 $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ の場合である．このとき

$$\bigcup_{B \in \mathcal{P}(X)} B = X$$

なので, 集合族 $A \colon \Lambda \to \mathcal{P}(X)$ に対し,

$$\begin{aligned}
\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda &= \left\{ x \in \bigcup_{B \in \mathcal{P}(X)} B \;\middle|\; \forall \lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda \right\} \\
&= \{ x \in X \mid \forall \lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda \}
\end{aligned}$$

であり, $\Lambda = \emptyset$ のときは

$$\bigcap_{\lambda \in \emptyset} A_\lambda = \bigcup_{B \in \mathcal{P}(X)} B = X$$

となる．

例 1.5.3. 1.

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{2} A_i = \bigcup_{i \in \{1,2\}} A_i
&= \{ x \mid \exists i \in \{1,2\} : x \in A_i \} \\
&= \{ x \mid x \in A_1 \lor x \in A_2 \} \\
&= A_1 \cup A_2 .
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{2} A_i = \bigcap_{i \in \{1,2\}} A_i
&= \{ x \mid \forall i \in \{1,2\} : x \in A_i \} \\
&= \{ x \mid x \in A_1 \land x \in A_2 \} \\
&= A_1 \cap A_2 .
\end{aligned}$$

例 1.5.4. X を集合とすると

$$\bigcup_{A \in \mathcal{P}(X)} A = X$$

$$\bigcap_{A \in \mathcal{P}(X)} A = \emptyset$$

集合族の和集合や共通集合に対し, 二つの集合の和集合や共通集合と同様なことが成り立つ.

補題 1.5.5. $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族, B を集合とする. 次が成り立つ.

1. 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し, $A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.
2. 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し, $A_\lambda \supset \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$.
3. 「任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し $A_\lambda \subset B$」$\Leftrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subset B$.
4. 「任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し $A_\lambda \supset B$」$\Leftrightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \supset B$.

証明. 1,2 は明らか. 3,4 の「$\Leftarrow$」は 1,2 より明らか. 残りも明らかであるが 3 の「$\Rightarrow$」を示してみよう.

$x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とする. 定義より, ある $\lambda\in\Lambda$ が存在して, $x\in A_\lambda$ となる. 仮定より $A_\lambda\subset B$ であるから $x\in B$. □

定理 1.5.6. A を集合, $\{B_\lambda\}_\Lambda$ を集合族とする.

1. $A\cup\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A\cup B_\lambda)$
2. $A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$

証明. 定理 1.1.14.1,2 からしたがう.

1.

$$\begin{aligned} A\cup\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) &= \{x \mid x\in A \vee (\forall\lambda\in\Lambda : x\in B_\lambda)\} \\ &= \{x \mid \forall\lambda\in\Lambda : x\in A \vee x\in B_\lambda\} \\ &= \{x \mid \forall\lambda\in\Lambda : x\in A\cup B_\lambda\} \\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A\cup B_\lambda) \end{aligned}$$

2. こちらは補題 1.5.5 を使って示してみよう.
   (i) $A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \supset \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$ であること.
   任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し, $B_\lambda\subset\bigcup B_\lambda$ であるから, $A\cap B_\lambda\subset A\cap(\bigcup B_\lambda)$. よって $\bigcup_\lambda(A\cap B_\lambda)\subset A\cap(\bigcup_\lambda B_\lambda)$.
   (ii) $A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A\cap B_\lambda)$ であること.
   $x\in A\cap\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)$ とする. $x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ であるから, ある $\lambda\in\Lambda$ が存在し, $x\in B_\lambda$ である. また $x\in A$ なので $x\in A\cap B_\lambda$. よって $x\in\bigcup(A\cap B_\lambda)$.

□

定理 1.5.7. X を集合, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合の族, すなわち, 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し $A_\lambda\subset X$ であるとする．（写像と思えば $A\colon\Lambda\to\mathcal{P}(X)$, $A(\lambda)=A_\lambda$.）

1. $$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c.$$

2. $$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c.$$

証明. 1 を示そう．

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)^c&=\left\{x\in X\ \middle|\ x\notin\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right\}\\&=\left\{x\in X\ \middle|\ \neg\left(x\in\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\right)\right\}\\&=\{x\in X\mid\neg(\exists\lambda\in\Lambda:x\in A_\lambda)\}\\&=\{x\in X\mid\forall\lambda\in\Lambda:x\notin A_\lambda\}\\&=\{x\in X\mid\forall\lambda\in\Lambda:x\in A_\lambda^c\}\\&=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c.\end{aligned}$$

2 も同様. あるいは元をとって示してもよいし, 1 を使ってもよい. □

問題集． 8(1), 10(1)〜(7), 11

定理 1.5.8. $f\colon X\to Y$ を写像, $\{A_i\}_{i\in I}$ を X の部分集合の族, $\{B_j\}_{j\in J}$ を Y の部分集合の族とする．次が成り立つ．

1. $f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(A_i)$.
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}B_j\right)=\bigcup_{j\in J}f^{-1}(B_j)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)=\bigcap_{j\in J}f^{-1}(B_j)$.

証明. 証明は二つのときと同じである．

1. $A_i\subset\bigcup A_i$ ゆえ $f(A_i)\subset f\left(\bigcup A_i\right)$, よって $\bigcup f(A_i)\subset f\left(\bigcup A_i\right)$.
   一方, $y\in f\left(\bigcup A_i\right)$ とすると, ある $x\in\bigcup A_i$ が存在し, $y=f(x)$ となる．この x について, $x\in\bigcup A_i$ ゆえ, ある $i\in I$ が存在し, $x\in A_i$ となる．よって $y=f(x)\in f(A_i)$. ゆえ $y\in\bigcup f(A_i)$.

2. 練習問題.

3.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &= \left\{x \;\middle|\; f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j\right\} \\
&= \{x \mid \exists j \in J : f(x) \in B_j\} \\
&= \bigl\{x \mid \exists j \in J : x \in f^{-1}(B_j)\bigr\} \\
&= \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)
\end{aligned}
$$

4. 練習問題.

$\square$

注意．もちろん，1 を 3 と同様に証明することもできるし, 3 を 1 と同様に証明することもできる.

1.

$$
\begin{aligned}
f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &= \left\{y \;\middle|\; \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i : y = f(x)\right\} \\
&= \left\{y \;\middle|\; \exists x : \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge (y = f(x))\right\} \\
&= \{y \mid \exists x : (\exists i \in I : x \in A_i) \wedge (y = f(x))\} \\
&= \{y \mid \exists x : \exists i \in I : (x \in A_i) \wedge (y = f(x))\} \\
&= \{y \mid \exists i \in I : \exists x : (x \in A_i) \wedge (y = f(x))\} \\
&= \{y \mid \exists i \in I : \exists x \in A_i : y = f(x)\} \\
&= \{y \mid \exists i \in I : y \in f(A_i)\} \\
&= \bigcup_{i\in I} f(A_i).
\end{aligned}
$$

この証明は本質的に上の証明と同じである.

なお，4 行目から 5 行目の変形で, $\exists x$ と $\exists i \in I$ を入れ替えていることに注意せよ. 2 で等号が成り立たないのは $\exists x$ と $\forall i \in I$ を入れ替えることが一般には出来ないことによる.

2.

$$
f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \left\{y \;\middle|\; \exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i : y = f(x)\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{ y \;\middle|\; \exists x : \left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i \right) \wedge (y = f(x)) \right\} \\
&= \{ y \mid \exists x : (\forall i \in I : x \in A_i) \wedge (y = f(x)) \} \\
&= \{ y \mid \exists x : \forall i \in I : (x \in A_i) \wedge (y = f(x)) \} \\
&\subset \{ y \mid \forall i \in I : \exists x : (x \in A_i) \wedge (y = f(x)) \} \\
&= \{ y \mid \forall i \in I : \exists x \in A_i : y = f(x) \} \\
&= \{ y \mid \forall i \in I : y \in f(A_i) \} \\
&= \bigcap_{i \in I} f(A_i).
\end{aligned}
$$

問 19.
1. 上の 2 を示せ.
2. f が単射であるとき 2 で等号は成り立つか.
3. 上の 4 を示せ.

確率論（測度論）でよく使われる集合の上極限, 下極限を紹介しておく.

定義 1.5.9. $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を集合族とする.

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim_n} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right), \\
\underline{\lim_n} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right)
\end{aligned}
$$

をそれぞれ集合族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の**上極限 (limit superior)**, **下極限 (limit inferior)** という.

例 1.5.10. $\mathbb{N}$ の部分集合の族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を

$$
A_i = \begin{cases} \{i, i+1, i+2, \ldots\} & i : \text{偶数} \\ \{1, 2, \ldots, i\} & i : \text{奇数} \end{cases}
$$

により定める. $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3, 4, \ldots\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$ といった具合である. $n \in \mathbb{N}$ に対し $A_{2n-1} = \{1, \ldots, 2n-1\}$, $A_{2n} = \{2n, 2n+1, \ldots\}$ であるから $A_{2n-1} \cup A_{2n} = \mathbb{N}$, $A_{2n-1} \cap A_{2n} = \emptyset$ であることに注意する. $2n - 1 \geq n$ であるから

$$
\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \supset A_{2n-1} \cup A_{2n} = \mathbb{N} \qquad \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \subset A_{2n-1} \cap A_{2n} = \emptyset
$$

となり

$$
\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \mathbb{N} \qquad \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \emptyset
$$

である．よって

$$\overline{\lim_n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{N} = \mathbb{N} \qquad \underline{\lim_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset = \emptyset.$$

例 1.5.11. 集合族 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を

$$X_i = \{I \subset \mathbb{N} \mid i \in I\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

により定める．

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_n} X_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} X_i\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} \{I \subset \mathbb{N} \mid i \in I\}\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{I \subset \mathbb{N} \mid \exists i \geq n : i \in I\} \\
&= \{I \subset \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists i \geq n : i \in I\} \\
&= \left\{I \subset \mathbb{N} \;\middle|\; I \text{ は無限集合}\right\}, \\
\underline{\lim_n} X_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} X_i\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} \{I \subset \mathbb{N} \mid i \in I\}\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{I \subset \mathbb{N} \mid \forall i \geq n : i \in I\} \\
&= \{I \subset \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall i \geq n : i \in I\} \\
&= \left\{I \subset \mathbb{N} \;\middle|\; I^c \text{ は有限集合}\right\}.
\end{aligned}$$

問題集． 12(1),(2),(3)

定義 1.5.12. $\mathcal{X} = \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とする．Λ から $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ への写像 f であって，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し，$f(\lambda) \in X_\lambda$ となるようなもの全体を $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直積 (direct product)** といって，

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \quad \prod \mathcal{X}$$

等と表す．つまり

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \left\{ f \in \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \right)^{\Lambda} \;\middle|\; \forall\lambda\in\Lambda : f(\lambda)\in X_\lambda \right\}.$$

しばしば, 直積の元 f を $(x_\lambda : \lambda\in\Lambda)$ という記号で表す．ただし $x_\lambda = f(\lambda)$ である．

また, $\lambda\in\Lambda$ に対し, $\pi_\lambda(f) = f(\lambda)$ で与えられる写像

$$\begin{aligned} \pi_\lambda \colon \prod \mathcal{X} &\to X_\lambda \\ f &\mapsto f(\lambda) \end{aligned}$$

を（λ 成分への）標準的射影という．

$\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ や $\Lambda = \mathbb{N}$ のとき, $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $\prod_{i=1}^{n} X_i$ や $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ とも書く．

例 1.5.13. X_λ が全て同じ $X_\lambda = X$ であるとき,

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = X^\Lambda$$

である．

例 1.5.14. $\{X_i\}_{i\in[2]}$ を集合族とする．ただし $[2] = \{0, 1\}$ である．標準的射影を用いて与えられる写像

$$\begin{aligned} \pi = (\pi_0, \pi_1) \colon \prod_{i\in[2]} X_i &\longrightarrow X_0 \times X_1 \\ f &\longmapsto (f(0), f(1)) \end{aligned}$$

は明らかに全単射である．これにより $\prod_{i=0}^{1} X_i$ と $X_0 \times X_1$ をしばしば同一視する．

同様に集合として $\prod_{i=0}^{n-1} X_i$ と $X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$ は異なるが, 標準的射影を用いて与えられる全単射

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n-1} X_i &\longrightarrow X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \\ f &\longmapsto (f(0), f(1), \ldots, f(n-1)) \end{aligned}$$

により, しばしば同一視することがある．

定義 1.5.15. $\mathcal{X} = \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とする．直積 $\Lambda \times \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の部分集合 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を以下で定め, $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**直和 (direct sum)** または**非交和 (disjoint union)** という．

$$\begin{aligned}\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda &= \{(\lambda, x) \mid \lambda \in \Lambda \wedge x \in X_\lambda\} \\ &= \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (\{\lambda\} \times X_\lambda) \qquad \subset \Lambda \times \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda.\end{aligned}$$

例 1.5.16. 集合族 $\{X_i\}_{i\in[2]}$ に対し, 写像

$$\pi\colon \coprod_{i\in[2]} X_i \to \bigcup_{i\in[2]} X_i = X_0 \cup X_1$$

を $\pi(i,x) = x$ で定めると π は全射である．

さらに, $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ であれば π は全単射である．このとき, π により $\coprod_{i\in[2]} X_i$ と $X_0 \amalg X_1$ をしばしば同一視する．（二つでなくともよい．問題集 29 参照）

例 1.5.17. X_0,X_1 がそれぞれ閉区間 $[0,2],[1,3] \subset \mathbb{R}$ であるとき,

$$\begin{aligned}\coprod_{i\in\{0,1\}} X_i &= \{(i,x) \mid i \in \{0,1\} \wedge x \in X_i\} \\ &= \{(i,x) \mid (i=0 \wedge x \in [0,2]) \vee (i=1 \wedge x \in [1,3])\} \\ &= (\{0\}\times[0,2]) \cup (\{1\}\times[1,3]) \\ &\quad \subset \{0,1\} \times [0,3].\end{aligned}$$

問題集． 29

1.6　同値関係

集合を仲間分け, グループ分けするという行為は子供の頃からおなじみであろう．同じ仲間であるという「関係」でグループ分けするのであるが, 集合をきちんとグループ分けできる（どのメンバーもいずれかのグループに入っており, また異なるグループは交わらない, つまりどのメンバーもただ一つのグループに入る）ためにはこの「関係」にどのような条件がいるのか, というのを抽象したのが同値関係とよばれる関係である．

まずグループ分けというのをきちんと定式化しよう．

定義 1.6.1. X を集合とする．X の部分集合の族 $\mathcal{P}$ （すなわち $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$）は次の条件をみたすとき X の**分割 (partition)** であるという：

1. $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
2. $\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = X$.
3. 任意の $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$ に対し, $A \cap B = \emptyset$.

もちろん, 条件 2 は, どのメンバーもいずれかのグループに入るということであり, 条件 3 は異なるグループは交わらないということである．条件 1 は, メンバーのいないグループはないということ．

例 1.6.2.
1. 集合 $[3] = \{0, 1, 2\}$ の分割は
   - $\{\{0, 1, 2\}\}$
   - $\{\{0\}, \{1, 2\}\}$
   - $\{\{1\}, \{0, 2\}\}$
   - $\{\{2\}, \{0, 1\}\}$
   - $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$

   の 5 つ．
2. 集合 $[2] = \{0, 1\}$ の分割は
   - $\{\{0, 1\}\}$
   - $\{\{0\}, \{1\}\}$

   の二つ．
3. 集合 $[1] = \{0\}$ の分割は
   - $\{\{0\}\}$

   の一つだけ．

注意 ．空集合 $\emptyset$ の分割を考えてみよう．$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ だから, $\mathcal{P}(\emptyset)$ の部分集合は $\emptyset, \{\emptyset\}$

の二つ．$\emptyset \in \{\emptyset\}$ であるから $\{\emptyset\}$ は空集合の分割ではない．一方, $\emptyset \subset \mathcal{P}(\emptyset)$ については, $\emptyset \notin \emptyset$, $\bigcup_{A \in \emptyset} A = \emptyset$ である．また, $A \in \emptyset$ となる A はないので分割の条件 3 も成り立っている．すなわち $\emptyset$ は $\emptyset$ の分割である．よって空集合の分割は一つ．

例 1.6.3.
1. $C_0 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ は偶数}\}$, $C_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ は奇数}\}$ とおけば $\{C_0, C_1\}$ は $\mathbb{Z}$ の分割を与える．
2. $C_r = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ を } 3 \text{ で割ったあまりが } r\}$ とおけば $\{C_0, C_1, C_2\}$ は $\mathbb{Z}$ の分割を与える．

定義 1.6.4. 集合 X 上の関係が次の三つの条件:

1. （**反射律, reflexive law**） $x \sim x$,
2. （**対称律, symmetric law**） $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
3. （**推移律, transitive law**） $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

をみたすとき, 関係 $\sim$ は集合 X 上の**同値関係 (equivalence relation)** であるという．

問 20.
1. $\mathbb{Z}$ における関係 $\sim$ を $x \sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$「$x, y$ がどちらも奇数」により定める．この関係 $\sim$ は反射律, 対称律, 推移律をみたすか？
2. 次の議論は正しくない．どこが？

   X を集合とし, X 上の関係 $\sim$ が対称律と推移律をみたすとする．このとき $\sim$ は反射律もみたし同値関係である．実際, $x \in X$ とすると, 対称律より $x \sim y$ ならば $y \sim x$ である．よって推移律より $x \sim x$ となる．

定義 1.6.5. 関係 $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする．X の要素 $a \in X$ に対し, a と同値な要素全体のなす X の部分集合

$$C_a = \{x \in X \mid x \sim a\}$$

を a の**同値類 (equivalence class)** という．a の同値類を $[a]$, $\bar{a}$ 等と書くことも多い．

$x \in C_a$ を一つとることを, x を C_a の**代表元 (representative)** としてとるという．

補題 1.6.6. 同値類は次の性質を持つ:

1. $a \in C_a$,
2. 次は同値
   (i) $a \sim b$.
   (ii) $C_a = C_b$.
   (iii) $C_a \cap C_b \neq \emptyset$.
3. 次は同値

(i) $a \not\sim b$.

(ii) $C_a \neq C_b$.

(iii) $C_a \cap C_b = \emptyset$.

証明. 1. 反射律より $a \sim a$ ゆえ $a \in C_a$.

2. (i)⇒(ii). $a \sim b$ とする. $x \in C_a$ とすると $x \sim a$ ゆえ推移律より $x \sim b$ となり $x \in C_b$, すなわち $C_a \subset C_b$. 対称律より $b \sim a$ だから $C_b \subset C_a$.

(ii)⇒(iii) $C_a = C_b$ とする. このとき $a \in C_a = C_a \cap C_b$ ゆえ $C_a \cap C_b \neq \emptyset$.

(iii)⇒(i) $C_a \cap C_b \neq \emptyset$ とする. $c \in C_a \cap C_b$ を一つとる. $c \sim a$ かつ $c \sim b$ ゆえ対称律と推移律より $a \sim b$.

3. 2 より明らか.

□

系 1.6.7. 同値類の全体のなす集合 $\{C_a \mid a \in X\}$ は X の分割を与える. この分割を同値関係 $\sim$ による X の類別 **(classification)** という.

証明. 補題 1.6.6 より, $a \in C_a$ ゆえ, $C_a \neq \emptyset$ であり $X = \bigcup_{a \in X}\{a\} \subset \bigcup_{a \in X} C_a \subset X$ だから $\bigcup_{a \in X} C_a = X$. また, $C_a \neq C_b$ なら $C_a \cap C_b = \emptyset$. □

同値関係を与えることと分割を与えることは同じである.

命題 1.6.8. 1. $\mathcal{P}$ を X の分割とする. 関係 $\sim_{\mathcal{P}}$ を

$$x \sim_{\mathcal{P}} y \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{P} : x, y \in A$$

により定めると, $\sim_{\mathcal{P}}$ は同値関係であり, この同値関係による類別は $\mathcal{P}$ である.

2. $\sim$ を X 上の同値関係とし, $\mathcal{P} = \{C_a \mid a \in X\}$ を $\sim$ による類別とする. この $\mathcal{P}$ から 1 により定まる同値関係 $\sim_{\mathcal{P}}$ は $\sim$ である.

これは次のように述べることもできる.

Π_X を X の分割全体のなす集合, $\mathcal{E}_X$ を X 上の同値関係のなす集合とする:

$$\Pi_X = \left\{\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X) \;\middle|\; \mathcal{P} \text{ は分割}\right\}$$
$$\mathcal{E}_X = \left\{R \subset X \times X \;\middle|\; R \text{ は同値関係}\right\}$$

(ちょっとややこしいが $\Pi_X \subset \mathcal{P}\left(\mathcal{P}(X)\right)$ である.)

写像 $e\colon \Pi_X \to \mathcal{E}_X$ を $e(\mathcal{P}) = \sim_{\mathcal{P}}$, 写像 $p\colon \mathcal{E}_X \to \Pi_X$ を $p(R) = \mathcal{P}_R$, ただし $\mathcal{P}_R$ は R による類別, と定めると e と p は互いに逆である全単射.

問 21. 証明せよ.

定義 1.6.9. X を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする.

1. 同値類の全体 $\{C_a \mid a \in X\}$ を $X/\sim$ と書き, 同値関係 $\sim$ による X の**商集合 (quotient set)** という.
2. $a \in X$ を $C_a \in X/\sim$ にうつす写像

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X/\sim \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & C_a \end{array}$$

を**自然な写像** あるいは**商写像**, **自然な射影**などという.

3. $A \subset X$ が**完全代表系 (complete system of representatives)** である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 包含写像と商写像の合成

$$A \hookrightarrow X \to X/\sim$$

が全単射.

言い換えれば, A が完全代表系であるとは次の二つが成り立つということ.

- $\forall x \in X, \exists a \in A : x \sim a.$
- $\forall a, b \in A (a \neq b) : a \not\sim b.$

すなわち, X のどの元も A の元のいずれかと同値であり, また, A の元同士は同値ではない.

注意 . もちろん, 完全代表系は一般に一意に定まるわけではない.

問 22. 自然な射影 $X \to X/\sim$ は全射であることを示せ.

