幾何学序論講義ノート

佃 修一

2014 年 4 月 1 日

凡例

- $\mathbb{N}$：自然数全体
  $\mathbb{Z}$：整数全体
  $\mathbb{Q}$：有理数全体
  $\mathbb{R}$：実数全体
  $\mathbb{C}$：複素数全体
  これらには, 必要ならば, 特にことわらないかぎり, 通常の加法, 乗法, 距離および（$\mathbb{C}$ を除いては）順序を与えるものとする.
- $\mathbb{R}^n$ の距離あるいは位相は, 特にことわらないかぎり, ユークリッド距離により定まるものとする.
- $A \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B$ は, 左辺 A を右辺 B で定義することを意味する.
- $A \Rightarrow B$ は, A が成り立つならば B も成り立つことを意味する.（2011 年度の）数学序論の講義での使い方とは意味が違うことに注意せよ. 数学序論でいうところの「$A \Rightarrow B$ が真である」ことを, この講義では $A \Rightarrow B$ と表す.

目次

第 1 章

集合

1.1 論理式

数学序論で学んだ論理式を復習する.

Definition 1.1.1.

1. 二つの命題 p, q は, その真偽が一致するとき論理同値であるといって, $p \equiv q$ と書く.
2. 同じ変数をもつ二つの述語 P, Q は, 変数にどのような値を代入しても, その真偽が一致するとき論理同値であるといって, $P \equiv Q$ と書く.

1.1.1 命題と論理結合子

与えられた 1 つあるいは 2 つの命題から新しい命題を作ることを考える. その際, 出来た命題の真偽はもとの命題の真偽だけで定まるように作りたい. 以下 1 は真を, 0 は偽をあらわす.

1 つの命題 p の真偽に応じて真偽を定める方法は次の $2^2 = 4$ 通り. (1) は p の真偽によ

p	(1)	(2)	(3)	(4)
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

表 1.1

らず真, (4) は p の真偽によらず偽, (2) は p と同じだから新たに名前をつける意味がありそうなのは (3) である.

Definition 1.1.2. 次の真理表で真偽が定まる命題 $\neg p$ を p の否定 (negation) という.

p	$\neg p$
1	0
0	1

すなわち, $\neg p$ は p が真のとき偽, p が偽のとき真である.
$\neg p$ は普通「p でない」と読む.

2 つの命題 p, q の真偽に応じて真偽を定める方法は次の $2^4 = 16$ 通り.

p	q	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
p	q	$(8')$	$(7')$	$(6')$	$(5')$	$(4')$	$(3')$	$(2')$	$(1')$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0

表 1.2

上の段の (n) と下の段の (n') は互いに他の否定だから上の段だけ考えよう. (1) は常に真, (4) は p の真偽と同じ, (6) は q の真偽と同じ, (3) と (5) は p, q を入れかえたものだから新たに名前をつける意味がありそうなのは (2), (5),(7),(8) の 4 つ.

Definition 1.1.3. 次の真理表を考える.

p	q	(2)	(5)	(7)	(8)
1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0

1. (2) で真偽が定まる命題を $p \vee q$ とかき, p と q の論理和 (disjunction) あるいは選言(せんげん)という.

$p \vee q$ は普通「p または q」と読む.

2. (8) で真偽が定まる命題を $p \wedge q$ とかき, p と q の論理積 (conjunction) あるいは連言(れんげん)という.

   $p \wedge q$ は普通「p かつ q」と読む.

3. (5) で真偽が定まる命題を $p \to q$ とかく. また記号 $\to$ を含意(がんい)(implication)等とよばれる.

   $p \to q$ は普通「p ならば q」と読む.

4. (7) で真偽が定まる命題を $p \leftrightarrow q$ とかく.

   $p \leftrightarrow q$ は普通「p と q は同値」と読む.

Caution! . 数学序論の講義や今年度（２０１３年度）使っている教科書 [5] では含意をあらわす記号として「$\Rightarrow$」を用いているが, この講義では「$\to$」を用いる.

この講義では「$p \Rightarrow q$」を「$p \to q$ が真である」, すなわち, p が成り立てば q も成り立つという意味で使う.

Remark . 上で「意味がありそうなのは (2), (5),(7),(8) の４つ」と書いたが

1. 実際には他のものにも名前がついている. 例えば $(8')$ は否定論理積, NAND等とよばれ, $p|q$ といった記号であらわされる.
2. これらは互いに無関係なわけではなく, 例えば $p \leftrightarrow q$ は $\wedge$ と $\to$ を使って $(p \to q) \wedge (q \to p)$ とあらわせる.

   実は NAND だけを用いて表 1.1, 1.2 に出てくるものを全てあらわすことが出来る. 例えば $\neg p \equiv p|p$, $p \wedge q \equiv (p|q)|(p|q)$ といった具合.