例 1.6.10. 集合 X における等しいという関係 $=$（$X \times X$ の部分集合としては対角線集合 Δ_X）は同値関係である. $x \in X$ の同値類は $\{x\}$ であり, 商集合 $X/=$ は自然に X と同一視される.（厳密に言えば, $X/= \subset \mathcal{P}(X)$ は singleton map $s \colon X \to \mathcal{P}(X)$ の像であり, s が全単射 $X \to X/=$ を与える.）

例 1.6.11. 集合 X における関係 $\sim$ を, 任意の $x, y \in X$ に対し $x \sim y$ で定める（$X \times X$ の部分集合としては $X \times X$）と, 明らかに同値関係であり, 同値類は X のみで, 商集合は 1 点のみからなる集合 $X/\sim = \{X\}$ である.

例 1.6.12. $n \in \mathbb{N}$ とする. $x, y \in \mathbb{Z}$ に対し, $x \sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} n|(x-y)$ と定めると, $\sim$ は同値関係である. 実際,

1. $x - x = 0$ は n の倍数であるので $x \sim x$.
2. $x \sim y$ であるとすると, $x - y$ は n の倍数であるから, $y - x = -(x - y)$ もそうである. よって $y \sim x$.

3. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ であるとする．このとき $x-y$, $y-z$ は n の倍数である．よって $x-z=(x-y)+(y-z)$ も n の倍数である．ゆえ,$x \sim z$.

$\mathbb{Z}$ におけるこの同値関係を普通

$$x \equiv y \quad (\mathrm{mod}\ n)$$
$$x \equiv y \quad (n)$$

等と書き, x と y は n **を法として合同 (congruent modulo** n**)** であるという．

この同値関係による同値類を n を法とする**合同類 (congruence class)** あるいは**剰余類 (residue class)** という．$x \in \mathbb{Z}$ の同値類を

$$x \bmod n \qquad\qquad x+n\mathbb{Z}$$

等と書くことも多い．

また, この同値関係による商集合を

$$\mathbb{Z}/n \qquad\qquad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

等と書く．

例 1.6.13. 集合 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ を $\mathbb{N}_0$ と書く．（世の中一般にこう書くわけではない．昨年度までは $\bar{\mathbb{N}}$ と書いていたが, [5] に倣って $\mathbb{N}_0$ と書いてみることにした.）集合 $\mathbb{N}_0^2$ における関係 $\sim$ を $(l,m) \sim (p,q) \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} l+q=m+p$ により定めると同値関係である．実際,

1. $l+m=m+l$ だから $(l,m) \sim (l,m)$.
2. $(l,m) \sim (p,q) \Leftrightarrow l+q=m+p \Leftrightarrow p+m=q+l \Leftrightarrow (p,q) \sim (l,m)$.
3. $(l,m) \sim (p,q)$ かつ $(p,q) \sim (s,t)$ とすると, $l+q=m+p$ かつ $p+t=q+s$ だから, $l+t+p+q=m+s+p+q$ ゆえ $l+t=m+s$ となり $(l,m) \sim (s,t)$.

例 1.6.14. 集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ における関係 $\sim$ を $(l,m) \sim (p,q) \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} lq=mp$ により定めると同値関係である．実際,

1. $lm=ml$ だから $(l,m) \sim (l,m)$.
2. $(l,m) \sim (p,q) \Leftrightarrow lq=mp \Leftrightarrow pm=ql \Leftrightarrow (p,q) \sim (l,m)$.
3. $(l,m) \sim (p,q)$ かつ $(p,q) \sim (s,t)$ とすると, $lq=mp$ かつ $pt=qs$ である．$p=0$ のときは,（$q \neq 0$ だから）$l=s=0$ となり, $lt=0=ms$ ゆえ $(l,m) \sim (s,t)$. $p \neq 0$ のときは, $ltpq=mspq$ ゆえ $lt=ms$ となり $(l,m) \sim (s,t)$.

例 1.6.15. $\mathbb{R}$ において, $x \sim y \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} x-y \in \mathbb{Z}$ により関係 $\sim$ を定めると, これは同値関係である．この同値関係による商集合を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と書く．

問題集．33

例 1.6.16. G を群, $H \subset G$ をその部分群とする. G 上の関係 $\sim_r$ を $g \sim_r g' \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} g^{-1}g' \in H$ により定めると, これは同値関係である. $e \in G$ を単位元とする.

1. $g^{-1}g = e \in H$ ゆえ $g \sim_r g$.
2. $g \sim_r g'$ とすると $g^{-1}g' \in H$. このとき $(g')^{-1}g = (g^{-1}g')^{-1} \in H$ ゆえ $g' \sim_r g$.
3. $g_1 \sim_r g_2$, $g_2 \sim_r g_3$ とすると $g_1^{-1}g_2$, $g_2^{-1}g_3 \in H$. よって $g_1^{-1}g_3 = (g_1^{-1}g_2)(g_2^{-1}g_3) \in H$ ゆえ $g_1 \sim_r g_3$.

この同値関係による商集合を G/H と書く.

例 1.6.12, 1.6.15 はこの特別な場合である.

問 23. G を群, $H \subset G$ をその部分群とする. G 上の関係 $\sim_l$ を $g \sim_l g' \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} gg'^{-1} \in H$ により定める.

1. $\sim_l$ は同値関係であることを示せ. $\sim_l$ による商集合を $H\backslash G$ と書く.
2. $\sim_r$, $\sim_l$ による $g \in G$ の同値類はそれぞれ
$$gH := \{gh \mid h \in H\}, \quad Hg := \{hg \mid h \in H\}$$
であることを示せ.
3. G がアーベル群であるとき, $\sim_r$ と $\sim_l$ は一致することを示せ.
4. $\sim_r$ と $\sim_l$ が一致するのはどのようなときか?

仲間分けする基準として多く使うのは「何かが同じ」であるという関係であろう. これは次のように定式化できる.

命題 1.6.17. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. X における関係 $\sim$ を $x \sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) = f(y)$ により定めると, これは同値関係である.
2. $\pi\colon X \to X/\sim$ をこの関係による商集合への自然な射影, すなわち $x \in X$ に, x を含む同値類 $C_x \in X/\sim$ を対応させる写像とする. このとき, 単射 $\bar{f}\colon X/\sim \to Y$ が存在して, $f = \bar{f} \circ \pi$ と表される:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, dotted, "\exists \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

この写像 $\bar{f}$ を f により**誘導される写像 (induced map)** という.（命題 1.6.24 参照.）

とくに, $\bar{f}$ により全単射

$$\bar{f}\colon X/\!\sim\ \to \operatorname{Im} f$$

が得られる.

証明. 1. (i) $f(x) = f(x)$ ゆえ $x \sim x$.

(ii) $f(x) = f(y)$ なら $f(y) = f(x)$.

(iii) $f(x) = f(y)$ かつ $f(y) = f(z)$ なら $f(x) = f(z)$.

2. 写像 $\bar{f}\colon X/\!\sim\ \to Y$ を $\bar{f}(C_x) = f(x)$ により定める. $C_x = C_y$ のとき $x \sim y$ なので $f(x) = f(y)$ であるから, $f(x)$ は C_x の代表元のとり方によらず, この定義は意味を持つ.（このようなときしばしば「$\bar{f}$ は well-defined である」という.）

明らかに $f = \bar{f} \circ \pi$ である（$\bar{f} \circ \pi(x) = \bar{f}(C_x) = f(x)$）.

また $\bar{f}(C_x) = \bar{f}(C_y)$ とすると, $f(x) = f(y)$ だから $x \sim y$ ゆえ $C_x = C_y$. すなわち $\bar{f}$ は単射.

□

問 24. この同値関係による $x \in X$ の同値類は $f^{-1}(f(x))$ である.

例 1.6.18. $n \in \mathbb{N}$ とする. 写像 $r\colon \mathbb{Z} \to [n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ を $x \in \mathbb{Z}$ に対し x を n で割った余りを対応させる写像とする. すなわち, $r(x) \in [n]$ は

$$x = nq + r(x), \quad q, r(x) \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r(x) < n$$

により定まるものである. 余りのことを**剰余 (remainder)** という.

明らかに $x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow r(x) = r(y)$ である, つまり n を法として合同という関係は n で割った余りが同じという関係である.

包含写像と r の合成 $[n] \hookrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{r} [n]$ は恒等写像なので r は全射である. よって $\bar{r}\colon \mathbb{Z}/n \to [n]$ は全単射である. また $\{0, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{Z}$ は合同に関する完全代表系である.

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "r"'] \arrow[d] & {[n]} \\
& \mathbb{Z}/n \arrow[ur, "\bar{r}", "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

例 1.6.19. 写像 $d\colon \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{Z}$ を $d(l, m) = l - m$ により定める. ただし $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である.

$d(l,m)=d(p,q)\Leftrightarrow l-m=p-q\Leftrightarrow l+q=m+p$ であるから, 例 1.6.13 の同値関係 $\sim$ は $(l,m)\sim(p,q)\Leftrightarrow d(l,m)=d(p,q)$ をみたす, つまり, 差が同じという関係である.

明らかに d は全射であるから, $\bar{d}\colon \mathbb{N}_0^2/\sim\to\mathbb{Z}$ は全単射である. また完全代表系として $(\mathbb{N}_0\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbb{N}_0)=(\mathbb{N}\times\{0\})\cup\{(0,0)\}\cup(\{0\}\times\mathbb{N})$ がとれる.

例 1.6.20. 写像 $\rho\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ を $\rho(l,m)=\frac{l}{m}$ で定める.

$\rho(l,m)=\rho(p,q)\Leftrightarrow\frac{l}{m}=\frac{p}{q}\Leftrightarrow lq=mp$ であるから, 例 1.6.14 の同値関係 $\sim$ は $(l,m)\sim(p,q)\Leftrightarrow\rho(l,m)=\rho(p,q)$ をみたす, つまり, 商が同じという関係である.

明らかに ρ は全射であるから, $\bar{\rho}\colon\ (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})/\sim\to\mathbb{Q}$ は全単射である.

例 1.6.21. $p\colon\mathbb{R}\to S^1=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ を $p(\theta)=e^{2\pi i\theta}$ で定める.

$p(\theta)=p(\tau)\Leftrightarrow e^{2\pi i\theta}=e^{2\pi i\tau}\Leftrightarrow e^{2\pi i(\theta-\tau)}=1\Leftrightarrow\theta-\tau\in\mathbb{Z}$ であるから例 1.6.15 の同値関係 $\sim$ は $\theta\sim\tau\Leftrightarrow p(\theta)=p(\tau)$ をみたす. p は全射であるから, $\bar{p}\colon\mathbb{R}/\mathbb{Z}\to S^1$ は全単射である.

例 1.6.22. G, H を群, $f\colon G\to H$ を準同型写像とする.

$$f(g)=f(g')\Leftrightarrow e=f(g)^{-1}f(g')=f(g^{-1}g')\Leftrightarrow g^{-1}g'\in\operatorname{Ker}f$$

であるから, f は全単射

$$\bar{f}\colon G/\operatorname{Ker}f\to\operatorname{Im}f$$

を誘導する. (代数で学ぶように, $G/\operatorname{Ker}f$, $\operatorname{Im}f$ は群になり, $\bar{f}$ は同型写像である.)

例 1.6.23. X,Y を集合, $\sim$, $\approx$ をそれぞれ X, Y 上の同値関係, $p\colon X\to X/\sim$, $q\colon Y\to Y/\approx$ をそれぞれ自然な射影とする.

集合 $X\times Y$ における関係 $\simeq$ を $(x,y)\simeq(x',y')\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}(x\sim x')\wedge(y\approx y')$ により定める.

写像 $p\times q\colon X\times Y\to X/\sim\times Y/\approx$ を考えると,

$$\begin{aligned}(p\times q)(x,y)=(p\times q)(x',y')&\Leftrightarrow(p(x),q(y))=(p(x'),q(y'))\\&\Leftrightarrow(p(x)=p(x'))\wedge(q(y)=q(y'))\\&\Leftrightarrow(x\sim x')\wedge(y\approx y')\\&\Leftrightarrow(x,y)\simeq(x',y')\end{aligned}$$

であるから $\simeq$ は同値関係であり (もちろん直接確かめてもよい), $(x,y)\in X\times Y$ の同値類は $C_x\times C_y$ である. $p\times q$ は全射であるから, 全単射

$$\overline{p\times q}\colon\ (X\times Y)/\simeq\to(X/\sim)\times(Y/\approx)$$

をえる. もちろん, 具体的に書けば

$$\overline{p \times q}\left(C_{(x,y)}\right) = (p \times q)(x,y) = (p(x), q(y)) = (C_x, C_y)$$

であり, 逆写像は $(C_x, C_y) \mapsto C_{(x,y)}$ で与えられる.

同じグループのメンバーが皆同じ性質を持っていれば, そのグループはその性質を持っているといってよいであろう. 次の命題はこれを定式化したものである. 内容, 証明ともに命題 1.6.17.2 とほぼ同じである.

命題 1.6.24. X を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とし, $\pi\colon X \to X/\sim$ をこの関係による商集合への自然な射影, すなわち $x \in X$ に, x を含む同値類 $C_x \in X/\sim$ を対応させる写像とする.

$f\colon X \to Y$ を写像とする. 次は同値である.

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$.
2. $f = \bar{f} \circ \pi$ となるような写像 $\bar{f}\colon X/\sim \to Y$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim . \arrow[ur, dotted, "\exists \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

さらに, このような写像 $\bar{f}$ は一意的である. この写像 $\bar{f}$ を f により**誘導される写像 (induced map)** という.

具体的に書けば $\bar{f}(C_x) = f(x)$ である.

証明. 1 $\Rightarrow$ 2 の証明は命題 1.6.17 と同じ. 2 $\Rightarrow$ 1 を示そう. $f = \bar{f} \circ \pi$ であるとする. $x \sim x'$ とすると, $\pi(x) = \pi(x')$ であるから,

$$f(x) = (\bar{f} \circ \pi)(x) = \bar{f}(\pi(x)) = \bar{f}(\pi(x')) = (\bar{f} \circ \pi)(x') = f(x').$$

π は全射なのでこのような写像 $\bar{f}$ は一意的である. □

系 1.6.25. X, Y を集合, $\sim, \approx$ をそれぞれ X, Y 上の同値関係, $p\colon X \to X/\sim$, $q\colon Y \to Y/\approx$ をそれぞれ自然な射影とする.

$f\colon X \to Y$ を写像とする. 次は同値である.

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$.
2. $q \circ f = \bar{f} \circ p$ となるような写像 $\bar{f}\colon X/\sim \to Y/\approx$ が存在する.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/\sim \arrow[r, dotted, "\exists \bar{f}"'] & Y/\approx . \end{tikzcd}$$

この $\bar{f}$ は $\bar{f}(C_x) = C_{f(x)}$ により与えられる.

証明. $q \circ f \colon X \to Y/\approx$ に命題 1.6.24 を使えばよい. □

例 1.6.26. 整数の加法 $+\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(l, m) \mapsto l + m$ を考える. $l \equiv l' \pmod n$ かつ $m \equiv m' \pmod n$ であれば $l + m \equiv l' + m' \pmod n$ であるから, 加法は写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n \\ \uplus & & \uplus \\ (\bar{l}, \overline{m}) & \longmapsto & \overline{l+m} \end{array}$$

を定める. もう少し丁寧に書けば, 次の図式の下の行の合成がこの写像である. ただし, $\sim$ は

$$(l, m) \sim (l', m') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} l \equiv l' \pmod n \text{ かつ } m \equiv m' \pmod n$$

により定まる同値関係, 下の行の左側の全単射は例 1.6.23 の全単射の逆写像であり, 下の行の右側の写像は系 1.6.25 で与えられる写像である：

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[r, "+"] \arrow[dl] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\ \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \arrow[r, "\cong"'] & (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\sim \arrow[r] & \mathbb{Z}/n. \end{tikzcd}$$

普通この写像も $+$ を使って表す. すなわち $\bar{l} + \overline{m} := \overline{l+m}$.

同様に整数の乗法 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(l, m) \mapsto lm$ も $\bar{l} \cdot \overline{m} := \overline{lm}$ により $\mathbb{Z}/n$ に乗法を定める.

$\mathbb{Z}/n$ のこの加法と乗法は, 整数の加法, 乗法と同様な性質（結合律, 可換律, 分配律等）をみたし, これにより $\mathbb{Z}/n$ は**可換環**となる.

例 1.6.27. $\mathbb{N}_0^2$ 上の演算 $\ominus\colon \mathbb{N}_0^2 \times \mathbb{N}_0^2 \to \mathbb{N}_0^2$, $(l, m) \ominus (p, q) = (l + q, m + p)$ は例 1.6.13 の同値関係による商集合上の演算 $\mathbb{N}_0^2/\sim \times \mathbb{N}_0^2/\sim \to \mathbb{N}_0^2/\sim$ を定める.

問 25. 上の演算も $\ominus$ と書くことにする. $\bar{d}$ を例 1.6.19 の全単射とするとき,

$\bar{d}\left(\bar{d}^{-1}(x)\ominus\bar{d}^{-1}(y)\right)$ を求めよ.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N}_0^2/\sim\times\mathbb{N}_0^2/\sim \arrow[r, "\ominus"] \arrow[d, "\bar{d}\times\bar{d}"', "\cong"] & \mathbb{N}_0^2/\sim \arrow[d, "\cong"', "\bar{d}"] \\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[r, dotted] & \mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

問題集． 41(1)(2), 42(2)(3)(4), 43(1)(2)(3), 44

1.7　順序関係

定義 1.7.1. 集合 X における関係 $\leq$ が次の条件をみたすとき, この関係を**順序 (order)** あるいは**半順序 (partial order)** という.

1. （**反射律, reflexive law** ） $x \leq x$
2. （**反対称律, antisymmetric law** ） $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば, $x = y$
3. （**推移律, transitive law** ） $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば, $x \leq z$

集合 X における順序 $\leq$ がさらに次もみたすとき, この順序を**全順序 (total order)** あるいは**線型順序 (linear order)** という.

4. 任意の $x, y \in X$ に対し, $x \leq y$ か $y \leq x$ の少なくとも一方が必ず成立する.

定義 1.7.2. 集合 X とその上の順序 $\leq$ の組 $(X, \leq)$ を**順序集合 (ordered set)** あるいは**半順序集合 (partially ordered set, poset)** という.

混乱のおそれがないときは $\leq$ を省略して単に順序集合 X と書くことが多い.

注意．順序関係を表す記号として必ず $\leq$ を使うというわけではない.

この記号 $\leq$ を用いる場合, しばしば以下の記法が用いられる.

- $x \leq y$ のとき $y \geq x$ と書く.
- $x \leq y$ かつ $x \neq y$ のとき $x < y$ と書く.
- $x < y$ のとき $y > x$ と書く.

問 26. $x < y$ かつ $y \leq z$ ならば, $x < z$.

定義 1.7.3. X, Y を順序集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. 任意の $x, x' \in X$ に対し, $x \leq x'$ ならば $f(x) \leq f(x')$ となるとき, f を**順序を保つ写像 (order preserving map)** という.
2. 順序を保つ写像 f は, 順序を保つ写像 $g\colon Y \to X$ で, $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたすものが存在するとき, **順序同型写像 (order isomorphism)** であるという.
3. X から Y への順序同型写像が存在するとき, X と Y は**順序同型**であるという.

注意．順序を保つ全単射は必ずしも順序同型写像ではない. 例 1.7.4 参照.

問 27. X, Y を順序集合, $f\colon X \to Y$ を全単射とする. このとき次を示せ.

1. f が順序同型写像であるための必要十分条件は, 任意の $x, x' \in X$ に対し $x \leq x' \Leftrightarrow$

$f(x) \leq f(x')$ となることである.

2. X が全順序集合で, f が順序を保てば, f は順序同型写像である.

例 **1.7.4.** X を集合とする．関係 $=$ は明らかに順序関係である．X が元を二つ以上含めば, この順序は全順序ではない.

$\leq$ を X 上の順序とする．明らかに恒等写像 $\mathrm{id}\colon (X,=) \to (X,\leq)$ は順序を保つ.

例 **1.7.5.** $(X,\leq)$ を順序集合とする．関係 $\prec$ を $x \prec y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \geq y$ により定めると, $\prec$ は順序関係である．これを $\leq$ の**双対 (dual)** あるいは **opposite** という.

普通はこの順序を（$\prec$ 等は使わず）$\geq$ と書く．$\leq^{op}$ と書くこともある.

順序集合 X に双対順序をいれた順序集合を X^{op} と書くことがある.

例 **1.7.6.** $(X,\leq)$ を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする．A 上の関係 $\prec$ を $a \prec b \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \leq b$（右辺は $a,b \in A$ を X の元とみている）により定めると, $\prec$ は順序関係である．普通はこの順序を（$\prec$ 等は使わず）$\leq$ と書く．とくにことわらなければ, 順序集合の部分集合を順序集合と考えるときはこの順序を使う.

X が全順序集合であれば, この順序により A も全順序集合である．X が全順序集合でなくとも, この順序により A が全順序集合となることもある.

例 **1.7.7.** $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Z}$ の普通の順序（数の大小関係）は全順序である.

例 **1.7.8.** $\mathbb{N}$ における n が m の倍数であるという関係 $m|n$ は順序である.

問 **28.** $\mathbb{Z}$ における関係 $m|n$ は順序か？

例 **1.7.9.** X を集合とする．$\mathcal{P}(X)$ 上の包含関係 $A \subset B$ は順序である．とくにことわらなければ $\mathcal{P}(X)$ を順序集合と考えるときはこの順序を使う.

X が元を二つ以上含めば, $\mathcal{P}(X)$ のこの順序は全順序ではない.

例 **1.7.10.** $(P,\leq)$ を順序集合, X を集合とする．P^X の元 f,g に対し, $f \leq g \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X : f(x) \leq g(x)$ と定めると, P^X 上の順序である.

問 **29.** これを示せ.

例 **1.7.11.** $[2] = \{0,1\}$ には $\mathbb{Z}$ の部分集合として順序（$0 < 1$）が入る.

2^X の元 a,b に対し, $a \leq b \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X : a(x) \leq b(x)$ と定めると順序である.

例 **1.7.12.** $\chi\colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ は上の例 1.7.9, 例 1.7.11 の順序に関して順序同型写像である.

実際, $A \subset B \subset X$ であるとする．$x \in A$ のときは, $A \subset B$ であるから, $x \in B$ と

なり $\chi_B(x) = 1$ ゆえ $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$. $x \notin A$ のときは $\chi_A(x) = 0$ だから, 明らかに $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$. よって任意の $x \in X$ に対し $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$, すなわち $\chi_A \leq \chi_B$ である. したがって $\chi(A) = \chi_A \leq \chi_B = \chi(B)$.

χ の逆写像を $\varphi\colon 2^X \to \mathcal{P}(X)$ とする. $\varphi(a) = a^{-1}(1)$ である. $a \leq b \in 2^X$ とする. $a(x) = 1$ ならば $b(x) \geq a(x) = 1$ だから $b(x) = 1$ である. よって $\varphi(a) = a^{-1}(1) \subset b^{-1}(1) = \varphi(b)$.

例 **1.7.13.** P, Q を順序集合とする.

1. 直積 $P \times Q$ 上の $(p, q) \leq (p', q') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \leq p' \wedge q \leq q'$ で定まる関係は順序である. これを**直積順序 (product order)** という.
2. 直積 $P \times Q$ 上の $(p, q) \leq (p', q') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p < p' \vee (p = p' \wedge q \leq q')$ で定まる関係は順序である. これを**辞書式順序 (lexicographical order)** という.
   もちろん, これは（2 文字からなる単語だけが載っている）辞書で単語が並んでいる順番である.

例えば $P = Q = \{a, b, c\}$ に $a < b < c$ という順序をいれたとき, $\{a, b, c\}^2$ に直積順序をいれたものを図示（小さい方から大きい方へ矢印が書いてある. このような図をハッセ図という. 定義 1.7.17 を見よ.）すると

$$\begin{tikzcd}
(c,a) \arrow[r] & (c,b) \arrow[r] & (c,c) \\
(b,a) \arrow[r] \arrow[u] & (b,b) \arrow[r] \arrow[u] & (b,c) \arrow[u] \\
(a,a) \arrow[r] \arrow[u] & (a,b) \arrow[r] \arrow[u] & (a,c) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

となる. この順序では例えば (a, b) と (b, a) の間に大小関係は無い. 一方, 辞書式順序をいれたものは

$$\begin{tikzcd}
(c,a) \arrow[r] & (c,b) \arrow[r] & (c,c) \\
(b,a) \arrow[r] & (b,b) \arrow[r] & (b,c) \arrow[ull] \\
(a,a) \arrow[r] & (a,b) \arrow[r] & (a,c) \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

となる.

直積順序と辞書式順序は三つ以上の順序集合のデカルト積に対しても同様に定義される．また, 辞書式順序は全順序集合に対して用いられることが多い.

問 30. P, Q を順序集合とし, $P \times Q$ 上の直積順序を $\leq_{prod}$, 辞書式順序を $\leq_{lex}$ で表す.

1. $\leq_{prod}$ と $\leq_{lex}$ が順序であることを示せ.
2. 恒等写像
$$\mathrm{id}\colon (P \times Q, \leq_{prod}) \to (P \times Q, \leq_{lex}),$$
$$\mathrm{id}\colon (P \times Q, \leq_{lex}) \to (P \times Q, \leq_{prod})$$
は順序を保つか？
3. P, Q がともに全順序集合であれば, $\leq_{lex}$ も全順序であることを示せ.

例 1.7.14. P を順序集合とする．集合 $P^{[2]}$ に例 1.7.10 の順序を, P^2 に直積順序をいれる．$e(f) = (f(0), f(1))$ で与えられる写像

$$\begin{array}{cccc} e\colon & P^{[2]} & \longrightarrow & P^2 \\ & \cup\!\!\!\!\!\! \text{\scriptsize $\cup$} & & \Psi \\ & f & \longmapsto & (f(0), f(1)) \end{array}$$

は順序同型写像である.

定義 1.7.15. X を順序集合, $a, b \in X$ とする.

1. $$[a, b] := \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$$
を a, b を端点とする**閉区間 (closed interval)** という.
2. $$(a, b) := \{x \in X \mid a < x < b\}$$
を a, b を端点とする**開区間 (open interval)** という.
3. $a < b$ かつ $(a, b) = \emptyset$ であるとき, a を b の**直前 (predecessor)** の元, b を a の**直後 (successor)** の元という.

この他半開区間 $[a, b)$ 等といった記号も使う．意味は明らかであろう.

注意*!* ．開区間の記号 (a, b) は直積集合 $X \times X$ の元を表す記号と同じなので注意が必要であるが, 通常文脈からどちらの意味かは判断できる.

例 1.7.16.　1. $\mathbb{N}$ に普通の順序を入れると

$$[1,4]=\{1,2,3,4\} \qquad (1,4)=\{2,3\}$$
$$[1,5]=\{1,2,3,4,5\} \qquad (1,5)=\{2,3,4\}$$

である.

2. $\mathbb{N}$ に $m|n$ により順序を入れる（例 1.7.8 参照）と

$$[1,4]=\{1,2,4\} \qquad (1,4)=\{2\}$$
$$[1,5]=\{1,5\} \qquad (1,5)=\emptyset$$

である（定義 1.7.17.3 参照）.

問 31. X を順序集合, $a,b\in X$, $a\leq b$ とする. また, $x>b$ であるような $x\in X$ が存在するとする. $A=\bigcap_{x>b}[a,x)$ とおく.

1. $A\supset[a,b]$ であることを示せ.
2. X の順序が全順序であれば $A=[a,b]$ であることを示せ.
3. $A\neq[a,b]$ となる例を挙げよ.

問 32. X を順序集合, $a,b\in X$, $a\leq b$ とする. また, $x>b$ であるような $x\in X$ が存在するとする. $A=\bigcap_{x>b}[a,x]$ とおく. 次の二つの条件を考える.

(i) $A=[a,b]$.

(ii) $\forall y>b,\exists x>b: x<y$.

1. X が全順序集合であるとき, (i) と (ii) は同値であることを示せ.
2. X の順序が全順序でないとき, (i)⇒(ii) は成り立つか？ 成り立つなら証明し, 成り立たない場合は例を挙げよ.

3*. X の順序が全順序でないとき, (ii)⇒(i) は成り立つか？ 成り立つなら証明し, 成り立たない場合は例を挙げよ.

定義 1.7.17 (ハッセ図, Hasse diagram)**.** 有限順序集合を図示するのに有用な**ハッセ図 (Hasse diagram)** を紹介しておく. （とはいえ, 人が手で苦労せず書けるのは元の数がごく少ない場合に限られるであろうし, ぱっと見て意味を読み取れるのも元の数がそれほど多くは無い場合であろうけれど.）

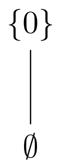
$(X,\leq)$ を有限順序集合とする. X の元を頂点とし, x の直後の元が y であるときに x から y へ矢印を書く. ただし, 矢印同士は頂点同士以外では交わってもよい. 矢印を書くと煩雑になるので, 矢印を使わず大きい元が上になるように書くことも多い.

与えられた順序集合に対し，ハッセ図（の見た目）が一通りに書けるわけではないが，（正しく書かれた）ハッセ図から順序関係を復元することができる．

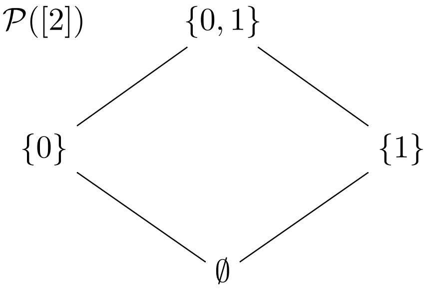
具体的な例を挙げよう．

1. 冪集合に包含関係で順序をいれたもの．

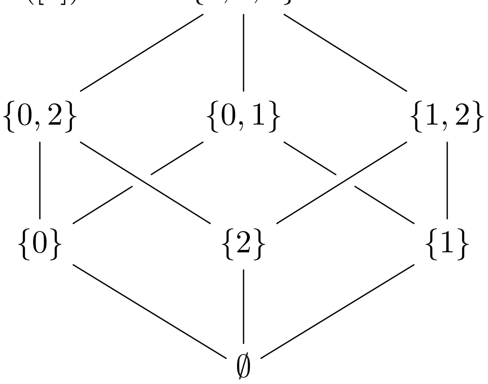
$\mathcal{P}([1])$



$\mathcal{P}([2])$



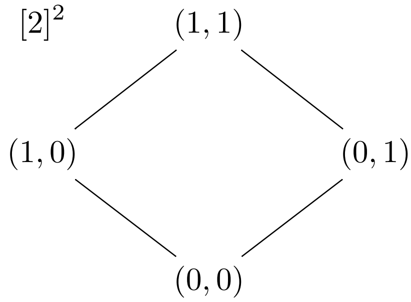
$\mathcal{P}([3])$



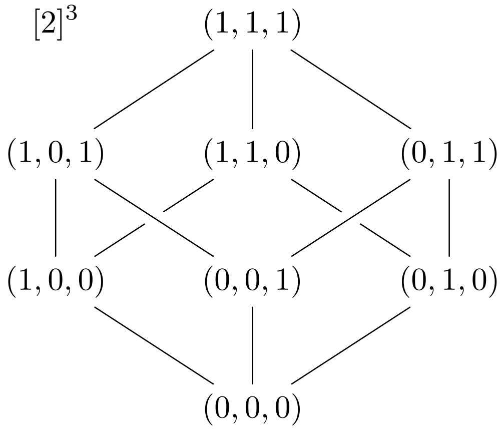
2. $[2]=\{0,1\}$ に $0<1$ という順序をいれたものの直積に直積順序をいれたもの．

$[2]$

$[2]^2$



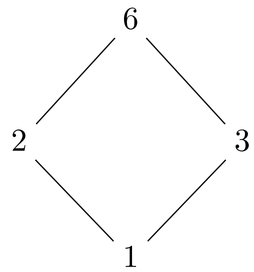
$[2]^3$



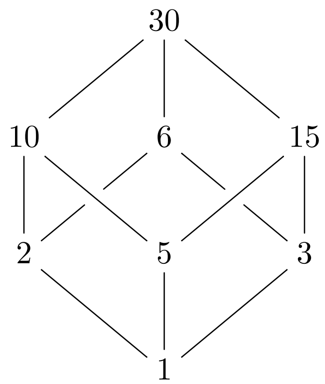
3. いくつかの自然数の集合に割り切れるという順序をいれたもの.

$(\{1, 2\}, |)$

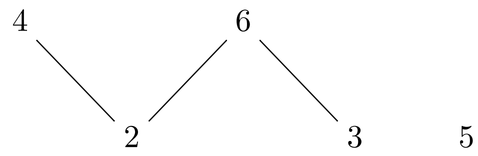
$(\{1, 2, 3, 6\}, |)$



$(\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}, |)$



$(\{2, 3, 4, 5, 6\}, |)$



4. 冪集合から空集合を除いたものに包含関係で順序をいれたもの.

$\mathcal{P}([1]) \setminus \{\emptyset\}$　　$\{0\}$

$\mathcal{P}([2]) \setminus \{\emptyset\}$　　$\{0\} \longrightarrow \{0, 1\} \longleftarrow \{1\}$

$\mathcal{P}([3]) \setminus \{\emptyset\}$

$$\begin{tikzcd}
 & & \{2\} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \{0,2\} \arrow[dr] & & \{1,2\} \arrow[dl] & \\
 & & \{0,1,2\} & & \\
\{0\} \arrow[uur] \arrow[rr] & & \{0,1\} \arrow[u] & & \{1\} \arrow[ll] \arrow[uul]
\end{tikzcd}$$

定義 1.7.18. X を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. $m \in X$ が A の**上界 (upper bound)** である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in A : a \leq m$.
2. $l \in X$ が A の**下界 (lower bound)** である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in A : l \leq a$.

   注意*!* . 上界, 下界とも一つだけというわけではない.

3. A が上界を持つとき A は**上に有界 (bounded from above)** であるという.
   A が下界を持つとき A は**下に有界 (bounded from below)** であるという.
   上にも下にも有界であるとき**有界 (bounded)** であるという.

定義より「A が有界 $\Leftrightarrow \exists l, m \in X, \forall a \in A : l \leq a \leq m$ 」が分かる.

注意 . $l \in X$ が A の下界であることと $l \in X^{op}$ が A の上界であることは同じことである. このように, 順序をその双対でおきかえて得られる（つまり不等号の向きを全て逆にして得られる）概念をもとのものの双対という. 下界は上界の, 上界は下界の双対である.

任意の順序集合に対して成立する命題は, （X^{op} を考えることで）不等号の向きを逆にした命題も成立する. これを順序に対する**双対原理 (duality principle)** という.

問 33. X を順序集合, $A, B \subset X$ とする.

1. B が有界で, $A \subset B$ ならば, A も有界.
2. X を全順序集合とする. A, B がどちらも有界ならば, $A \cup B$ も有界.
3. A, B ともに有界であるが, $A \cup B$ は有界とならないような例があれば挙げよ.

例 1.7.19. $X \neq \emptyset$ を順序集合とする. 任意の $x \in X$ は $\emptyset \subset X$ の上界かつ下界である. 実際, $\forall a \in \emptyset : a \leq x$, $\forall a \in \emptyset : x \leq a$ はどちらも（前提が偽であるから）成り立つ.

とくに $X \neq \emptyset$ のとき, $\emptyset \subset X$ は有界である.

定義 1.7.20. X を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. $M \in X$ が A の**最大元 (maximum element)** である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\text{(i)} & M \in A \\ \text{(ii)} & M \text{ は } A \text{ の上界である. すなわち } \forall a \in A : a \leq M\end{cases}$$

このとき $M = \max\limits_{a\in A} a = \max\limits_{A} a = \max A$ 等と書く.

2. $m \in X$ が A の**最小元 (minimum element)** である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\text{(i)} & m \in A \\ \text{(ii)} & m \text{ は } A \text{ の下界である. すなわち } \forall a \in A : m \leq a\end{cases}$$

このとき $m = \min\limits_{a\in A} a = \min\limits_{A} a = \min A$ 等と書く.

注意 . 最大元と最小元は互いに双対である.

命題 1.7.21. $A \subset X$ の最大元 (最小元) は存在すれば一意的である.

証明. 実際, M_1, M_2 をともに A の最大元とすると定義より次が成り立つ.

(i1) $M_1 \in A$
(ii1) $\forall a \in A : a \leq M_1$
(i2) $M_2 \in A$
(ii2) $\forall a \in A : a \leq M_2$

(i1) と (ii2) より $M_1 \leq M_2$. 同様に $M_2 \leq M_1$. よって順序の性質より $M_1 = M_2$.

最小元についても同様にして示してもよいが, 双対性原理より成り立つ. つまり, $m \in X$ が A の最小元であることと $m \in X^{op}$ が A の最大元であることは同じことであることに注意すれば最大元のときのみ示しておけば十分である. □

例 1.7.22. $\mathbb{N}$ に $m|n$ で順序をいれる. $\min \mathbb{N} = 1$ である. 一方, $\min(\mathbb{N} \setminus \{1\})$ は存在しない. 実際, $p \in \mathbb{N}$ が素数であれば, $m|p$ となる $m \in \mathbb{N}$ は $1, p$ のみである. とくに, $2, 3 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対し, $m|2$ かつ $m|3$ となる $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ は存在しない.

例 1.7.23. $\max \mathcal{P}(X) = X$, $\min \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

問 34. これを確かめよ.

例 1.7.24. $[2]$ に $0 < 1$ という順序をいれると, $\min\{p, q\} = p \wedge q = pq$. $\max\{p, q\} = p \vee q$.

問 35. これを確かめよ.

問 36. X を順序集合, $a, b \in X$, $a \leq b$ とする. $\max[a, b] = b$, $\min[a, b] = a$ を示せ.

例 1.7.25. $\mathbb{Q}$ に数の大小関係で順序をいれる．$a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ とする．$\max(a, b)$, $\min(a, b)$ はともに存在しない．

実際, 任意の $x \in (a, b)$ について, x が最小元ではないことが以下のようにして分かる．$x \in (a, b)$ ゆえ $a < x < b$. $c = \frac{x+a}{2}$ とおくと,

$$c - a = \frac{x+a}{2} - a = \frac{x-a}{2} > 0 \qquad x - c = x - \frac{x+a}{2} = \frac{x-a}{2} > 0$$

だから $a < c < x$. $x < b$ なので $c < b$. よって $c \in (a, b)$ かつ $c < x$. よって x は最小元ではない．最大元についても同様.

問 37. 最大元について示せ.

定義 1.7.26. X を順序集合, $A \subset X$ とする．

1. A の上界全体の集合に最小元が存在するときそれを A の**上限 (supremum)** とよび

   $$\sup_{a \in A} a \text{ または } \sup A$$

   で表す．すなわち A の上界全体を

   $$U_A := \left\{ x \in X \;\middle|\; x \text{ は } A \text{ の上界} \right\}$$

   とおくと, $\sup A = \min U_A$.
2. A の下界全体の集合に最大元が存在するときそれを A の**下限 (infimum)** とよび

   $$\inf_{a \in A} a \text{ または } \inf A$$

   で表す．すなわち A の下界全体を

   $$L_A := \left\{ x \in X \;\middle|\; x \text{ は } A \text{ の下界} \right\}$$

   とおくと, $\inf A = \max L_A$.

注意．上限, 下限は互いに双対である．また, 上限, 下限ともに存在すれば一意的である.

例 1.7.27. X を順序集合とする．$\min X$ が存在すれば $\sup \emptyset = \min X$ である．$\max X$ が存在すれば $\inf \emptyset = \max X$ である.

実際, $\min X$ か $\max X$ が存在すれば $X \neq \emptyset$ であるから $\emptyset \subset X$ は有界であり, $U_\emptyset = L_\emptyset = X$ となる.

命題 1.7.28. $\max A$ が存在すれば $\sup A = \max A$.

証明. $M = \max A$ とする. A の上界全体のなす集合を U_A と書く.

最大元の定義 (ii) より M は A の上界である, すなわち $M \in U_A$.

また最大元の定義 (i) より $M \in A$. 従って, A の任意の上界 $m \in U_A$ に対し $M \leq m$.

よって $M = \min U_A$, すなわち A の上限である. □

命題 1.7.29. X を全順序集合, $A \subset X$ とする.

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \forall a \in A : a \leq s, \\ \text{(ii)} & \forall x \in X : (x < s \to \exists a \in A : x < a). \end{cases}$$

注意*!* . この特徴づけは全順序集合でなければ一般には正しくない.

証明. 条件 (i) は s が A の上界であることをいっている.

一方対偶を考えると条件 (ii) は「x が A の上界ならば, $s \leq x$」と同値.

すなわち (i),(ii) は s が A の上界の最小元であることをいっている. □

問 38. 1. 上の証明のどこで X が全順序集合であることを用いているか?

2. 一般の順序集合で命題 1.7.29 の $\Rightarrow$ は成り立つだろうか? 成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例を挙げよ.

3*. 一般の順序集合で命題 1.7.29 の $\Leftarrow$ は成り立つだろうか? 成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例を挙げよ.

例 1.7.30. $\mathbb{Q}$ に数の大小関係で順序をいれる. $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ とする. $\sup(a,b) = b$, $\inf(a,b) = a$ である.

証明. $b = \sup(a,b)$ であることを, 命題 1.7.29 を使って示そう.

$x \in (a,b)$ ならば $a < x < b$ であるから b は (a,b) の上界である. すなわち b は命題 1.7.29 の条件 (i) をみたす.

条件 (ii) を調べよう. $c < b$ とする. $d = \max\{a, c\}$ とおくと, $d < b$. よって $y = (b+d)/2 \in \mathbb{Q}$ とおくと $d < y < b$ となる. $a \leq d$ に注意すると $a < y < b$, すなわち $y \in (a,b)$ である. また $c \leq d$ であるから $c < y$. よって条件 (ii) も成り立っている. 従って $b = \sup(a,b)$.

$\inf(a,b) = a$ も同様. □

問 39. 下限の方を示せ.

例 1.7.31. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ に対し, $\sup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, $\inf \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ である. ただし, $\mathcal{A} = \emptyset$ のときは $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = X$ と約束する. (§1.5 節の Remark 参照.)

証明. 下限の方を示そう. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ のときを考える.

$$\begin{aligned} B \subset X \text{ が } \mathcal{A} \text{ の下界} &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall A \in \mathcal{A} : B \subset A \\ &\Leftrightarrow B \subset \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \end{aligned}$$

であるから $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$ は $\mathcal{A}$ の下界の最大元, すなわち $\inf \mathcal{A}$ である.

$\mathcal{A} = \emptyset$ のときは, $\max \mathcal{P}(X) = X$ であるから $\inf \emptyset = \max \mathcal{P}(X) = X$ ゆえ成立. □

問 40. 上限の方を示せ.

定義 1.7.32. X を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. $M \in X$ が A の**極大元 (maximal element)** である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & M \in A, \\ \text{(ii)} & \forall a \in A : M \not< a. \end{cases}$$

つまり, M が A の元であり, かつ M より大きい元は A の中にないときに M は A の極大元である.

2. $m \in X$ が A の**極小元 (minimal element)** である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & m \in A, \\ \text{(ii)} & \forall a \in A : a \not< m. \end{cases}$$

つまり, m が A の元であり, かつ m より小さい元は A の中にないときに m は A の極小元である.

命題 1.7.33. 最大元は極大元であり, 最小元は極小元である.

証明. $a \leq M \Rightarrow M \not< a$. □

命題 1.7.34. 全順序部分集合では極大元は最大元であり, 極小元は最小元である.

証明. 全順序集合では $M \not< a \Rightarrow M \geq a$. □

例 1.7.35. 一般には極大元, 極小元は一意ではない. $\mathbb{N}$ に $m|n$ で順序をいれる. $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ が極小であることと n が素数であることは同値である.

定義 1.7.36. 一般の順序集合に対して定義することはあまりないが, 上界, 下界が存在する場合上極限, 下極限を定義できる. X を順序集合, $a\colon \mathbb{N} \to X$ を写像とする. (これを X の点列という.) 数列の場合と同様, 普通 $a(n) \in X$ を a_n と書き, 点列を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}$ 等と表す.

1. 点列 $\{\overline{a}_n\}$ を $\overline{a}_n := \sup\{a_i | i \geq n\} \in X$ で定める. X の部分集合 $\{\overline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の

下限を点列 $\{a_n\}$ の上極限といい, $\limsup a_n$ あるいは $\overline{\lim}\, a_n$ と書く．すなわち

$$\limsup a_n = \inf\{\overline{a}_n\} = \inf\left\{\sup\{a_i | i \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

2. 点列 $\{\underline{a}_n\}$ を $\underline{a}_n := \inf\{a_i | i \geq n\}$ で定める．X の部分集合 $\{\underline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上限を点列 $\{a_n\}$ の下極限といい, $\liminf a_n$ あるいは $\underline{\lim}\, a_n$ と書く．すなわち

$$\liminf a_n = \sup\{\underline{a}_n\} = \sup\left\{\inf\{a_i | i \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

例 1.7.37. $\mathcal{P}(X)$ の点列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，ここで定義した上極限, 下極限と定義 1.5.9 で定義したものは同じである．

問 41. X, Y を順序集合, $f \colon X \to Y$ を順序を保つ写像, $A \subset X$ とする．

1. $m \in X$ が A の上界であれば $f(m)$ は $f(A)$ の上界である．
2. $m = \max A$ ならば $f(m) = \max f(A)$.
3. 上限について同様なことが言えるか？ X, Y, f に適当に条件をつけると何か言えるか？
4. m が A の極大元であるが, $f(m)$ は $f(A)$ の極大元とはならないような例を挙げよ．

問 42. X を集合, P を順序集合, P^X に各点毎の順序（例 1.7.10）をいれる．$F \subset P^X$ とする．

1. $\max F$ が存在するとする．このとき任意の $x \in X$ に対し, $(\max F)(x) = \max\{f(x) \mid f \in F\}$ である．
2. 任意の $x \in X$ に対し, $\max\{f(x) \mid f \in F\}$ が存在するとする．このとき $\max F$ は存在するか？
3. $\sup F$ が存在するとする．このとき任意の $x \in X$ に対し, $(\sup F)(x) = \sup\{f(x) \mid f \in F\}$ である．
4. 任意の $x \in X$ に対し, $\sup\{f(x) \mid f \in F\}$ が存在するとし, $f_s \in P^X$ を $f_s(x) = \sup\{f(x) \mid f \in F\}$ により定める．このとき $f_s = \sup F$ である．

1.8 濃度

この節では集合の濃度をあつかう．濃度というのはおおざっぱに言えば集合の元の個数のことである．前半では有限集合をあつかい，その後無限集合をあつかう．

この節では非負整数全体 $\mathbb{N} \cup \{0\}$ を $\mathbb{N}_0$ で表す．（以前にも注意したが，この記号は標準的なものではない.）

集合 X から Y へ全単射が存在するときに X と Y は対等といって $X \cong Y$ と書いた（定義 1.4.15）．この対等という" 関係" は同値律をみたす．

定理 1.8.1. X, Y, Z を集合とする．

1. $X \cong X$.
2. $X \cong Y \Rightarrow Y \cong X$.
3. $X \cong Y \wedge Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$.

証明．

1. 恒等写像は全単射．
2. 全単射の逆写像も全単射．
3. 全単射の合成は全単射．

□

1.8.1 有限集合

これまでにも有限集合という言葉をことわりなく使ってきたが，ここで定義と基本的な性質を与えておく．

あらためて集合 $[n]$ を定義しておこう．

定義 1.8.2. $n \in \mathbb{N}_0$ に対し，$\mathbb{N}_0$ の部分集合 $[n]$ を

$$[n] := \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m < n\}$$

で定める．

また，$[n]$ を順序集合と考えるときは，とくに断らなければ $\mathbb{N}_0$（の普通の順序）から入る順序を入れる．

定義 1.8.3. 集合 X が**有限集合 (finite set)** である

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある非負整数 $n \in \mathbb{N}_0$ が存在して，X は $[n]$ と対等である．

注意．有限集合の定義の仕方にはいろいろな流儀がある．適当な仮定のもとではいずれも

同値である．ここで述べた定義は最もわかりやすいものだと思うが, 一番標準的というわけではない.

集合 $[n]$ についての性質をいくつか挙げる．証明は数学的帰納法による（1.10.8 節を見よ）.

補題 1.8.4. $A \subset [n]$ ならば, ある $m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$ が存在し, A と $[m]$ は順序同型である: $A \cong [m]$. ただし, A には $[n]$ から入る順序を入れる.

補題 1.8.4 とほとんど同様に示せるが, 次の補題 1.8.5 は元の個数を考える上で基本的である.

補題 1.8.5. $m, n \in \mathbb{N}_0$ とする．このとき次が成り立つ.

1. 単射 $f\colon [m] \to [n]$ が存在する $\Leftrightarrow m \leq n$.
2. 全射ではない単射 $f\colon [m] \to [n]$ が存在する $\Leftrightarrow m < n$.

系 1.8.6. $m, n \in \mathbb{N}$ とする．このとき

1. 全射 $f\colon [m] \to [n]$ が存在する $\Leftrightarrow m \geq n$.
2. 単射ではない全射 $f\colon [m] \to [n]$ が存在する $\Leftrightarrow m > n$.

   注意．$\Rightarrow$ は $m = 0$ または $n = 0$ のときも正しい.

問 43. $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ とする．全射 $[m] \to [n]$ を作れ.

補題 1.8.4 より次が分かる.

系 1.8.7. 有限集合の部分集合は有限集合である.

証明.（**2019 年度はパス**）　X を有限集合, $A \subset X$ とする．定義よりある $n \in \mathbb{N}_0$ と全単射 $f\colon X \to [n]$ が存在する．f の A への制限により $A \cong f(A) \subset [n]$ である．ある $m \in \mathbb{N}_0$ が存在し $f(A) \cong [m]$ であるから $A \cong [m]$.　**ここまでパス.** □

系 1.8.8. X を有限集合, Y を集合とする．全射 $X \to Y$ が存在すれば, Y は有限集合である.

証明.（**2019 年度はパス**）　$Y \neq \emptyset$ としてよい．$[n] \cong X$ とし, 全射 $X \to Y$ との合成 $f\colon [n] \xrightarrow{\cong} X \to Y$ を考えると f は全射である．よって 命題 1.9.15 より f は切断 $s\colon Y \to [n]$ を持つ．$s(Y) \subset [n]$ だから $s(Y)$ は有限集合．$f \circ s = \mathrm{id}_Y$ ゆえ s は単射．よって $Y \cong s(Y)$ は有限集合.　**ここまでパス.** □

補題 1.8.5 より次が分かる.

系 1.8.9. $X \cong Y$ かつ $X \cong [n]$ かつ $Y \cong [m]$ ならば $m = n$.

証明. 仮定のもと $[m] \cong [n]$ となる. とくに単射 $[m] \to [n]$, $[n] \to [m]$ が存在するので $m \leq n$ かつ $n \leq m$ ゆえ $m = n$. □

定義 1.8.10. X を有限集合とする. $X \cong [n]$ であるとき, $n \in \mathbb{N}_0$ を X の元の**個数**あるいは**濃度 (cardinality)** といい, $\sharp X$, $|X|$ 等と表す. 系 1.8.9 を $X = Y$ の場合に使えば, この n は X に対し一意に定まる.

系 1.8.11. X, Y を有限集合とする. このとき $X \cong Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$.

問 44. これを示せ.

系 1.8.12. X, Y を $|X| = |Y|$ である有限集合とし, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 次は同値.

1. f は単射.
2. f は全射.
3. f は全単射.

とくに X が有限集合であるとき, 写像 $f\colon X \to X$ に対しこれらは同値.

問 45. これを示せ. (ヒント: $X = Y = [n]$ としてよい（なぜ?）. $X = Y = [n]$ の場合は補題 1.8.5 2, 系 1.8.6 2 から分かる.)

系 1.8.13. X を有限集合, $A \subset X$ とする. このとき, $A \cong X \Leftrightarrow A = X$.
　とくに, 有限集合はその真部分集合と対等ではない.

証明. $\Leftarrow$ は明らか.
　$\Rightarrow$ を示す. $A \cong X$ とする. このとき $|A| = |X|$ である. $i\colon A \to X$ を包含写像とすると, i は単射であるから, 系 1.8.12 より i は全射. 包含写像が全射なので $A = X$. □

系 1.8.14. X を集合, Y を有限集合とする.

1. 次は同値.
   (i) X は有限集合で $|X| \leq |Y|$.
   (ii) X から Y への単射が存在する.
2. 次は同値.
   (i) X は有限集合で $|X| = |Y|$.
   (ii) X から Y への全単射が存在する.
   (iii) X から Y への単射と Y から X への単射が存在する.
3. 次は同値.

(i) X は有限集合で $|X| < |Y|$.
(ii) X から Y への単射が存在するが, X から Y への全単射は存在しない.
(iii) X から Y への単射が存在するが, Y から X への単射は存在しない.

証明. 1 は系 1.8.7, 補題 1.8.5 より明らか.
2 は 1 と系 1.8.11 より明らか. 3 は 1,2 より明らか. □

（**2019 年度はパス**）

系 1.8.15. $X \neq \emptyset$ を集合, Y を有限集合とする. このとき次は同値.

1. X から Y への単射が存在する.
2. Y から X への全射が存在する.

証明. 系 1.8.7, 系 1.8.8, 補題 1.8.5 系 1.8.6 より明らか. □

ここまでパス.

有限集合の濃度に関する基本的な性質を挙げておく.

定理 1.8.16. X, Y を有限集合とする. このとき,

1. $X \amalg Y$ も有限集合で $|X \amalg Y| = |X| + |Y|$.
2. $X \times Y$ も有限集合で $|X \times Y| = |X||Y|$.
3. Y^X も有限集合で $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.

いずれも直感的には明らかであろう. が, きちんと証明しようとすると, 自然数の和, 積, 冪乗をどのように定義するかはっきりさせる必要がある. この講義ではこの定理の証明は述べない. （[5] 等参照.）

系 1.8.17. X を有限集合とすると, $\mathcal{P}(X)$ も有限集合で $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

証明. $\mathcal{P}(X) \cong 2^X$. □

系 1.8.18. A, B を有限集合とする. このとき $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

証明.

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \setminus B) \amalg (A \cap B) \amalg (B \setminus A) \\ A &= (A \setminus B) \amalg (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \amalg (A \cap B). \end{aligned}$$

□

問 46.　1. A, B, C を有限集合とする．このとき

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

2.（包除原理） $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ を有限集合とする．このとき，

$$\left| \bigcup_{i \in [n]} A_i \right| = \sum_{\substack{I \subset [n] \\ |I| \text{ is odd}}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{\substack{\emptyset \neq I \subset [n] \\ |I| \text{ is even}}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

注意．$\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \bigcup_{i \in [n]} A_i$ と約束すれば（1.5 節の注意参照）上の式は

$$\sum_{\substack{I \subset [n] \\ |I| \text{ is even}}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{\substack{I \subset [n] \\ |I| \text{ is odd}}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

と書ける．

問 47. $X \neq \emptyset$ を順序集合, $A \subset X$ を有限部分集合とする．

1. A が有界とはならないような例があれば挙げよ．
2. X が全順序集合であるとき, $A \neq \emptyset$ ならば, $\max A$, $\min A$ が存在することを, A の元の個数に関する帰納法を用いて示せ．
3. X が全順序集合であるとき, A が有限部分集合であるならば, A は有界であることを示せ．

1.8.2　無限集合

定義 1.8.19. 集合 X が**無限集合 (infinite set)** である
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X は有限集合ではない．

例 1.8.20. $\mathbb{N}$ は無限集合である．実際, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = n + 1$ で定めれば, f は単射であるが全射ではない．よって系 1.8.12 より $\mathbb{N}$ は有限集合ではない．

定義 1.8.21. 集合 X と Y は同じ**濃度 (cardinality)** を持つ
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X と Y は対等（$X \cong Y$）である．
またこのとき $|X| = |Y|$ と書く．

注意．系 1.8.11 より, X, Y が有限集合のとき, 濃度 $|X| \in \mathbb{N}_0$ と $|Y| \in \mathbb{N}_0$ が（数として）等しいことと, $X \cong Y$ であることは同値であることに注意せよ．

ここで与えた定義では, $|X| = |Y|$ ということは $X \cong Y$ ということに他ならない. もちろん本来は, 集合 X に対し, （有限集合の場合は元の個数となるような）$|X|$ という「量」を定義して, それを濃度とよび, X と Y の濃度が等しいことと $X \cong Y$ は同値であることを示すというのが正しい態度であろう.

教科書 [7] にあるように, 対等という同値「関係」による X の「同値類」を $|X|$ と定めるというのが最も自然な考え方であるが, 一般には, 集合 X と対等な集合全体は集合とはならない.

有限集合の場合, $|X| = n$ となる集合の代表として $[n]$ を考えた. 同じようにして, 無限集合の場合も, 濃度が等しい集合の中で一つ標準的なものを構成して, （つまり対等という同値関係の完全代表系を一つ構成して, ）それを濃度と定義するのが標準的考え方である. が, 準備が多く必要となるのでこの講義ではふれない.

例 1.8.22. $|\mathbb{N}_0| = |\mathbb{N}|$. 実際, $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$ が全単射を与える.

例 1.8.23. 開区間 $(0,1) \subset \mathbb{R}$ と半開区間 $(0,1] \subset \mathbb{R}$ の濃度は等しい. 実際, 写像 $f\colon (0,1] \to (0,1)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \exists n \in \mathbb{N} : x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{その他} \end{cases}$$

により定めると f は全単射である.

例 1.8.24. 開区間 $(0,1) \subset \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ の濃度は等しい. 実際, 写像 $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$ を $f(x) = x/(1-x)$ により定めれば f は全単射.

問 48. 次の $\mathbb{R}$ の部分集合に対し, 全単射を具体的に構成して濃度が等しいことを示せ.

1. 開区間 $(0,1)$ と閉区間 $[0,1]$.
2. 開区間 $(0,1)$ と $\mathbb{R}$.

定義 1.8.25. X, Y を集合とする. X から Y への単射が存在するとき, $|X| \leq |Y|$ と書く. $|X| \leq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ であるとき（すなわち, X から Y への単射は存在するが全単射は存在しないとき）, $|X| < |Y|$ と書き, X の濃度は Y の濃度より小さいという.

注意 . 系 1.8.14 より, 有限集合に対し, この濃度の大小は数の大小と一致している.

任意の集合に対し, それより大きな濃度を持つ集合が存在する.

定理 1.8.26 (Cantor)**.** 任意の集合 X に対し, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

証明. $X = \emptyset$ のときは $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ なので明らか.

$X \neq \emptyset$ とする. singleton map $s\colon X \to \mathcal{P}(X), s(x) = \{x\}$ は単射であるから $|X| \leq$

$|\mathcal{P}(X)|$. よって, X から $\mathcal{P}(X)$ への全射は存在しないことを示せばよい. $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ を写像とする.

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$$

とおくと $A \notin \operatorname{Im} f$ である. 実際, 任意の $y \in X$ に対し, $y \in f(y)$ の場合は $y \notin A$ ゆえ $f(y) \neq A$, $y \notin f(y)$ の場合は $y \in A$ ゆえ $f(y) \neq A$. □

この証明における論法（A の構成）を**対角線論法 (diagonal argument)** という（定理 1.8.43, 1.10.26 参照）.

濃度の大小関係は「順序」である.

補題 1.8.27. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ を写像とする. このとき, 部分集合 $A \subset X$, $B \subset Y$ で, $f(A) = B$, $g(B^c) = A^c$ となるものが存在する.

証明. $S \subset X$ に対し $F(S) \subset X$ を $F(S) = g(f(S)^c)^c \subset X$ により定める. $F(A) = A$ となる集合 $A \subset X$ をみつけて $B = f(A)$ とおけばよい.

$F\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ は順序を保つ, すなわち, $S, T \subset X$ に対し,

$$S \subset T \Rightarrow F(S) \subset F(T)$$

が成り立つ. 実際

$$\begin{aligned} S \subset T &\Rightarrow f(S) \subset f(T) \\ &\Rightarrow f(S)^c \supset f(T)^c \\ &\Rightarrow g(f(S)^c) \supset g(f(T)^c) \\ &\Rightarrow g(f(S)^c)^c \subset g(f(T)^c)^c. \end{aligned}$$

X の部分集合族

$$\mathcal{A} = \{S \in \mathcal{P}(X) \mid S \subset F(S)\} \subset \mathcal{P}(X)$$

を考える.

（証明で使うわけではないが）明らかに $\emptyset \subset F(\emptyset)$ ゆえ $\emptyset \in \mathcal{A}$. とくに $\mathcal{A} \neq \emptyset$ である.

$A = \bigcup_{S \in \mathcal{A}} S$ とおく. (例 1.7.31 で見たように $A = \sup \mathcal{A}$ である.)

$F(A) = A$ を示そう.

明らかに, 任意の $S \in \mathcal{A}$ に対し $S \subset A$ であることに注意する.

1. 任意の $S \in \mathcal{A}$ に対し $S \subset F(A)$.
   実際 $S \in \mathcal{A}$ とすると, $S \subset A$ であり, F は順序を保つので $F(S) \subset F(A)$. また $S \in \mathcal{A}$ だから $S \subset F(S)$. よって $S \subset F(A)$.

2. $A \in \mathcal{A}$, すなわち $A \subset F(A)$ である.
   実際, 1 より $S \in \mathcal{A}$ なら $S \subset F(A)$ だから, $A = \bigcup_{S \in \mathcal{A}} S \subset F(A)$.
3. 任意の $S \in \mathcal{A}$ に対し $F(S) \in \mathcal{A}$.
   実際, $S \in \mathcal{A}$ とすると $S \subset F(S)$ であり, F は順序を保つので $F(S) \subset F(F(S))$.
4. $F(A) \subset A$.
   実際, 2 より $A \in \mathcal{A}$ ゆえ, 3 より $F(A) \in \mathcal{A}$. よって $F(A) \subset A$.

2, 4 より, $F(A) = A$. □

問 49 (Tarski's fixed point theorem)**.** P を順序集合, $f\colon P \to P$ を順序を保つ写像とする.

$$A = \{a \in P \mid a \leq f(a)\}$$

が上限を持つとし, $\alpha = \sup A$ とおく. $\alpha = \max A$ であること及び, $f(\alpha) = \alpha$ であることを以下の順に示せ.

1. $f(\alpha)$ は A の上界である, すなわち $\forall a \in A : a \leq f(\alpha)$.
2. $\alpha \in A$, すなわち $\alpha \leq f(\alpha)$. とくに $\alpha = \max A$.
3. $\forall a \in A : f(a) \in A$.
4. $f(\alpha) \leq \alpha$.
5. $f(\alpha) = \alpha$.

問 50. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ を写像とする.

$$\mathcal{A} = \{S \subset X \mid S \supset F(S)\}$$

とおく. 次を示せ.

1. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ である.
2. $A = \bigcap_{S \in \mathcal{A}} S$ とおくと $F(A) = A$ である.

具体的な写像に対してこの補題 1.8.27 の証明にある方法で $F(A) = A$ となる A を求めることは一般には難しい（と思う）. f または g が単射の場合, 次のようにすると求められることもある. なお, （$X = Y$, f, g として恒等写像を考えれば分かるように）このような A は一意的に定まるわけではない. 補題 1.8.27 で定めたものは, このような部分集合のうち最大のもの, 上の exe. で定めたものは最小のものである.

問 51. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ を写像とする. また $F\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ を $F(S) = g(f(S)^c)^c$ により定め, $i \in \mathbb{N}_0$ に対し $F^i(S)$ を帰納的に, $F^0(S) = S$,

$F^{i+1}(S) = F(F^i(S))$ により定める．$\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合の族とする．ただし $\Lambda \neq \emptyset$ とする．

1. g が単射であるとする．このとき次を示せ．
   (i) $F\left(\bigcup_\lambda S_\lambda\right) = \bigcup_\lambda F\left(S_\lambda\right)$
   (ii) $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} F^i(\emptyset)$ とおけば $F(A) = A$.
2. f が単射であるとする．このとき次を示せ．
   (i) $F(\bigcap_\lambda S_\lambda) = \bigcap_\lambda F(S_\lambda)$.
   (ii) $A = \bigcap_{i=0}^{\infty} F^i(X)$ とおけば $F(A) = A$.

注意*!* ．何度か注意しているが, 念の為. $\bigcup_{i=0}^{\infty} F^i(\emptyset)$ というのは $\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} F^i(\emptyset)$ のことである．$F^\infty(\emptyset)$ という集合を考えるわけではない.

系 1.8.28 (ベルンシュタイン, Bernstein)**.** X, Y を集合とする．このとき次は同値.

1. $X \cong Y$.
2. X から Y への単射と, Y から X への単射が存在する.

証明. 2⇒1 を示せばよい．$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ を単射とする．補題 1.8.27 より, $A \subset X$, $B \subset Y$ で $f(A) = B$, $g(B^c) = A^c$ となるものがある．f, g は単射であるから

$$f|_A\colon A \xrightarrow{\cong} B, \quad g|_{B^c}\colon B^c \xrightarrow{\cong} A^c$$

である．$h\colon X \to Y$ を

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ (g|_{B^c})^{-1}(x), & x \notin A \end{cases}$$

により定めれば h は全単射. □

系 1.8.29. 濃度の大小関係は次をみたす．X, Y, Z を集合とする.

1. $|X| \leq |X|$.
2. $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| = |Y|$.
3. $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z|$ ならば $|X| \leq |Z|$.

証明. 1 は明らか．2 は Bernstein の定理．3 は単射の合成は単射であることから明らか. □

系 1.8.30. X, Y を集合とする．次は同値

1. $|X| < |Y|$.
2. X から Y への単射が存在するが, X から Y への全単射は存在しない.

3. X から Y への単射が存在するが, Y から X への単射は存在しない.

$\square$

系 1.8.31. X, Y, Z を集合とする.
$|X| < |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z|$ ならば $|X| < |Z|$.
とくに $|X| < |Y|$ かつ $Y \subset Z$ ならば $|X| < |Z|$.

問 52. これを示せ.

系 1.8.32. X, Y, Z を集合とする.
$|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z|$ かつ $|X| = |Z|$ ならば $|X| = |Y| = |Z|$. $\square$

系 1.8.33. X を集合, $A \subset X$ とし, $A \cong X$ であるとする. このとき, $A \subset B \subset X$ ならば $B \cong X$.

証明. 包含写像は単射. $\square$

例 1.8.34. 問 48 で見たように $(0,1) \cong \mathbb{R}$ である. $(0,1) \subset (0,1] \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$ だからこれらの濃度は全て等しい.

より一般に, ある $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ が存在して $(a,b) \subset A \subset \mathbb{R}$ であれば $A \cong \mathbb{R}$ である. (が, 逆は正しくない. つまり, $A \cong \mathbb{R}$ であるような $A \subset \mathbb{R}$ で, A は開区間を含まないようなものが存在する. 時間の都合でふれないと思うが有名なものとして**カントール集合 (Cantor set)** がある.)

問 51 を用いて全単射 $(0,1) \to (0,1]$ を作ってみよう. $f\colon (0,1) \to (0,1]$ を包含写像とし, $g\colon (0,1] \to (0,1)$ を $g(x) = x/2$ で定めると, いずれも単射.

$$\begin{aligned}
f(\emptyset)^c &= (0,1] & & \\
g(f(\emptyset)^c) &= (0,1/2] & F(\emptyset) &= (1/2,1) \\
f(F(\emptyset))^c &= (0,1/2] \cup \{1\} & & \\
g(f(F(\emptyset))^c) &= (0,1/4] \cup \{1/2\} & F^2(\emptyset) &= (1/4,1/2) \cup (1/2,1) \\
f(F^2(\emptyset))^c &= (0,1/4] \cup \{1/2\} \cup \{1\} & & \\
g(f(F^c(\emptyset))^c) &= (0,1/8] \cup \{1/4\} \cup \{1/2\} & F^3(\emptyset) &= (1/8,1/4) \cup (1/4,1/2) \cup (1/2,1) \\
&\cdots & &
\end{aligned}$$

となり全単射の組

$$(0,1) \supset A = \bigcup_{i=0}^{\infty} (1/2^{i+1}, 1/2^i) \xrightarrow[\cong]{f=\mathrm{id}} \bigcup_{i=0}^{\infty} (1/2^{i+1}, 1/2^i) = B \subset (0,1]$$

$$(0,1) \supset A^c = \left\{1/2^i \mid i \geq 1\right\} \xrightarrow[\cong]{g^{-1}=2\times} \left\{1/2^i \mid i \geq 0\right\} = B^c \subset (0,1]$$

を得る． $h\colon (0,1) \to (0,1]$ を

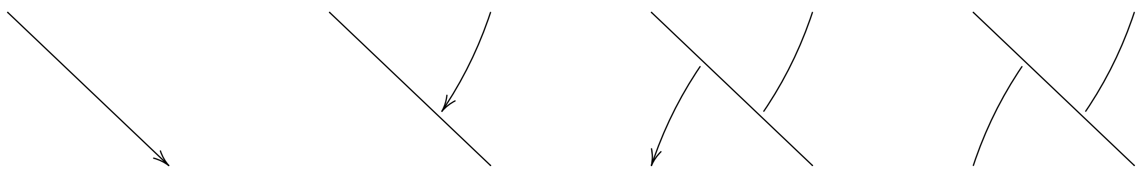
$$h(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ 2x, & x \notin A \end{cases}$$

で定めれば h は全単射.

$g\colon (0,1] \to (0,1)$ として $g(x) = x/(x+1)$ を使って同じ構成をすれば例 1.8.23 の全単射（の逆写像）が得られる.

1.8.3 可算集合, 連続体の濃度

定義 1.8.35. $\mathbb{N}$ と濃度が等しい集合を**可算集合 (countable set)** という． X が可算集合であるとき, X の濃度は**可算無限濃度**であるといい, $|X| = \aleph_0$（アレフゼロ）と表す.



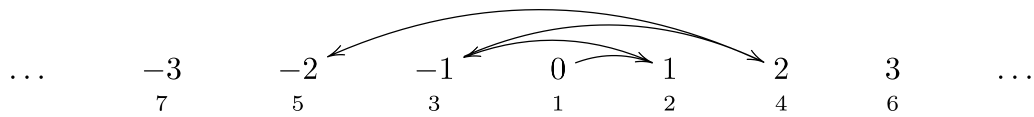
X が可算集合であるとは, 直観的に言えば X の元全てに, 重なることなく順に番号を $1, 2, 3, \ldots$ と付けることができる（X から $\mathbb{N}$ への全単射がある）, あるいは X の元を順に並べることができる ($\mathbb{N}$ から X への全単射がある) ということである.

定義 1.8.36. 集合 X が可算集合であるか有限集合であるとき, **高々可算 (at most countable)** であるという.

注意．高々可算である集合を可算集合ということもある．このときは（有限でない）可算集合を可算無限集合 (countably infinite set) とよぶ.

例 1.8.37. 正の偶数全体 $\mathbb{N}_{even} = \left\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は偶数}\right\}$, 正の奇数全体 $\mathbb{N}_{odd} = \left\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ は奇数}\right\}$ はいずれも可算集合である． 実際, $\mathbb{N}_{even} = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $\mathbb{N}_{odd} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ と並べればよい．具体的に式で書けば $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{even}, f(n) = 2n$, $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{odd}, g(n) = 2n - 1$ はいずれも全単射.

例 1.8.38. 整数全体 $\mathbb{Z}$ は可算集合である．実際, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ と並べる, あるいは $\mathbb{Z}$ の元に



と番号を付ければよい．具体的に式で書くと, $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を

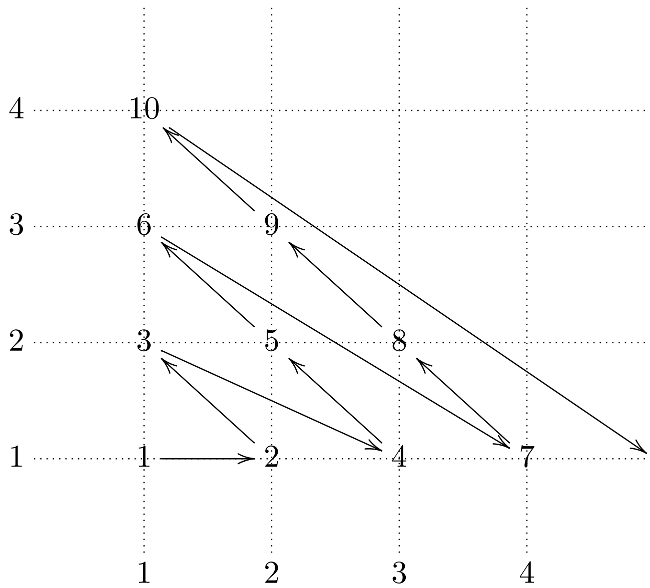
$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2} & n \text{ が奇数}, \\ \frac{n}{2}, & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

と定めれば f は全単射であり, $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ を

$$g(l) = \begin{cases} -2l + 1, & l \leq 0, \\ 2l, & l > 0 \end{cases}$$

で定めると g が f の逆写像.

例 1.8.39. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合である．すなわち $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$. 実際, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の元に図のように番号をつければよい.



問 53. 例 1.8.38 の図の対応を与える写像 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を式で書け.

問 54. $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(l, m) = 2^{l-1}(2m-1)$ で定めると f は全単射であることを示せ.

例 1.8.40. 有理数全体 $\mathbb{Q}$ は可算集合である.

実際, $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ を $r \in \mathbb{Q}$ が既約分数で p/q, $q \in \mathbb{N}$ と表されるときに $f(r) = (p, q)$ と定める（ただし $f(0) = (0, 1)$ とする）と f は単射である. （$\rho\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ を $\rho(l, m) = l/m$ で定めれば $\rho\circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.）よって $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z}\times\mathbb{N}|$. $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ なので $\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \cong \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ であり, 上で見たように $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ だから $|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$. すなわち $|\mathbb{Q}| \leq \aleph_0$.

また $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ だから $\aleph_0 \leq |\mathbb{Q}|$. よって $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

具体的に有理数を順に並べるには, 例えば $r \in \mathbb{Q}$ を既約分数で p/q と表したとき $|p| + |q|$ が小さいものから順に, $|p| + |q|$ が同じものについては分母が大きいものから順に, 正負交互に並べればよい. 見やすさのため正の有理数だけならべると

$$\left\{ \underbrace{\frac{1}{1}}_{p+q=2}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}}_{p+q=3}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{3}{1}}_{p+q=4}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}}_{p+q=5}, \dots \right\}$$

といった具合.

可算無限濃度は濃度の大小に関して極小である, すなわち可算無限より小さな無限濃度はない. （後で述べる選択公理を仮定すれば最小であることが示せる.）

定理 1.8.41. 可算集合の部分集合は高々可算集合である.

証明. $\mathbb{N}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ は高々可算であることを示せばよいが, 例えば A の元を小さい方から順にならべればよい.

もう少し厳密には, 次のようにするとよい. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ とする. $a \in A$ に対し $A_a \subset A$ を $A_a = \{l \in A \mid l \leq a\}$ と定めると, $a \in A_a \subset [a + 1]$ だから A_a は空でない有限集合である. 写像 $c\colon A \to \mathbb{N}$ を $c(a) = |A_a|$ で定める.

$a, b \in A$, $a < b$ ならば $A_a \subsetneq A_a \cup \{b\} \subset A_b$ だから $c(a) < c(b)$ となる. よって c は順序を保つ単射である.

c は順序を保つので $c(A_a) \subset \{1, \dots, c(a)\}$ である. 実際, $l \in A_a$ とすると, $l \leq a$ なので $c(l) \leq c(a)$. よって $c(l) \in \{1, \dots, c(a)\}$. $|A_a| = c(a) = |\{1, \cdots, c(a)\}|$ であり, $c\colon A_a \to \{1, \dots, c(a)\}$ は単射だから系 1.8.12 より $c(A_a) = \{1, \dots, c(a)\}$. とくに, $m \in \mathbb{N}$ について, ある $a \in A$ が存在して $m \leq c(a)$ となるならば, $m \in c(A)$ である.

c が全射でないとする. $m \notin c(A)$ を一つとる. このとき $c(A) \subset [m]$ であり, A は有限集合. （$(\exists a \in A : c(a) \geq m) \Rightarrow m \in c(A)$.）

c が全射ならば $c\colon A \to \mathbb{N}$ は全単射ゆえ A は可算集合. □

問 55. 上で定めた $c\colon A \to \mathbb{N}$ が単射であることを確かめよ.

定理 1.8.42. X を可算集合, Y を高々可算な集合とする. このとき

1. $X \cup Y$ は可算集合.
2. $Y \neq \emptyset$ ならば $X \times Y$ は可算集合.

証明.
1. $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$, $X \cap (Y \setminus X) = \emptyset$ であり, 系 1.8.7, 定理 1.8.41 より $Y \setminus X$ は高々可算. よって, $X \cap Y = \emptyset$ の場合を考えればよい. Y が有限集合の場合はやさしい. Y が可算の場合を考える. $f \colon \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} X$, $g \colon \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} Y$ を全単射とする. $h \colon \mathbb{N} \to X \cup Y$ を
$$h(n) = \begin{cases} f(\frac{n+1}{2}), & n \text{ が奇数}, \\ g(\frac{n}{2}), & n \text{ が偶数} \end{cases}$$
と定めれば h は全単射.
2. Y が有限集合の場合はやさしい. Y が可算集合の場合 $X \times Y \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.

□

問 56. X を可算集合, Y を有限集合とする.

1. $X \cap Y = \emptyset$ とする. $X \cup Y$ は可算集合であることを示せ.
2. $Y \neq \emptyset$ ならば $X \times Y$ は可算集合であることを示せ.

定理 1.8.43 (Cantor)**.** 実数全体 $\mathbb{R}$ は可算集合ではない.

証明. 1 より小さい非負の実数で, 少数で表したとき各桁に 0 か 1 しかあらわれないもの全体を B とする.

$$\begin{aligned} B &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = 0.a_1a_2\dots \ (\text{ただし } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \{0,1\}) \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} \ (\text{ただし } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \{0,1\}) \right\}. \end{aligned}$$

$\aleph_0 < |B|$ を示せばよい.

写像 $i \colon \mathbb{N} \to B$ を $i(n) = 10^{-n}$ で定めると明らかに i は単射ゆえ $\aleph_0 \leq |B|$.

$\mathbb{N}$ から B への全射が存在しないことを示せばよい. $f \colon \mathbb{N} \to B$ を写像とし, $f(1), f(2), \dots$ を順に並べる.

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ f(2) &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ f(3) &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$ に対し $b_n \in \{0,1\}$ を

$$b_n = \begin{cases} 0, & a_{nn} = 1, \\ 1, & a_{nn} = 0 \end{cases}$$

により定め,

$$b = 0.b_1 b_2 b_3 \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n} \in B$$

を考える. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_{nn} \neq b_n$ だから $f(n) \neq b$. よって f は全射ではない. □

注意 . この証明が元々の対角線論法である.

$j\colon 2^{\mathbb{N}} \to B \subset \mathbb{R}$ を $j(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)10^{-n}$ で定めれば明らかに j は全単射であるから

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |2^{\mathbb{N}}| = |B| \leq |\mathbb{R}|$$

であり, ここでの証明は $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ あるいは $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$ を示しているとみなせるが, よく見ると分かるように, ここでの議論は定理 1.8.26 で $X = \mathbb{N}$ としたもの, あるいは定理 1.10.26 で $X = \mathbb{N}$, $Y = [2]$, $\tau = \neg\colon [2] \to [2]$ としたものに他ならない.

問 57. 上の $j\colon 2^{\mathbb{N}} \to B$ が単射であることを確かめよ.

定義 1.8.44. 集合 X と実数全体 $\mathbb{R}$ の濃度が等しいとき, X の濃度は**連続体の濃度 (cardinality of continuum)** であるといい, $|X| = \aleph$ と表す.

上で注意したように $|2^{\mathbb{N}}| \leq \aleph$ であるが, 実はこれらは等しい.

定理 1.8.45. $\aleph = |2^{\mathbb{N}}|$.

証明. $\aleph \leq |2^{\mathbb{N}}|$ を示せばよい. 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ を $f(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq x\}$ で定める. $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ とすると $x < r < y$ となる $r \in \mathbb{Q}$ が存在するので $r \in f(y) \setminus f(x)$ となり $f(x) \neq f(y)$. よって f は単射. (ここでは $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ における稠密性を用いた. $\mathbb{R}$ を Dedekind の切断として構成するという立場からは f は包含写像に他ならない.) $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ であったから $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cong 2^{\mathbb{Q}} \cong 2^{\mathbb{N}}$. □

系 1.8.46. $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \aleph$.

証明. 単射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を構成するのはやさしい.

$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$ を示せばよいが, 定理 1.8.45 で見たように $\mathbb{R} \cong 2^{\mathbb{N}}$ であり, また $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ だから定理 1.4.35 より,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}.$$

□

問 58. 単射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ をつくれ.

例 1.8.47. $p\colon (0,1] \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ を $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ で定めると p は全単射である. $(0,1] \cong I = [0,1] \cong \mathbb{R}$ であるから

$$S^1 \cong I \cong \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong I \times I \cong S^1 \times I \cong S^1 \times S^1$$

はいずれも連続体の濃度を持つ.

1.9 選択公理

系 1.8.15 で見たように, X, Y が空でない有限集合であるとき, X から Y への単射が存在することと Y から X への全射が存在することは同値であった. 有限とは限らない場合を考えてみよう.

講義では時間の都合で扱わなかったが 定理 1.10.13 から f が単射であることとレトラクションを持つことは同値であることが分かる. 直接示しておこう.

命題 1.9.1. X, Y を空でない集合とし, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 次は同値である.

1. f は単射.
2. f はレトラクションを持つ.

証明. 1⇒2 を示せばよい.

f は単射なので, 逆写像 $f^{-1}\colon f(X) \to X$ がある. $x_0 \in X$ を一つとる.

$$r(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & y \in f(X), \\ x_0 & y \notin f(X) \end{cases}$$

とすればよい. □

とくに次が成り立つ.

系 1.9.2. X, Y を空でない集合とする. X から Y への単射が存在すれば, Y から X への全射が存在する.

一方, f が全射ならば切断を持つか? を考えてみる. 系 1.8.8 や系 1.8.6 の証明のように, $f\colon X \to Y$ が全射であるから, 各 $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在するので, そのような x を一つ選び $s(y) = x$ とすればよい, ように思うが, これがなかなか難しい. このようなことができることを保証するのが選択公理である.

公理 1.9.3 (選択公理, Axiom of Choice)**.** 次の条件は同値である.

これら同値な条件を**選択公理 (Axiom of Choice)** という. また, 3 の条件をみたす写像 φ を**選択関数 (choice function)** という.

1. 任意の全射は切断を持つ.
2. 空でない集合の直積は空ではない.
   すなわち, $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $X_\lambda \neq \emptyset$ であるような集合族であれば, $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.

3. 空でない集合からなる集合族は選択関数を持つ.
   すなわち, $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $X_\lambda \neq \emptyset$ であるような集合族であれば, 写像 $\varphi\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $\varphi(\lambda) \in X_\lambda$ となるようなものが存在する.

命題 1.9.4. X, Y を空でない集合とする. 選択公理のもと, X から Y への単射が存在することと, Y から X への全射が存在することは同値.

証明. レトラクションは全射であり, 切断は単射である. □

集合論の公理について何も述べていないのに選択公理だけわざわざ一節をさいて紹介するのは, 歴史的理由もあるのであるが, この公理がないと証明出来ない基本的なことがたくさんあるということと, その一方, この公理を認めると直観に反する（ように感じる）ことが証明できてしまう（有名なのはバナッハ・タルスキの逆理）ということにある（のだと思う）.

選択公理と同値な条件がいろいろと知られている.

1.9.1 Zorn の補題

定義 1.9.5. X を順序集合とする.

1. A が（X の）**鎖**(さ) **(chain)** である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A は X の全順序部分集合である.（X の部分集合であり, 全順序部分集合になっている.）
2. X の任意の鎖が上に有界であるとき, X を**帰納的順序集合 (inductively ordered set)** という

例 1.9.6.
1. $\mathbb{Q}$ に数の大小関係で順序をいれる. 明らかに $\mathbb{Q}$ は帰納的順序集合ではない.
   $\mathbb{Q}_{\leq 0} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq 0\}$ とおくと, 明らかに $\mathbb{Q}_{\leq 0}$ は帰納的順序集合である.
2. $\mathcal{P}(X)$ は帰納的順序集合である.

問 59. 上の例の主張を確かめよ.

選択公理を仮定すると（ZF のもと）次が成り立つことが知られている. この講義では証明は省略する.

定理 1.9.7 (Zorn の補題, Zorn's lemma)**.** 帰納的順序集合は少なくとも一つの極大元を持つ.

Zorn の補題を使う際, 次のことに注意しておくとよい.

補題 1.9.8. X を空でない順序集合とする. このとき次は同値である.

1. X は帰納的順序集合である.
2. X の任意の空でない全順序部分集合は上界を持つ.

証明. 1⇒2 は明らか. 逆を示すには $\emptyset \subset X$ が上に有界であることを示せばよい ($\emptyset$ は全順序部分集合である.) が例 1.7.19 で見たように, $X \neq \emptyset$ であれば $\emptyset \subset X$ は有界である. □

逆に Zorn の補題を仮定すると, 選択公理を示すことができる. Zorn の補題の使い方のよい例であるので証明してみよう.

定理 1.9.9. Zorn の補題を仮定する. このとき, 任意の全射 $f\colon X \to Y$ は切断を持つ.

証明. $f\colon X \to Y$ を写像とする.

$$\mathcal{S} = \{(B, g) \mid B \subset Y,\ g\colon B \to X,\ f \circ g = i_B\}$$

とおく. ただし $i_B\colon B \to Y$ は包含写像.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[ur, "g"] \arrow[r, hook, "i_B"'] & Y \end{tikzcd}$$

1. $(B, g), (B', g') \in \mathcal{S}$ に対して
$$(B, g) \leq (B', g') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset B' \text{ かつ } g'|_B = g$$
と定めると, 明らかに $\leq$ は $\mathcal{S}$ に順序を定める.
2. この順序に関して $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である. 実際, $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ を全順序部分集合とする.
$$T = \bigcup_{(B,g)\in\mathcal{T}} B \subset Y$$
とおく.
写像 $t\colon T \to X$ を以下のように定める. $y \in T$ とすると, ある $(B, g) \in \mathcal{T}$ が存在し, $y \in B$ である. このとき, $t(y) = g(y)$ と定める. t は well-defined である. 実際, 別の $(B', g') \in \mathcal{T}$ に対し $y \in B'$ であるとすると, $\mathcal{T}$ は全順序集合なので $(B, g) \leq (B', g')$ または $(B', g') \leq (B, g)$ のいずれかが成り立つ. $(B, g) \leq (B', g')$ としてよい. このとき $y \in B \subset B'$ であり, $g'|B = g$ なので $g'(y) = g(y)$.

作り方から任意の $y \in T$ に対し $f \circ t(y) = y$ なので $f \circ t = i_T$. よって $(T, t) \in \mathcal{S}$ である.（$\mathcal{T} = \emptyset$ の場合を別に議論する必要は論理的には無いが気になる人のために注意しておくと, $\mathcal{T} = \emptyset$ の場合, $T = \emptyset$, $t \colon \emptyset \to X$ は一意に存在する写像となり $(T, t) \in \mathcal{S}$ である.）

また任意の $(B, g) \in \mathcal{T}$ に対し $B \subset T$ かつ $t|B = g$ であるから (T, t) は $\mathcal{T}$ の上界である.（$\mathcal{T}$ の上限であることもすぐ分かる.）

3. Zorn の補題より, $\mathcal{S}$ には極大元が存在する. $(Y', s) \in \mathcal{S}$ を極大元とする. f が全射であれば $Y' = Y$ である. 実際, $Y' \neq Y$ であるとすると, $Y \setminus Y' \neq \emptyset$ である. $y_0 \in Y \setminus Y'$ を一つとると f が全射なので $f(x) = y_0$ となる $x \in X$ が存在する. $\tilde{s} \colon Y' \cup \{y_0\} \to X$ を
$$\tilde{s}(y) = \begin{cases} s(y), & y \in Y' \\ x, & y = y_0 \end{cases}$$
とおけば $(Y', s) < (Y' \cup \{y_0\}, \tilde{s}) \in \mathcal{S}$ となり極大性に反する.

□

注意．帰納的順序集合を「任意の全順序部分集合が上限を持つ順序集合」と定義する流儀もある. 区別するため, この定義をみたすものを「きのうてき順序集合」と書くことにする.

明らかに「きのうてき順序集合」は帰納的順序集合であるが, 逆は成り立たない. 例えば例 1.9.6 の $\mathbb{Q}_{\leq 0}$ は「きのうてき」ではない. しかし, Zorn の補題はどちらの定義を用いても成り立ち, 以下は同値である.

1. 選択公理.
2. 帰納的順序集合は少なくとも一つの極大元を持つ.
3. 「きのうてき順序集合」は少なくとも一つの極大元を持つ.

実際, 2⇒3 は「きのうてき」ならば帰納的であることから明らかであり, 定理 1.9.9 の証明は, $\mathcal{S}$ が途中注意したことから「きのうてき順序集合」となっているので, 3⇒1 の証明になっている.

Zorn の補題の典型的使用例.

定理 1.9.10. 選択公理を仮定する.

R を（乗法に関する単位元を持つ）可換環とする. 任意のイデアル $I \subsetneq R$ に対し, I を含む極大イデアルが存在する.

とくに $R \neq \{0\}$ の場合, R には極大イデアルが存在する.

注意．代数で学んだと思うが, R の部分集合 I がイデアルであるとは I が R の R 部分加群であるということ, つまり

1. $x, y \in I \Rightarrow x+y \in I$
2. $a \in R,\ x \in I \Rightarrow ax \in I$

をみたすということ．また $\mathfrak{m}$ が極大イデアルであるとは, 包含関係に関して極大であるような真部分イデアルであるということ, つまり

1. $\mathfrak{m} \subsetneq R$
2. $\mathfrak{m} \subsetneq I \subsetneq R$ となるようなイデアル I は存在しない

ということ.

証明. $I \subsetneq R$ をイデアルとする. I を含む真部分イデアル全体

$$\mathcal{S} = \left\{ J \;\middle|\; I \subset J \subsetneq R,\ J \text{ はイデアル} \right\}$$

に包含関係で順序をいれる. $\mathcal{S}$ が帰納的順序集合であることを示そう.

明らかに $I \in \mathcal{S}$ だから $\mathcal{S} \neq \emptyset$ である. よって, $\emptyset \neq \mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ を全順序部分集合とするとき $\mathcal{T}$ が上界を持つことを示せばよい.

$$K = \bigcup_{J \in \mathcal{T}} J$$

とおく. $K \in \mathcal{S}$ を示す.

- $\mathcal{T} \neq \emptyset$ だから $I \subset K$ である.
- $x, y \in K$ とする. ある $J, J' \in \mathcal{T}$ が存在し, $x \in J$, $y \in J'$ である. $\mathcal{T}$ は全順序集合なので $J \subset J'$ か $J' \subset J$ のいずれかが成り立つ. $J' \subset J$ としてよい. このとき $x, y \in J$ であり, J はイデアルなので $x + y \in J \subset K$. $a \in R, x \in K$ とする. ある $J \in \mathcal{T}$ が存在し $x \in J$ である. J はイデアルであるから $ax \in J \subset K$. よって K はイデアルである.
- 任意の $J \in \mathcal{T}$ に対し, $J \subsetneq R$ であるから $1 \notin J$ である. よって $1 \notin K$ となり $K \subsetneq R$.

以上から $K \in \mathcal{S}$ であり, 明らかに K は $\mathcal{T}$ の上界, ゆえ $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である.

Zorn の補題より $\mathcal{S}$ には極大元 $\mathfrak{m}$ が存在するが, これが求めるものである. □

証明はしないが, 同様な議論で次が示せる.

定理 1.9.11. 選択公理を仮定する.

k を体とする．k 上のベクトル空間は基底を持つ．

問題集．66

1.9.2　整列可能定理

例 1.7.4 で見たように，任意の集合に自明な順序をいれることができるが，選択公理を仮定すると整列順序をいれることができることが分かる．

定義 1.9.12. 順序集合 $(X, \leq)$ の任意の空でない部分集合が最小元を持つとき，この順序 $\leq$ を**整列順序 (well-order)** といい，$(X, \leq)$ を**整列集合 (well-ordered set)** という．

命題 1.9.13. 整列順序は全順序である．

証明．$(X, \leq)$ を整列集合とする．$x, y \in X$ とすると $\min\{x, y\}$ が存在する．$\min\{x, y\} = x$ のときは $x \leq y$, $\min\{x, y\} = y$ のときは $y \leq x$ である． □

選択公理を仮定すると（ZF のもと）次が成り立つことが知られている．この講義では証明は省略する．

定理 1.9.14. 整列可能定理 (wellordering theorem)　任意の集合は，うまく順序を定義してやることで整列集合（定義 1.9.12）にすることができる．

整列集合では数学的帰納法と同様な議論（**超限帰納法 (transfinite induction)** と呼ばれる）が使えるため，選択公理を利用する場面でよく使われる．
実はこれも（ZF のもと）選択公理と同値であることが示せる．

命題 1.9.15. 整列集合からの全射は切断を持つ．すなわち，X が整列集合，$f\colon X \to Y$ が全射であれば，写像 $s\colon Y \to X$ で $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ となるものが存在する．

証明．$Y \neq \emptyset$ の場合を考えればよい．写像 $s\colon Y \to X$ を $s(y) = \min f^{-1}(y)$ で定める．（f が全射なので任意の $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ であり，X が整列集合だから $\min f^{-1}(y)$ が存在する．）$s(y) \in f^{-1}(y)$ なので $f \circ s = \mathrm{id}_Y$． □

定理 1.9.16. 整列可能定理を仮定すれば選択公理が成り立つ．

証明．$f\colon X \to Y$ を全射とする．仮定より X に整列順序をいれることができるので，命題 1.9.15 より，f は切断を持つ． □

1.9.3　選択公理と濃度

無限集合を扱う際には, 選択公理を仮定しないと成り立たないことがたくさんある.

この節では選択公理を仮定する.

集合 X から Y への単射が存在するとき $|X| \leq |Y|$ と書くのであった（定義 1.8.25）. 命題 1.9.4 からただちに次を得る.

定理 1.9.17. X, Y を空でない集合とする. 次は同値.

1. $|X| \leq |Y|$.
2. X から Y への単射が存在する.
3. Y から X への全射が存在する.

定理 1.9.18. 高々可算な集合の可算和は高々可算集合である. すなわち, X_i $(i \in \mathbb{N})$ が高々可算な集合であれば $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ も高々可算な集合である.

とくに可算集合の可算和は可算集合である.

証明. $X_i \neq \emptyset$ としてよい. $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ とおく.

各 X_i は高々可算なので $\mathbb{N}$ から X_i への全射が存在する. 各 X_i に対し全射 $f_i\colon \mathbb{N} \to X_i$ を一つ選ぶ（ここで選択公理を使う）. 写像 $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ を $f(i, n) = f_i(n)$ により定めると明らかに f は全射である. よって定理 1.9.17 より $|X| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$. （実はこの部分は選択公理なしでも示せる.）したがって定理 1.8.41 より X は高々可算.

明らかに $X_1 \subset X$ なので X_1 が可算集合であれば $\aleph_0 = |X_1| \leq |X|$ である. したがって $|X| = \aleph_0$. □

問 60. X を可算集合, Y を集合とする. 全射 $f\colon X \to Y$ は切断を持つことを選択公理を使わず示せ. （Hint: 定理 1.10.34 で見たように $\mathbb{N}$ は整列集合である. 定理 1.9.16 の証明を真似よ.）

上でも使ったが, 可算無限濃度は極小, すなわち可算無限より小さな無限濃度は存在しないのであった（定理 1.8.41）. 選択公理を仮定すると可算無限濃度は最小の無限濃度であることが示せる. （この事は定理 1.9.20（濃度の比較可能定理）から分かるが, この定理 1.9.19 の証明には少し弱い選択公理（可算選択公理）があればよい. ）

定理 1.9.19. 任意の無限集合は可算部分集合を含む. すなわち X が無限集合ならば $\aleph_0 \leq |X|$.

証明. 素朴には, 次のようにすればよい. X から順に異なる元を $x_1, x_2, \ldots$ と取り出

していき, x_n まで取り出したとする．X が無限集合だから $X - \{x_1, \dots, x_n\} \neq \emptyset$ ゆえ $x_{n+1} \in X - \{x_1, \dots, x_n\}$ を取り出せる．このようにして可算無限部分集合 $\{x_1, \dots\} \subset X$ が得られる．

この論法は選択公理と数学的帰納法による写像の定義により正当化される [8, 定理 3.13] のであるが, 数学的帰納法による写像の定義についてきちんと述べておかないと, なぜ単に数学的帰納法を使うだけではだめで, 選択公理を使わないといけないのかがよくわからないのではないかと思う．

本質的には同じであるがちょっと見た目の違う形にしてみよう．X の有限部分集合全体

$$\mathcal{P}_f(X) = \left\{ A \subset X \;\middle|\; A \text{ は有限集合} \right\}$$

と写像

$$c \colon \mathcal{P}_f(X) \to \mathbb{N}_0, \quad c(A) = |A|$$

を考える．X は無限集合なので c は全射である．（つまり任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対し, X は n 個の相異なる元を含む．きちんと示すには数学的帰納法を使う．上の「素朴には」の前半部分に相当する．）

$N = \operatorname{Im} c \subset \mathbb{N}_0$ とおく．
$\emptyset \in \mathcal{P}_f(X)$ だから $0 = c(\emptyset) \in N$.
$n \in N$ とすると, ある $A \in \mathcal{P}_f(X)$ が存在し $|A| = n$ となる．X は無限集合だから $A \subsetneq X$．$x \in X \setminus A$ を一つとると, $A \cup \{x\} \in \mathcal{P}_f(X)$ であり, $c(A \cup \{x\}) = n + 1$ ゆえ $n + 1 \in N$.

よって数学的帰納法より $N = \mathbb{N}_0$．すなわち c は全射.

選択公理により c は切断を持つ．切断 $s \colon \mathbb{N}_0 \to \mathcal{P}_f(X)$ を一つとる．$A_n = s(n)$ とおくと, $A_n \subset X$ であり, $c(A_n) = n$ すなわち $|A_n| = n$ である．（つまり各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, X から相異なる n 個の元を選んだということ.）$A = \bigcup_n A_n \subset X$ とおけば, 定理 1.9.18 より A は高々可算集合である．また任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $|A| \geq |A_n| = n$ であるから A は有限集合ではない．よって定理 1.8.41 より A は可算集合である．□

注意．上の証明では定理 1.9.18 を使ったが, 少し工夫をすると使わないでも示せる．

系 1.8.29 で濃度の大小関係は順序の公理をみたすことをみた．選択公理を仮定すると, “全順序” であることが示せる．

定理 1.9.20 (濃度の比較可能定理, Comparability theorem for cardinalities)**.** X, Y を集合とすると $|X| \leq |Y|$ か $|Y| \leq |X|$ のいずれかが成り立つ．

証明.

$$\mathcal{S} = \left\{ (X', Y', f') \;\middle|\; X' \subset X,\ Y' \subset Y,\ f' \colon X' \to Y' \text{は全単射} \right\}$$

とおくと, 定理 1.9.9 の証明と同様に示せる．詳細は練習問題としよう．□

問 61. 1. $\mathcal{S}$ における順序関係 $\le$ を, $(X', Y', f'), (X'', Y'', f'') \in \mathcal{S}$ に対し, $(X', Y', f') \le (X'', Y'', f'') \Leftrightarrow X' \subset X''$, $Y' \subset Y''$, $f''|X' = f'$ と定める. (これが順序関係であることは認めてよい.) このとき, $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合であることを示せ.

2. $\mathcal{S}$ の極大元を (X_0, Y_0, f_0) とする. このとき $X_0 = X$ または $Y_0 = Y$ であることを示せ.

3. $|X| \le |Y|$ か $|Y| \le |X|$ のいずれかが成り立つことを示せ.

1.10　補足

1.10.1　値写像

定義 1.10.1. X, Y を集合, $X, Y \neq \emptyset$ とする．$\mathrm{ev}(f, x) = f(x)$ で定まる写像

$$\mathrm{ev}\colon Y^X \times X \to Y$$

を**値写像 (evaluation map)** という．（X か Y が $\emptyset$ のときは必要なら $\mathrm{ev}\colon Y^X \times X = \emptyset \to Y$ を一意に存在する写像 $\emptyset \to Y$ と定める.）

　また $x_0 \in X$ に対し, $\mathrm{ev}_{x_0}(f) = f(x_0)$ で定まる写像

$$\mathrm{ev}_{x_0}\colon Y^X \to Y$$

を**点 $x_0 \in X$ における値写像 (evaluation map)** という．

　明らかに ev_{x_0} は ev と $i_{x_0}\colon Y^X \to Y^X \times X$, $i_{x_0}(f) = (f, x_0)$ との合成である．　言い換えれば ev を $Y^X \times \{x_0\}$ に制限し（て $Y^X \times \{x_0\}$ と Y^X を同一視し）たものである：

$$Y^X \xrightarrow{\cong} Y^X \times \{x_0\} \hookrightarrow Y^X \times X \xrightarrow{\mathrm{ev}} Y.$$

例 1.10.2. $X = [1] = \{0\}$ の場合を考える．このとき値写像は全単射 $Y^{[1]} \cong Y$ を与える（例 1.4.6 参照）：

$$\begin{tikzcd}
Y^{[1]} \arrow[rr, "\cong", "\mathrm{ev}_0"'] \arrow[dr, "\cong", "i_0"'] & & Y \\
& Y^{[1]} \times [1] \arrow[ur, "\cong"', "\mathrm{ev}"] &
\end{tikzcd}.$$

例 1.10.3. $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathrm{ev}_n\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ は数列に対しその第 n 項を対応させる写像である．とくに $\mathrm{ev}_1\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ は数列の初項を与える写像である．

例 1.10.4. X を集合とする．集合 $[2] = \{0, 1\}$ から X への写像全体 $X^{[2]}$ を考える．写像 $(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)\colon X^{[2]} \to X^2$, $(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)(f) = (f(0), f(1))$ は明らかに全単射である．

　同様に, n 個の元を持つ集合 $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ を考えると, 写像

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
(\mathrm{ev}_0, \ldots, \mathrm{ev}_{n-1})\colon & X^{[n]} \arrow[r] & X^n \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& f \arrow[r, mapsto] & (f(0), f(1), \ldots, f(n-1))
\end{tikzcd}$$

により全単射 $X^{[n]} \to X^n$ が得られる．

問 62. 　1. 写像 $(\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_0)\colon X^{[2]} \to X^2$ も全単射である．

2. $\sigma\colon [n] \to [n]$ を全単射とする．このとき写像

$$(\mathrm{ev}_{\sigma(0)}, \mathrm{ev}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathrm{ev}_{\sigma(n-1)})\colon X^{[n]} \to X^n$$

も全単射である．

例 1.10.5. X, Y, Z を集合とする．写像の合成は写像

$$\begin{array}{rccc} c_{X,Y,Z}\colon & \mathrm{Map}(Y,Z) \times \mathrm{Map}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(X,Z) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

を定める．

定義 1.4.29 の写像は合成を $\{g\} \times \mathrm{Map}(X,Y)$ や $\mathrm{Map}(Y,Z) \times \{f\}$ に制限したものである：

$$g_*\colon \mathrm{Map}(X,Y) \xrightarrow{\cong} \{g\} \times \mathrm{Map}(X,Y) \hookrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z) \times \mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(X,Z),$$
$$f^*\colon \mathrm{Map}(Y,Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Map}(Y,Z) \times \{f\} \hookrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z) \times \mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(X,Z).$$

$X = [1]$ の場合を考えると（自然な同一視のもと）値写像は合成の特別な場合とみなせる：

$$\begin{tikzcd} Z^Y \times Y^{[1]} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\mathrm{ev}_0"', "\cong"] & Z^{[1]} \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{ev}_0"] \\ Z^Y \times Y \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & Z. \end{tikzcd}$$

写像の合成は結合的であるから $c_{X,Z,W} \circ (\mathrm{id} \times c_{X,Y,Z}) = c_{X,Y,W} \circ (c_{Y,Z,W} \times \mathrm{id})$ が成り立つ：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}(Z,W) \times \mathrm{Map}(Y,Z) \times \mathrm{Map}(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{id}\times c_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "c_{Y,Z,W}\times\mathrm{id}"'] & \mathrm{Map}(Z,W) \times \mathrm{Map}(X,Z) \arrow[d, "c_{X,Z,W}"] \\ \mathrm{Map}(Y,W) \times \mathrm{Map}(X,Y) \arrow[r, "c_{X,Y,W}"'] & \mathrm{Map}(X,W). \end{tikzcd}$$

適当な同一視のもと, 命題 1.4.32, 1.10.6, 1.10.7 はこの特別な場合である．

1.10.2 誘導される写像の自然性

命題 1.10.6. $f\colon X \to Y$, $h\colon Z \to W$ を写像とすると $h^* \circ f_* = f_* \circ h^*$：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(W,X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "h^*"'] & \mathrm{Map}(W,Y) \arrow[d, "h^*"] \\
\mathrm{Map}(Z,X) \arrow[r, "f_*"'] & \mathrm{Map}(Z,Y).
\end{tikzcd}$$

この合成写像 $\mathrm{Map}(h, 1_X) \circ \mathrm{Map}(1_W, f) = h^* \circ f_* = f_* \circ h^* = \mathrm{Map}(1_Z, f) \circ \mathrm{Map}(h, 1_X)$ を $\mathrm{Map}(h, f)$ と書くことがある．証明から分かるように，$\mathrm{Map}(h, f)(g) = f \circ g \circ h$ である：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Map}(W,X) & \xrightarrow{\mathrm{Map}(h,f)} & \mathrm{Map}(Z,Y) \\
\cup & & \cup \\
W \underset{g}{\to} X & \longmapsto & Z \underset{h}{\to} W \underset{g}{\to} X \underset{f}{\to} Y.
\end{array}$$

証明．$g \in \mathrm{Map}(W, X)$ に対し，

$$\begin{aligned}
(h^* \circ f_*)(g) &= h^*(f_*(g)) \\
&= h^*(f \circ g) \\
&= (f \circ g) \circ h \\
(f_* \circ h^*)(g) &= f_*(h^*(g)) \\
&= f_*(g \circ h) \\
&= f \circ (g \circ h).
\end{aligned}$$

□

値写像の自然性

命題 1.10.7. X, Y, Z を集合，$f\colon X \to Y$ を写像，$z_0 \in Z$, $x_0 \in X$ とする．次の図式は可換である．

1.

$$\begin{tikzcd}
X^Z \times Z \arrow[r, "f_* \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] & Y^Z \times Z \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

2.

$$\begin{tikzcd} X^Z \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_{z_0}"'] & Y^Z \arrow[d, "\mathrm{ev}_{z_0}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

3.

$$\begin{tikzcd} Z^Y \times X \arrow[r, "f^* \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times f"'] & Z^X \times X \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ Z^Y \times Y \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & Z. \end{tikzcd}$$

4.

$$\begin{tikzcd} Z^Y \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_{f(x_0)}"'] & & Z^X \arrow[dl, "\mathrm{ev}_{x_0}"] \\ & Z & . \end{tikzcd}$$

証明. 1. $h \in X^Z$ と $z \in Z$ に対し,

$$\begin{aligned} (\mathrm{ev} \circ (f_* \times \mathrm{id}))(h, z) &= \mathrm{ev}((f_* \times \mathrm{id})(h, z)) \\ &= \mathrm{ev}(f_*(h), z) \\ &= \mathrm{ev}(f \circ h, z) \\ &= (f \circ h)(z) \\ &= f(h(z)), \\ (f \circ \mathrm{ev})(h, z) &= f(\mathrm{ev}(h, z)) \\ &= f(h(z)). \end{aligned}$$

他も同様. □

問 63. 2, 3, 4 を示せ.

例 1.10.8. $Z = [1]$ の場合を考える. 次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} X^{[1]} \arrow[r, "f^{[1]}"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"', "\cong"] & Y^{[1]} \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{ev}_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

すなわち, ev_0 により $X^{[1]}$ と X, $Y^{[1]}$ と Y をそれぞれ同一視すれば, $f_* = f^{[1]}$ は f と同一視できる.

Φ, Ψ の自然性

命題 1.10.9. $f\colon X_1 \to X_2$, $g\colon Y_1 \to Y_2$, $h\colon Z_1 \to Z_2$ を写像とする. 次が成り立つ.

1. $\Phi \circ (f \times \mathrm{id})^* = f^* \circ \Phi$, $\Psi \circ f^* = (f \times \mathrm{id})^* \circ \Psi$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(X_1 \times Y, Z) \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{Map}(X_1, Z^Y) \arrow[r, "\Psi"] & \mathrm{Map}(X_1 \times Y, Z) \\
\mathrm{Map}(X_2 \times Y, Z) \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[u, "(f\times\mathrm{id})^*"] & \mathrm{Map}(X_2, Z^Y) \arrow[r, "\Psi"'] \arrow[u, "f^*"'] & \mathrm{Map}(X_2 \times Y, Z). \arrow[u, "(f\times\mathrm{id})^*"']
\end{tikzcd}$$

2. $\Phi \circ h_* = (h_*)_* \circ \Phi$, $\Psi \circ (h_*)_* = h_* \circ \Psi$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(X \times Y, Z_1) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "h_*"'] & \mathrm{Map}(X, Z_1^Y) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "(h_*)_*"] & \mathrm{Map}(X \times Y, Z_1) \arrow[d, "h_*"] \\
\mathrm{Map}(X \times Y, Z_2) \arrow[r, "\Phi"'] & \mathrm{Map}(X, Z_2^Y) \arrow[r, "\Psi"'] & \mathrm{Map}(X \times Y, Z_2).
\end{tikzcd}$$

3. $\Phi \circ (\mathrm{id} \times g)^* = (g^*)_* \circ \Phi$, $\Psi \circ (g^*)_* = (\mathrm{id} \times g)^* \circ \Psi$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(X \times Y_1, Z) \arrow[r, "\Phi"] & \mathrm{Map}(X, Z^{Y_1}) \arrow[r, "\Psi"] & \mathrm{Map}(X \times Y_1, Z) \\
\mathrm{Map}(X \times Y_2, Z) \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[u, "(\mathrm{id}\times g)^*"] & \mathrm{Map}(X, Z^{Y_2}) \arrow[r, "\Psi"'] \arrow[u, "(g^*)_*"'] & \mathrm{Map}(X \times Y_2, Z). \arrow[u, "(\mathrm{id}\times g)^*"']
\end{tikzcd}$$

注意． 命題 1.10.9 は次のように表すこともできる.

(i) 任意の $\varphi\colon X_2 \times Y \to Z$ に対し, $\Phi(\varphi \circ (f \times \mathrm{id})) = \Phi(\varphi) \circ f$,
任意の $\psi\colon X_2 \to Z^Y$ に対し, $\Psi(\psi \circ f) = \Psi(\psi) \circ (f \times \mathrm{id})$.

(ii) 任意の $\varphi\colon X \times Y \to Z_1$ に対し, $\Phi(h \circ \varphi) = h_* \circ \Phi(\varphi)$,
任意の $\psi\colon X \to Z_1^Y$ に対し, $\Psi(h_* \circ \psi) = h_* \circ \Psi(\psi)$.

(iii) 任意の $\varphi\colon X \times Y_2 \to Z$ に対し, $\Phi(\varphi \circ (\mathrm{id} \times g)) = g^* \circ \Phi(\varphi)$,
任意の $\psi\colon X \to Z^{Y_2}$ に対し, $\Psi(g^* \circ \psi) = \Psi(\psi) \circ (\mathrm{id} \times g)$.

系 1.10.10. 1. $f\colon X_1 \to X_2$ を写像とする.

(i) $\varphi_i\colon X_i \times Y \to Z$ $(i = 1, 2)$ を写像とする. このとき,

$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id}) \Leftrightarrow \Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_2) \circ f$：

$$\begin{tikzcd} X_1 \times Y \arrow[rr, "f\times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \times Y \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & Z & \end{tikzcd} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\Phi(\varphi_1)"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[dl, "\Phi(\varphi_2)"] \\ & Z^Y & \end{tikzcd} .$$

(ii) $\psi\colon X_i \times Y \to Z$ $(i = 1, 2)$ を写像とする．このとき,
$\psi_1 = \psi_2 \circ f \Leftrightarrow \Psi(\psi_1) = \Psi(\psi_2) \circ (f \times \mathrm{id})$:

$$\begin{tikzcd} X_1 \times Y \arrow[rr, "f\times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\Psi(\psi_1)"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \times Y \arrow[dl, "\Psi(\psi_2)"] \\ & Z & \end{tikzcd} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[dl, "\psi_2"] \\ & Z^Y & \end{tikzcd} .$$

2. $h\colon Z_1 \to Z_2$ を写像とする．
   (i) $\varphi_i\colon X \times Y \to Z_i$ $(i = 1, 2)$ を写像とする．このとき,
   $\varphi_2 = h \circ \varphi_1 \Leftrightarrow \Phi(\varphi_2) = h_* \circ \Phi(\varphi_r)$:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ Z_1 \arrow[rr, "h"'] & & Z_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\Phi(\varphi_1)"'] \arrow[dr, "\Phi(\varphi_2)"] & \\ Z_1^Y \arrow[rr, "h_*"'] & & Z_2^Y \end{tikzcd} .$$

   (ii) $\psi_i\colon X \to Z_i^Y$ $(i = 1, 2)$ を写像とする．このとき,
   $\psi_2 = h_* \circ \psi_1 \Leftrightarrow \Psi(\psi_2) = h \circ \Psi(\psi_1)$:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\Psi(\psi_1)"'] \arrow[dr, "\Psi(\psi_2)"] & \\ Z_1 \arrow[rr, "h"'] & & Z_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ Z_1^Y \arrow[rr, "h_*"'] & & Z_2^Y \end{tikzcd} .$$

3. $g\colon Y_1 \to Y_2$ を写像とする．
   (i) $\varphi_i\colon X \times Y_i \to Z$ $(i = 1, 2)$ を写像とする．このとき,
   $\varphi_1 = \varphi_2 \circ (\mathrm{id} \times g) \Leftrightarrow \Phi(\varphi_1) = g^* \circ \Phi(\varphi_2)$:

$$\begin{tikzcd} X \times Y_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}\times g"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X \times Y_2 \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & Z & \end{tikzcd} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\Phi(\varphi_2)"'] \arrow[dr, "\Phi(\varphi_1)"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ Z^{Y_2} \arrow[rr, "g^*"'] & {} & Z^{Y_1} \end{tikzcd} .$$

(ii) $\psi_i\colon X \to Z^{Y_i}$ $(i=1,2)$ を写像とする．このとき，
$\psi_1 = g^* \circ \psi_2 \Leftrightarrow \Psi(\psi_1) = \Psi(\psi_2) \circ (\mathrm{id} \times g)$:

$$\begin{tikzcd}
X \times Y_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}\times g"] \arrow[dr, "\Psi(\psi_1)"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X \times Y_2 \arrow[dl, "\Psi(\psi_2)"] & \Leftrightarrow & & X \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\
& Z & & & Z^{Y_2} \arrow[rr, "g^*"'] & \, & Z^{Y_1}
\end{tikzcd}.$$

証明．1.(i) のみ示す．他も同様である．命題 1.10.9 より $\Phi(\varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id})) = \Phi(\varphi_2) \circ f$ である．

$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id})$ であるとすると，$\Phi(\varphi_1)\Phi(\varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id})) = \Phi(\varphi_2) \circ f$.

一方，$\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_2) \circ f$ であるとすると，$\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_2) \circ f = \Phi(\varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id}))$. Φ は単射であるから $\varphi_1 = \varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id})$. □

注意．これらをいくつか組み合わせたものもよく使われる．例えば，$f\colon X_1 \to X_2$, $h\colon Z_1 \to Z_2$ を写像，$\psi_i\colon X_i \to Z_i^Y$ $(i=1,2)$ を写像とすると，

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times Y \arrow[r, "f\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\Psi(\psi_1)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \times Y \arrow[d, "\Psi(\psi_2)"] & \Leftrightarrow & X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\
Z_1 \arrow[r, "h"'] & Z_2 & & Z_1^Y \arrow[r, "h_*"'] & Z_2^Y .
\end{tikzcd}$$

とくに $X_i = Z_i^Y$, $f = h^*$, $\psi_i = \mathrm{id}$ とすると明らかに右の図式は可換．よって左側も可換．

$$\begin{tikzcd}
Z_1^Y \times Y \arrow[r, "h_*\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\Psi(\mathrm{id})=\mathrm{ev}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_2^Y \times Y \arrow[d, "\Psi(\mathrm{id})=\mathrm{ev}"] & \Leftrightarrow & Z_1^Y \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Z_2^Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Z_1 \arrow[r, "h"'] & Z_2 & & Z_1^Y \arrow[r, "h_*"'] & Z_2^Y
\end{tikzcd}$$

すなわち命題 1.10.7.1 の可換図式をえる．（が，我々は命題 1.10.9 の証明に命題 1.10.7.1 を用いたので，これは命題 1.10.7.1 の別証明にはもちろんなっていない.）

直積，直和と自然性

命題 1.10.11. $f_k\colon X_k \to Y_k$ $(k=1,2)$ を写像，Z を集合とする．

1. $p_k\colon X_1 \times X_2 \to X_k$, $q_k\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_k$ $(k=1,2)$ を射影とする．このとき

$(f_{1*} \times f_{2*}) \circ (p_{1*}, p_{2*}) = (q_{1*}, q_{2*}) \circ (f_1 \times f_2)_*$：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(Z, X_1 \times X_2) \arrow[r, "(p_{1*}, p_{2*})"] \arrow[d, "(f_1 \times f_2)_*"'] & \mathrm{Map}(Z, X_1) \times \mathrm{Map}(Z, X_2) \arrow[d, "f_{1*} \times f_{2*}"] \\
\mathrm{Map}(Z, Y_1 \times Y_2) \arrow[r, "(q_{1*}, q_{2*})"'] & \mathrm{Map}(Z, Y_1) \times \mathrm{Map}(Z, Y_2).
\end{tikzcd}$$

2. $X_1 \cap X_2 = \emptyset = Y_1 \cap Y_2$ とし, $i_k \colon X_k \to X_1 \amalg X_2$, $j_k \colon Y_k \to Y_1 \amalg Y_2$ $(k = 1, 2)$ を包含写像とする. このとき $(f_1^* \times f_2^*) \circ (j_1^*, j_2^*) = (i_1^*, i_2^*) \circ (f_1 \amalg f_2)^*$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(X_1 \amalg X_2, Z) \arrow[r, "(i_1^*, i_2^*)"] & \mathrm{Map}(X_1, Z) \times \mathrm{Map}(X_2, Z) \\
\mathrm{Map}(Y_1 \amalg Y_2, Z) \arrow[r, "(j_1^*, j_2^*)"'] \arrow[u, "(f_1 \amalg f_2)^*"] & \mathrm{Map}(Y_1, Z) \times \mathrm{Map}(Y_2, Z). \arrow[u, "f_1^* \times f_2^*"']
\end{tikzcd}$$

証明. 1 を示す.

$$\begin{aligned}
(f_{1*} \times f_{2*}) \circ (p_{1*}, p_{2*}) &= (f_{1*} \circ p_{1*}, f_{2*} \circ p_{2*}) \\
&= ((f_1 \circ p_1)_*, (f_2 \circ p_2)_*) \\
&= ((q_1 \circ (f_1 \times f_2))_*, (q_2 \circ (f_1 \times f_2))_*) \\
&= (q_{1*} \circ (f_1 \times f_2)_*, q_{2*} \circ (f_1 \times f_2)_*) \\
&= (q_{1*}, q_{2*}) \circ (f_1 \times f_2)_*.
\end{aligned}$$

2 も同様である. □

1.10.3　誘導される写像の単射性と全射性

f の誘導する写像の単射性.

定理 1.10.12. $f \colon X \to Y$ を写像, Z を集合とする.

1. 次は同値.
   (i) f は単射.
   (ii) 任意の集合 Z に対し, $f_* \colon \mathrm{Map}(Z, X) \to \mathrm{Map}(Z, Y)$ が単射.
2. 次は同値.
   (i) f は全射.
   (ii) 任意の集合 Z に対し, $f^* \colon \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ が単射.

証明. これは問題集 80(2)(3) の言い換えである.

1. (i)⇒(ii) $g, h\colon Z \to X$, $f \circ g = f \circ h$ とする．任意の $z \in Z$ に対し,

$$f(g(z)) = (f \circ g)(z) = (f \circ h)(z) = f(h(z))$$

であり, f は単射なので, $g(z) = h(z)$. よって $g = h$.
(ii)⇒(i) $Z = [1]$ に仮定を使うと, $f_*\colon X^{[1]} \to Y^{[1]}$ は単射. 例 1.10.8 で見たように次は可換であるから f も単射.

$$\begin{tikzcd} X^{[1]} \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"', "\cong"] & Y^{[1]} \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{ev}_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

同じことであるが, 直接やれば, こんな感じ.
$x_1, x_2 \in X$ が $f(x_1) = f(x_2)$ をみたすとする．写像 $g_i\colon [1] \to X$ を $g_i(0) = x_i$ により定めると,

$$(f_*(g_1))(0) = (f \circ g_1)(0) = f(g_1(0)) = f(x_1) = f(x_2) = (f_*(g_2))(0)$$

となり, $f_*(g_1) = f_*(g_2)$. f_* は単射だから $g_1 = g_2$. よって $x_1 = g_1(0) = g_2(0) = x_2$.

2. (i)⇒(ii) $g, h\colon Y \to Z$, $g \circ f = h \circ f$ とする．仮定より f は全射である．よって, 任意の $y \in Y$ に対し, ある $x \in X$ が存在し, $y = f(x)$ となる．ゆえに

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$$

したがって $g = h$.
(ii)⇒(i) $Z = [2]$ に仮定を使えば, $f^*\colon [2]^Y \to [2]^X$ は単射. よって定理 1.4.40 より f は全射.
直接示すには $\chi_{f(X)}, \chi_Y\colon Y \to [2]$ を考えればよい.

□

f の誘導する写像の全射性.

定理 1.10.13. X を空でない集合, $f\colon X \to Y$ を写像, Z を集合とする.

1. 次は同値.
   (i) f は単射.
   (ii) f はレトラクションを持つ, すなわち, $\exists r\colon Y \to X : r \circ f = \mathrm{id}_X$.
   (iii) $f^*\colon \mathrm{Map}(Y, X) \to \mathrm{Map}(X, X)$ が全射.

(iv) 任意の集合 Z に対し, $f^*\colon \mathrm{Map}(Y,Z) \to \mathrm{Map}(X,Z)$ が全射.

2. (ii),(iii),(iv) は同値である. また, (ii)⇒(i) が成り立つ.
   (i) f は全射.
   (ii) f は切断を持つ, すなわち, $\exists s\colon Y \to X : f \circ s = \mathrm{id}_Y$.
   (iii) $f_*\colon \mathrm{Map}(Y,X) \to \mathrm{Map}(Y,Y)$ が全射.
   (iv) 任意の集合 Z に対し, $f_*\colon \mathrm{Map}(Z,X) \to \mathrm{Map}(Z,Y)$ が全射.

証明. 1. (i)⇒(iv) を示せばよい. $Z = \emptyset$ の場合はすぐ分かる. $Z \neq \emptyset$ の場合を考える. $h\colon X \to Z$ を写像とする. 次の図式が可換となるような写像 $g\colon Y \to Z$ を作ればよい. (このような写像 g を h の拡張という.)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}.$$

f は単射なので, 逆写像 $f^{-1}\colon f(X) \to X$ がある. $z_0 \in Z$ を一つとる.

$$g(y) = \begin{cases} h(f^{-1}(y)) & y \in f(X), \\ z_0 & y \notin f(X) \end{cases}$$

とすればよい.

2. (ii)⇒(iv) を示せばよい. $f_* \circ s_* = (f \circ s)_* = \mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ ゆえ f_* は全射.

□

注意 . 定理 1.10.13 によれば, f が単射であることとレトラクションを持つことは同値である. 一方, f が全射ならば切断を持つか? を考えてみる. $f\colon X \to Y$ が全射であるから, 各 $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在するので, そのような x を一つ選び $s(y) = x$ とすればよい, ように思うが...

注意 .

$$\forall Z : f_*\text{:単射} \Leftrightarrow f\text{:単射} \Leftrightarrow \forall Z : f^*\text{:全射} \Leftrightarrow f^*\colon 2^Y \to 2^X\text{:全射}$$
$$\forall Z : f_*\text{:全射} \Rightarrow f\text{:全射} \Leftrightarrow \forall Z : f^*\text{:単射} \Leftrightarrow f^*\colon 2^Y \to 2^X\text{:単射}$$

1.10.4 二項演算

定義 1.10.14. X を集合とする. $X \times X$ から X への写像を X 上の**二項演算 (binary operation)** とよぶことがある. 写像 $\mu\colon X \times X \to X$ を二項演算と見るとき, $\mu(x,y) \in X$ を $x\mu y$ とか xy と書くことがある.

$\mu\colon X \times X \to X$ を二項演算とし, $\mu(x, y)$ を xy と書く.

1. 次の図式が可換であるとき, すなわち, $\mu(\mu \times 1_X) = \mu(1_X \times \mu)$ が成り立つとき μ は**結合的 (associative)** であるという：

$$\begin{tikzcd} X \times X \times X \arrow[r, "\mu \times 1_X"] \arrow[d, "1_X \times \mu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\ X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X. \end{tikzcd}$$

   つまり μ が結合的であるとは, 任意の $x, y, z \in X$ に対し, $\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z))$, すなわち $(xy)z = x(yz)$ が成り立つということ.

2. 次の図式が可換であるとき, すなわち, $\mu = \mu\tau$ が成り立つとき μ は**可換 (commutative)** であるという：

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\tau"'] & X \\ X \times X \arrow[ur, "\mu"'] & . \end{tikzcd}$$

   ただし $\tau\colon X \times Y \to X \times Y$ は $\tau(x, y) = (y, x)$ で定義される写像. つまり μ が可換であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対し, $\mu(x, y) = \mu(\tau(x, y))$, すなわち $xy = yx$ が成り立つということ.

3. 次の図式の左（右）の三角形を可換にするような写像

$$\eta\colon [1] \to X$$

   が存在するとき, すなわち $\mu(\eta \times 1_X) = 1_X$ （$\mu(1_X \times \eta) = 1_X$）が成り立つような η が存在するとき, μ は左（右）**単位元を持つ**といい, $e = \eta(0) \in X$ を μ の左（右）**単位元 (unit)** という. 両方の三角形が可換であるとき μ は単位元を持つといい, e を単位元という.

$$\begin{tikzcd} {[1]} \times X \arrow[r, "\eta \times 1_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"'] & X \times [1] \arrow[l, "1_X \times \eta"'] \arrow[dl, "1_X"] \\ & X & . \end{tikzcd}$$

   つまり e が左（右）単位元であるとは, 任意の $x \in X$ に対し, $\mu(\eta(0), x) = x$ （$\mu(x, \eta(0)) = x$）, すなわち $ex = x$ （$xe = x$）が成り立つということ.

例 1.10.15. 実数の和 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, 積 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$ はいずれも結合的, 可換で単位元を持つ. もちろん単位元はそれぞれ 0 と 1 である. また和は逆元を持つ.

例 1.10.16. $\vee, \wedge, \to$ は $[2] = \{0, 1\}$ 上の二項演算を与える. $\vee, \wedge$ は結合的, 可換で単位元を持つ. $\vee$ の単位元は 0, $\wedge$ の単位元は 1. $\to$ は結合的でも可換でもないが, 左単位元 1 を持つ（$1 \to 0 = 0$, $1 \to 1 = 1$）.

例 1.10.17. $\mu\colon Y \times Y \to Y$ を集合 Y 上の二項演算とし, $\mu(y_1, y_2)$ を $y_1 \cdot y_2$ と書く. 二つの写像 $f, g\colon X \to Y$ に対し, 写像 $f \cdot g\colon X \to Y$ を $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ で定め, f と g の**各点毎の積 (pointwise multiplication)** 等とよぶ. 写像の合成で書けば $f \cdot g = \mu \circ (f, g) = \mu \circ (f \times g) \circ \Delta$ である:

$$\begin{tikzcd}
f \cdot g\colon X \arrow[rr, "(f,g)"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & Y \times Y \arrow[r, "\mu"] & Y \\
& X \times X \arrow[ur, "f\times g"'] & & .
\end{tikzcd}$$

$(f, g) \in Y^X \times Y^X$ に対し $f \cdot g \in Y^X$ を対応させることで Y^X 上の二項演算が定まる. この二項演算は命題 1.4.34 の同一視のもと, μ が誘導する写像である：

$$Y^X \times Y^X \xrightarrow[(p_{1*}, p_{2*})^{-1}]{\cong} (Y \times Y)^X \xrightarrow[\mu_*]{} Y^X.$$

実際, $\left(\mu_* \circ (p_{1*}, p_{2*})^{-1}\right)(f, g) = \mu_*((f, g)) = \mu \circ (f, g) = f \cdot g$.

X の元を代入して計算すればすぐ分かるが, もとの二項演算 μ が結合的（可換, 単位元を持つ）であるとき, μ の定める二項演算も結合的（可換, 単位元を持つ）である. このことは, 例えば結合性については, 次の図式が可換であることからも分かる：

$$\begin{tikzcd}
Y^X \times Y^X \times Y^X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & (Y \times Y)^X \times Y^X \arrow[r, "\mu_* \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\cong"'] & Y^X \times Y^X \arrow[d, "\cong"] \\
Y^X \times (Y \times Y)^X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu_*"'] & (Y \times Y \times Y)^X \arrow[r, "(\mu \times \mathrm{id})_*"] \arrow[d, "(\mathrm{id} \times \mu)_*"'] & (Y \times Y)^X \arrow[d, "\mu_*"] \\
Y^X \times Y^X \arrow[r, "\cong"'] & (Y \times Y)^X \arrow[r, "\mu_*"'] & Y^X.
\end{tikzcd}$$

例 1.10.18. 各点毎の和, 積, すなわち $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に対し, $(a+b)_n = a_n + b_n$, $(ab)_n = a_n b_n$ により定まる数列を対応させることで, 実数列の和, 積 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ が定まる.

例 1.10.19. X を集合とする. 合成

$$c = c_{X,X,X}\colon \mathrm{Map}(X, X) \times \mathrm{Map}(X, X) \to \mathrm{Map}(X, X)$$

は $\mathrm{Map}(X, X)$ 上に結合的で単位元を持つ二項演算を与える. 単位元は id_X である. 一般に可換ではない.

X から X への全単射全体を $\mathrm{Aut}(X)$ と書く．合成

$$c\colon \mathrm{Aut}(X) \times \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(X)$$

は $\mathrm{Aut}(X)$ 上に結合的で単位元 id_X を持つ二項演算を与える．さらに，この二項演算は逆元を持つ．すなわち，写像の合成により $\mathrm{Aut}(X)$ は**群 (group)** となる．もちろん $f \in \mathrm{Aut}(X)$ の逆元は f の逆写像 f^{-1} である．

$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ （$n \in \mathbb{N}$）の場合，$\mathrm{Aut}(X)$ を S_n と書き，n 次**対称群 (symmetric group)** という．

1.10.5　特性関数

例 **1.10.20.** X を集合，$P(x)$ を述語とし，X の部分集合

$$\tilde{P} = \{x \in X \mid P(x)\}$$

を考える．$x \in \tilde{P}$ かどうかを知るには $P(x)$ がどのような内容の述語であれ $P(x)$ が真となるか偽となるかだけが分かればよい．このような観点からすると $P(x)$ を次で定まる X から $[2] = \{0, 1\}$ への写像 $\bar{P}\colon X \to [2]$ と考えることができる:

$$\bar{P}(x) = \begin{cases} 1, & P(x) \text{ が真} \\ 0, & P(x) \text{ が偽}. \end{cases}$$

明らかに

$$\tilde{P} = \left\{x \in X \;\middle|\; \bar{P}(x) = 1\right\}$$

すなわち，$\chi_{\tilde{P}} = \bar{P}$ である．

また $A \subset X$ に対し，「$x \in A$」という述語を 2^X の元と見ると，A の特性関数 χ_A に他ならない．

例 **1.10.21.** $X \times Y$ の部分集合を考えることと，X から $\mathcal{P}(Y)$ への写像を与えることは同じことである：$\mathcal{P}(X \times Y) \cong \mathcal{P}(Y)^X$.

実際，$R \subset X \times Y$ に対し，$\tilde{\Phi}(R)\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ を $\tilde{\Phi}(R)(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$ により定めれば，この対応 $\tilde{\Phi}$ が全単射を与える．逆は，$\psi\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ に対し，$\tilde{\Psi}(\psi) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \psi(x)\}$ を対応させればよい．さらに次の図式は可換である:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X \times Y) \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\chi"', "\cong"] & \mathcal{P}(Y)^X \arrow[r, "\tilde{\Psi}"] \arrow[d, "\cong"', "\chi_*"] & \mathcal{P}(X \times Y) \arrow[d, "\cong"', "\chi"] \\
2^{X \times Y} \arrow[r, "\cong", "\Phi"'] & \left(2^Y\right)^X \arrow[r, "\cong", "\Psi"'] & 2^{X \times Y}.
\end{tikzcd}$$

実際,

$$
\begin{aligned}
\chi_* \circ \tilde{\Phi}(R)(x)(y) = \chi_{\tilde{\Phi}(R)(x)}(y) &= \begin{cases} 1, & (x,y) \in R \\ 0, & (x,y) \notin R \end{cases} \\
&= \Phi \circ \chi(R)(x)(y), \\
\chi \circ \tilde{\Psi}(\psi)(x,y) = \chi_{\tilde{\Psi}(\psi)}(x,y) &= \begin{cases} 1, & y \in \psi(x) \\ 0, & y \notin \psi(x) \end{cases} \\
&= \chi_{\psi(x)}(y) \\
&= (\chi\psi(x))(y) \\
&= \Psi(\chi\psi)(x,y) = \Psi(\chi_*(\psi))(x,y).
\end{aligned}
$$

例 1.10.22. X を集合, $X \neq \emptyset$ とする. singleton map $s\colon X \to \mathcal{P}(X)$, $s(x) = \{x\}$ を考える. $s \in \mathcal{P}(X)^X$ である.

s の $\tilde{\Psi}\colon \mathcal{P}(X)^X \xrightarrow{\cong} \mathcal{P}(X \times X)$ による像は対角線集合 Δ_X である:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(s) &= \{(x,y) \in X \times X \mid y \in s(x)\} \\
&= \{(x,y) \in X \times X \mid y \in \{x\}\} \\
&= \{(x,y) \in X \times X \mid y = x\} = \Delta_X.
\end{aligned}
$$

例 1.10.23. 演算 $\mu\colon [2] \times [2] \to [2]$, $\mu(p,q) = p \cdot q$ が与えられたとする. μ の定める各点毎の演算 $2^X \times 2^X \to 2^X$, すなわち $a, b \in 2^X$ に対し, $(a \cdot b)(x) = a(x) \cdot b(x)$ により定まる $a \cdot b \in 2^X$ を対応させる写像を考える. μ が結合的（可換, 単位元を持つ）ならば, 各点毎の演算もそうである.

この演算は全単射 $\chi\colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ を通して $\mathcal{P}(X)$ 上の演算を定める. すなわち, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ に対し, $A \cdot B \in \mathcal{P}(X)$ を $\chi^{-1}(\chi_A \cdot \chi_B)$ により定める. 言い換えれば, $A \cdot B$ は特性写像が $\chi_{A \cdot B} = \chi_A \cdot \chi_B$, すなわち, $\chi_{A \cdot B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ により与えられる集合

$$
A \cdot B = \{x \in X | \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1\}
$$

である：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi \times \chi"] \arrow[d, "\cdot"'] & 2^X \times 2^X \arrow[d, "\cdot"] \\
\mathcal{P}(X) & 2^X. \arrow[l, "\chi^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

もちろん, μ が結合的（可換, 単位元を持つ）ならば, この $\mathcal{P}(X)$ 上の演算もそうである.

$f\colon X \to Y$ を写像とする. 明らかに $f^*\colon 2^Y \to 2^X$ は各点毎の演算を保つ.

つまり $a, b \in 2^Y$ に対し,

$$\begin{aligned}(f^*(a\cdot b))(x) &= ((a\cdot b)\circ f)(x) = (a\cdot b)(f(x))\\ &= a(f(x))\cdot b(f(x)) = (f^*(a))(x)\cdot (f^*(b))(x)\\ &= (f^*(a)\cdot f^*(b))(x),\end{aligned}$$

すなわち $f^*(a\cdot b) = f^*(a)\cdot f^*(b)$.

よって逆像は, 対応する部分集合の演算を保つ. すなわち

$$\begin{aligned}\chi_{f^{-1}(A\cdot B)} &= f^*(\chi_{A\cdot B}) = f^*(\chi_A\cdot\chi_B)\\ &= f^*(\chi_A)\cdot f^*(\chi_B) = \chi_{f^{-1}(A)}\cdot\chi_{f^{-1}(B)}\\ &= \chi_{f^{-1}(A)\cdot f^{-1}(B)}\end{aligned}$$

となり, $f^{-1}(A\cdot B) = f^{-1}(A)\cdot f^{-1}(B)$ である.

命題 1.10.24. X を集合とする. 集合 $[2]$ 上の演算 $\neg, \vee, \wedge, \to$ は, 各点毎の演算により 2^X 上の演算を定める. これに対応する $\mathcal{P}(X)$ 上の演算は次で与えられる.

任意の $A, B \subset X$ に対し次が成り立つ.

1. $\chi_{A^c} = \neg\chi_A$.
2. $\chi_{A\cup B} = \chi_A \vee \chi_B$.
3. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$.
4. $\chi_{A^c\cup B} = \chi_A \to \chi_B$.

$$\begin{tikzcd}\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "()^c"'] & 2^X \arrow[d, "\neg"] \\ \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi"'] & 2^X\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi\times\chi"] \arrow[d, "\cup"'] & 2^X\times 2^X \arrow[d, "\vee"] \\ \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi"'] & 2^X\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi\times\chi"] \arrow[d, "\cap"'] & 2^X\times 2^X \arrow[d, "\wedge"] \\ \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi"'] & 2^X\end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi\times\chi"] \arrow[d, "()^c\cup"'] & 2^X\times 2^X \arrow[d, "\to"] \\ \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi"'] & 2^X.\end{tikzcd}$$

証明. $\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$ に注意すればいずれもほとんど明らかであるが, 1 と 2 を示そう.

1.

$$(\neg\chi_A)^{-1}(1) = \{x \in X \mid \neg\chi_A(x) = 1\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x \in X \mid \neg\,(\chi_A(x)) = 1\} \\
&= \{x \in X \mid \chi_A(x) = 0\} \\
&= \{x \in X \mid x \notin A\} \\
&= A^c.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(\chi_A \vee \chi_B)(x) = 1 &\Leftrightarrow \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\
&\Leftrightarrow x \in A \cup B \\
&\Leftrightarrow \chi_{A\cup B}(x) = 1.
\end{aligned}
$$

□

問 64. 3,4 を示せ.

例 1.10.25. 集合 $[2] = \{0,1\}$ は $\mathbb{Z}/2$ と自然に同一視される．これにより $[2]$ に加法, 乗法が定まる．奇数たす奇数は偶数（$1+1=0$）, 偶数かける奇数は偶数（$0\cdot 1=0$）等といった具合である.

$p+q$

$p\backslash q$	0	1
0	0	1
1	1	0

$p\cdot q$

$p\backslash q$	0	1
0	0	0
1	0	1

すぐ分かるように

$$p\cdot q = p\wedge q$$

である．また

$$
\begin{aligned}
p+q &= \neg(p\leftrightarrow q) \\
&= \neg(p\to q \wedge q\to p) \\
&= (p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p)
\end{aligned}
$$

である.

各点毎の積, 和により 2^X 上に積, 和が定まる．X の部分集合 A, B に対し

$$
\begin{aligned}
\chi_A\chi_B &= \chi_{A\cap B} \\
\chi_A + \chi_B &= \chi_{(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)} = \chi_{A\oplus B}
\end{aligned}
$$

である．[2] の, よって 2^X の和, 積が可換, 結合的, 分配的であり加法および乗法の単位元を持つので集合の共通部分 $\cap$ と対称差 $\oplus$ も可換, 結合的, 分配的であり単位元を持つ．（$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}/2$ の加法, 乗法が可換, 結合的, 分配的であり加法および乗法の単位元を持つことを確かめることと, $\cap$ と $\oplus$ に対しこれらを直接確かめることのどちらが面倒かというと多分前者のような気はするけれど.）

1.10.6　集合族の上極限, 下極限

例 1.5.11 を参考に集合族の上極限, 下極限の意味を少し考えてみよう．$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を集合族とし, $A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ とおく．$a \in A$ に対し, $\mathbb{N}$ の部分集合 $I(a)$ を, A_i が a を含むような番号 i たちの集合とする, すなわち,

$$I(a)=\{i \in \mathbb{N} \mid a \in A_i\}.$$

明らかに $a \in A_i \Leftrightarrow i \in I(a)$ である．

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_n} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty}\{a \mid \exists i \geq n : a \in A_i\} \\
&= \{a \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists i \geq n : a \in A_i\} \\
&= \{a \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists i \geq n : i \in I(a)\} \\
&= \left\{a \;\middle|\; I(a)\ \text{は無限集合}\right\}, \\
\underline{\lim_n} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\{a \mid \forall i \geq n : a \in A_i\} \\
&= \{a \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall i \geq n : a \in A_i\} \\
&= \{a \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall i \geq n : i \in I(a)\} \\
&= \left\{a \;\middle|\; I(a)^c\ \text{は有限集合}\right\}.
\end{aligned}$$

つまり, $\overline{\lim}_n A_n$ は, 無限個の番号 i に対して $a \in A_i$ となるような a たちの集合で, $\underline{\lim}_n A_n$ は, 有限個の番号 i を除いて $a \in A_i$（つまり, A_i が a を含まないような番号 i が有限個である）ような a たちの集合である．

上の式変形は次のように見ることもできる．$I(a) \subset \mathbb{N}$, つまり $I(a) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ だから, I

を A から $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ への写像

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{\quad I \quad} \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ a &\longmapsto I(a) \end{aligned}$$

と見ることができる．

$$X_i = \{J \subset \mathbb{N} \mid i \in J\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

であったから $i \in I(a) \Leftrightarrow I(a) \in X_i \Leftrightarrow a \in I^{-1}(X_i)$, すなわち $A_i = I^{-1}(X_i)$ である．よって

$$\begin{aligned} \overline{\lim_n} A_n &= \overline{\lim_n} I^{-1}(X_n) \\ &= I^{-1}\left(\overline{\lim_n} X_n\right) \\ &= I^{-1}\left(\left\{I \subset \mathbb{N} \;\middle|\; I \text{ は無限集合}\right\}\right) \\ &= \left\{a \;\middle|\; I(a) \text{ は無限集合}\right\}. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \underline{\lim_n} A_n &= \underline{\lim_n} I^{-1}(X_n) \\ &= I^{-1}\left(\underline{\lim_n} X_n\right) \\ &= \left\{a \;\middle|\; I(a)^c \text{ は有限集合}\right\}. \end{aligned}$$

1.10.7　対角線論法

$\tau \colon Y \to Y$ を集合 Y から Y 自身への写像とする．$\tau(y) = y$ となる点 $y \in Y$ を τ の固定点 **(fixed point)** という．任意の $y \in Y$ に対し $\tau(y) \neq y$ であるとき, τ は固定点を持たない **(fixed point free)** という．

定理 1.10.26 ([1, Cor.7.13])**.** X, Y を集合とする．Y が固定点を持たない自己写像を持つ, すなわち任意の $y \in Y$ に対し $\tau(y) \neq y$ となるような写像 $\tau \colon Y \to Y$ が存在するとする．このとき X から Y^X への全射は存在しない．

証明．$X \neq \emptyset$ のときを考えればよい．$\psi \colon X \to Y^X$ を写像とする．$\varphi = \Psi(\psi) \colon X \times X \to Y$ とおく．すなわち $\varphi(x, x') = \psi(x)(x')$. 写像 $\alpha \colon X \to Y$ を

$$\alpha = \tau \circ \varphi \circ \Delta \colon X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\tau} Y$$

により定める．ただし, $\Delta \colon X \to X \times X$ は対角線写像である．このとき $\alpha \notin \operatorname{Im} \psi$ である．実際, 任意の $a \in X$ に対し,

$$\alpha(a) = \tau(\varphi(a,a))$$
$$\psi(a)(a) = \varphi(a,a)$$

であり, τ は固定点を持たないので $\alpha(a) \neq \psi(a)(a)$. よって $\alpha \neq \psi(a)$. □

この証明における論法（α の構成）を**対角線論法 (diagonal argument)** という. 定理 1.8.26 の証明は本質的にはこの定理 1.10.26 において $Y = [2]$, $\tau = \neg\colon [2] \to [2]$ としたものである.

問 65. $X \neq \emptyset$, $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ を写像とし, $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ とおく.

また, 定理 1.10.26 の証明の構成を $\chi f\colon X \to \mathcal{P}(X) \underset{\chi}{\xrightarrow{\cong}} 2^X$ と $\neg\colon [2] \to [2]$ に対し適用して得られる写像

$$\alpha = \neg \circ \Psi(\chi f) \circ \Delta\colon X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{\Psi(\chi f)} [2] \xrightarrow{\neg} [2]$$

を考える.

このとき $\chi_A = \alpha$ であることを示せ.

注意 . $Y \neq \emptyset$ であるとき, Y が固定点を持たない自己写像を持つことと, Y が二つ以上元を含むことは同値であることに注意すれば, 定理 1.10.26 は定理 1.8.26 から示すことができる.

問 66. $Y \neq \emptyset$ とする. Y が固定点を持たない自己写像を持つことと, Y が二つ以上元を含むことは同値である

1.10.8　数学的帰納法と有限集合の濃度

有限集合の元の個数といった当たり前に見える事柄に関する議論は, 何を前提に話をするのかをはっきりさせないと, 何をやっているのかよく分からなくなりがちである.

個数を数えるので自然数（と 0）を用いる. そこで, 我々が前提とするのは自然数の性質, とくに数学的帰納法, すなわち次の公理である.

公理 1.10.27 (Peano)**.** 集合 $\mathbb{N}_0$ は次の性質をみたす.

1. $0 \in \mathbb{N}_0$.
2. 次の条件をみたす写像 $\mathrm{suc}\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ が存在する.
   (i) $0 \notin \operatorname{Im}\mathrm{suc}$.
   (ii) suc は単射.
   (iii) $N \subset \mathbb{N}_0$ が $0 \in N$ かつ $\mathrm{suc}(N) \subset N$ をみたせば, $N = \mathbb{N}_0$.

注意．$n \in \mathbb{N}_0$ に対し, $\mathrm{suc}(n)$ を $n+1$ と書く.

普通, この公理をみたす集合の存在を仮定, あるいは別の（より基本的と考えられる）公理のもと, この公理をみたす集合の存在を証明し, そのような集合を $\mathbb{N}_0$ と書く. 2.(iii) を数学的帰納法の公理という.

定理 1.10.28 (数学的帰納法)**.** $P(n)$ を $\mathbb{N}_0$ の元に関する述語とし, 次が成り立つとする.

1. $P(0)$ は真.
2. $P(n)$ が真ならば $P(n+1)$ も真.

このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対し, $P(n)$ は真である.

証明. $P(n)$ が真となるような $n \in \mathbb{N}_0$ 全体を N とする.

$$N = \{n \in \mathbb{N}_0 \mid P(n)\}$$

条件 1 より $0 \in N$ である. また条件 2 は, $n \in N$ ならば $\mathrm{suc}(n) \in N$, つまり $\mathrm{suc}(N) \subset N$ であるということ. よって数学的帰納法の公理より $N = \mathbb{N}_0$. □

自然数の性質は全てこの公理 1.10.27 から導くことができる. （[5] 等参照.）例えば次が示せる.

命題 1.10.29. $\mathrm{Im}\,\mathrm{suc} = \mathbb{N}$.

$n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathrm{suc}^{-1}(n)$ を $n-1$ と書く.

定理 1.10.30. $\mathbb{N}_0$ には, $n < \mathrm{suc}(n)$（つまり $n < n+1$）が任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対し成り立つような順序がただひとつ存在する. さらに, この順序は次をみたす.

1. この順序は全順序である.
2. suc は順序を保つ. （つまり $m \leq n$ ならば $m+1 \leq n+1$ ということ.）
3. $m < n$ ならば $\mathrm{suc}(m) \leq n$. （つまり $m < n$ なら $m+1 \leq n$ ということ.）
   とくに m の直後の元は $m+1$ であり, m の直前の元は $m-1$ である.
4. $0 = \min \mathbb{N}_0$.

問 67. 全順序集合においては, 直後（直前）の元は, 存在すれば一意的.

以下の議論では, これら命題 1.10.29, 定理 1.10.30 は断りなく用いる.

補題 1.10.31.

1. $[0] = \emptyset$.
2. $[n+1] = [n] \cup \{n\}$.
3. $\min[n+1] = 0$, $\max[n+1] = n$.

証明. 1. $0 = \min \mathbb{N}_0$ だから.

2. $m < n+1 \Leftrightarrow m \leq n$ が成り立つ. $\Leftarrow$ は $n < n+1$ より明らか. $\Rightarrow$ は, $m > n$ ならば $m \geq n+1$ であり, $\mathbb{N}_0$ の順序は全順序だから. よって $[n+1] = [n] \cup \{n\}$.

3. $0 = \min \mathbb{N}_0$ ゆえ $0 \leq n+1$. $n+1 \in \operatorname{Im} \operatorname{suc} \not\ni 0$ ゆえ $0 \neq n+1$. よって $0 < n+1$ だから $0 \in [n+1]$. よって $0 = \min[n+1]$.
   $n < n+1$ ゆえ $n \in [n+1]$. また $m \in [n+1]$ なら $m < n+1$ ゆえ $m \leq n$. よって $n = \max[n+1]$.

□

補題 *1.8.4* の証明. n に関する帰納法. $n = 0$ のときは $[0] = \emptyset$ だから $A = \emptyset \cong [0]$ で O.K.

n で成立するとして, $A \subset [n+1] = \{0, \ldots, n\} = [n] \cup \{n\}$ のときを考える. $n \notin A$ のときは $A \subset [n]$ なので帰納法の仮定より O.K. $n \in A$ のときは $A \setminus \{n\} \subset [n]$ だから, 帰納法の仮定より, ある $m \in \mathbb{N}_0$, $m \leq n$ が存在して順序同型 $f\colon A \setminus \{n\} \to [m] = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ が存在する. $m \leq n$ なので $m+1 \leq n+1$ である. 写像 $\bar{f}\colon A \to [m+1] = [m] \cup \{m\}$ を

$$\bar{f}(l) = \begin{cases} f(l), & l \neq n \\ m, & l = n \end{cases}$$

で定めると明らかに $\bar{f}$ は順序同型である. □

系 1.10.32. $n \in \mathbb{N}_0$ とする. 任意の $\emptyset \neq A \subset [n]$ に対し, $\min A$ が存在する.

すなわち, 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対し, $[n]$ は整列集合である.

証明. $\emptyset \neq A \subset [n]$ とする. ある $m \leq n$ と順序同型 $g\colon [m] \to A$ が存在する. $A \neq \emptyset$ ゆえ $m > 0$ で $0 = \min[m]$. 明らかに $g(0) = \min A$. □

系 1.10.33. 任意の $n \in \mathbb{N}_0$ に対し, $[n]$ からの全射は切断を持つ.

さらに次が分かる.

定理 1.10.34. $\mathbb{N}_0$ に数の大小関係で順序をいれたものは整列集合である.

証明. $A \subset \mathbb{N}_0$, $A \neq \emptyset$ とする. $n \in A$ を一つとる. $A_n := \{a \in A \mid a \leq n\} = A \cap [n+1]$ とおけば $A_n \subset [n+1]$ であり, $n \in A_n$ なので $A_n \neq \emptyset$. よって系 1.10.32 より A_n には最小元が存在する. $m := \min A_n$ とおくと $m = \min A$ である. 実際, $m \in A_n \subset A$ ゆえ $m \in A$. $a \in A$ とする. $a \leq n$ であれば, $a \in A_n$ だから $a \geq \min A_n = m$. $a \geq n$ であれば, $n \in A_n$ に注意すると, $a \geq n \geq \min A_n = m$ ゆえ $a \geq m$. □

注意．上の証明では $\mathbb{N}_0$ の順序が全順序であることを用いている（どこで?）．話の持って行き方によっては, 整列順序であることを示しておいて, それから全順序であることを導く場合もある.

補題 *1.8.5* の証明．1,2 とも $\Leftarrow$ は包含写像を考えれば明らか.

$\Rightarrow$ を示す.

1. n に関する帰納法で示そう．$n = 0$ のときは $[0] = \emptyset$ だから写像 $f\colon [m] \to [0]$ が存在するのは $[m] = \emptyset$, すなわち $m = 0$ のときのみ．よって成立.
   n で成立すると仮定する．$f\colon [m] \to [n+1] = [n] \cup \{n\}$ を単射とする．$n \notin f([m])$ の場合．$f([m]) \subset [n]$ なので f は $[m] \xrightarrow{f} [n] \hookrightarrow [n+1]$ と分解する．帰納法の仮定より $m \leq n$．よって $m \leq n+1$ となり O.K. $n \in f([m])$ の場合．このとき $f([m]) \neq \emptyset$ ゆえ, $[m] \neq \emptyset$ だから $m > 0$．$l \in [m]$, $f(l) = n$ とする．$\sigma\colon [m] \to [m]$ を l と $m-1$ の互換, すなわち
   $$\sigma(k) = \begin{cases} m-1, & k = l \\ l, & k = m-1 \\ k, & k \neq l, m-1 \end{cases}$$
   で与えられる全単射とし, 合成 $f'\colon [m-1] \hookrightarrow [m] \xrightarrow{\sigma} [m] \xrightarrow{f} [n+1]$ を考える．f' は単射の合成だから単射であり, $n \notin f'([m-1])$ である．よって前半の議論から $m - 1 \leq n$ となり, $m \leq n+1$ である.
2. 単射 $f\colon [m] \to [n]$ が全射ではないとする．$l \in [n] \setminus f([m])$ を一つとる．写像 $f'\colon [m+1] = \{0, \ldots, m\} \to [n]$ を
   $$f'(k) = \begin{cases} f(k), & k < m \\ l, & k = m \end{cases}$$
   で定めれば明らかに f は単射．よって 1 より $m + 1 \leq n$ ゆえ $m < n$.

□

系 *1.8.6* の証明．$\Leftarrow$ はやさしい．（$m > n$ のときは単射 $[m] \to [n]$ は存在しないことに注意.）

$\Rightarrow$ を示す．$f\colon [m] \to [n]$ を全射とする．命題 1.9.15 より, f は切断 $g\colon [n] \to [m]$ を持つ．$f \circ g = \mathrm{id}_{[n]}$ であるから g は単射．よって $n \leq m$.

さらに f が単射でなければ g は全射ではない．よってこのときは $n < m$.（g が全（単）射なら f も（全）単射となる, あるいは g の作り方から.）

□

参考文献

[1] F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. *Sets for mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[2] 齋藤正彦. 数学の基礎—集合・数・位相. 東京大学出版会, 2002.

[3] 琉球大学理学部数理科学科編. 位相空間問題集. `http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/`.

[4] 静間良次. 位相. サイエンス社, 1998.

[5] 松村英之. 集合論入門 (基礎数学シリーズ). 朝倉書店, 復刊, 3 2005.

[6] 飯高茂（編）. 微積分と集合 そのまま使える答えの書き方. 講談社, 1999.

[7] 森田茂之. 講座 数学の考え方〈8〉集合と位相空間. 朝倉書店, 6 2002.

[8] 小林貞一, 逸見豊. 集合と位相空間の基礎・基本 (理工系数学の基礎・基本). 牧野書店, 12 2010.

索引