Definition 1.1.4. 0 と 1 からなる集合を [2] とかく:

$$[2] := \{0, 1\}.$$

Def. 1.1.2, 1.1.3 の真理表をみると, $\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow$ は集合 [2] 上に（足し算や掛け算のような）二項演算 (binary operation) を, $\neg$ は単項演算 (unary operation) を定めているとみることができる. $0 \vee 1 = 1$ とか $\neg 0 = 1$ といった具合.

$p \vee q$

$p\backslash q$	0	1
0	0	1
1	1	1

$p \wedge q$

$p\backslash q$	0	1
0	0	0
1	0	1

$p \to q$

$p\backslash q$	0	1
0	1	1
1	0	1

$p \leftrightarrow q$

$p\backslash q$	0	1
0	1	0
1	0	1

あきらかに $p \to q$ を除いて p と q に関して対称である.

Theorem 1.1.5. p, q, r を命題とする. 次が成り立つ.

1. （交換法則, commutative law）
   (i) $p \vee q \equiv q \vee p$.
   (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
2. （結合法則, associative law）
   (i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.
   (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.
3. （分配法則, distributive law）
   (i) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
   (ii) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
4. $\neg(\neg p) \equiv p$.
5. (i) $p \vee (\neg p) \equiv 1$.
   (ii) $p \wedge (\neg p) \equiv 0$.
6. （ド・モルガンの法則, de Morgan's law）
   (i) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.
   (ii) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.

Theorem 1.1.6. p, q を命題とする. 次が成り立つ.

1. $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$.
2. $p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p)$.
3. $\neg(p \to q) \equiv p \wedge (\neg q)$.

Proof. いずれも真理表を書けばわかる.
なお, Thm. 1.1.5.6 については, 4 を使えば, 一方を示せば他方はすぐわかる.
また Thm. 1.1.6.2,3 は, Thm. 1.1.5 と Thm. 1.1.6.1 を使って示すこともできる. □

Caution! . 間違える人がよくいるが, $p \to q$ の否定は $p \wedge (\neg q)$ であって, $p \to (\neg q)$ ではない.

Remark . すぐわかるように $\to$ は可換ではなく $(p \to q \not\equiv q \to p)$, 結合的でもない $(p \to (q \to r) \not\equiv (p \to q) \to r)$. Thm. 1.1.5 と Thm. 1.1.6.1 を使えば $\to$ を含む式をいろいろと変形できる.

Remark . $p, q, r \in [2] = \{0, 1\}$ とすると Thm. 1.1.5 と Thm. 1.1.6 の式で $\equiv$ を $=$ としたものが成立する.

1.1.2 述語と量化子

「x は偶数である」等のように変数 x を含む文で, x に値を代入すると真偽が判定できるものを述語 (predicate) というのであった. Thm. 1.1.5, Thm. 1.1.6 は述語に対しても同様に成り立つ.

Theorem 1.1.7. p, q, r を述語とする. 次が成り立つ.

1. (交換法則)
   (i) $p \vee q \equiv q \vee p$.
   (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.
2. (結合法則)
   (i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.
   (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.
3. (分配法則)
   (i) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.
   (ii) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.
4. $\neg(\neg p) \equiv p$.
5. (i) $p \vee (\neg p) \equiv 1$.
   (ii) $p \wedge (\neg p) \equiv 0$.
6. (ド・モルガン (de Morgan) の法則)
   (i) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.
   (ii) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.

Theorem 1.1.8. p, q を述語とする. 次が成り立つ.

1. $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$.
2. $p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p)$.
3. $\neg(p \to q) \equiv p \wedge (\neg q)$.

述語は変数に値を代入すると命題となるが, 述語から命題を作る別の方法がある. 変数 x に関する述語 $P(x)$ に対し, x に代入したときに $P(a)$ が真となるような a の量, 個数を考えてみる.

Example 1.1.9. $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に関する述語 $P(x) =$「x は偶数である」に対し以下の文章を考える.

1. $P(x)$ が真となるような $x \in \{1,2,3,4,5\}$ は 1 個である.
2. $P(x)$ が真となるような $x \in \{1,2,3,4,5\}$ は 2 個である.
3. $P(x)$ が真となるような $x \in \{1,2,3,4,5\}$ は全てである.
4. $P(x)$ が真となるような $x \in \{1,2,3,4,5\}$ はない.
5. $P(x)$ が真となるような $x \in \{1,2,3,4,5\}$ が少なくとも 1 個はある.

$P(x)$ が真となる $x \in \{1,2,3,4,5\}$, つまり $1,2,3,4,5$ のうち偶数であるのは $2,4$ の 2 個だから 1, 3, 4 は偽, 2, 5 は真である. 特にこれらの文章は全て命題である.

このように述語 $P(x)$ に対し, それが真となるような x の量を指定することで命題を作ることができる. 指定する量として最も基本的であるのは「全て」と「無い」であろう. 実際に数学で使う際には「無い」よりはその否定である「(少なくとも 1 個は) ある」の方が使いよい. この「全て」と「ある」については記号が用意されている.

Definition 1.1.10. $P(x)$ を変数 x に関する述語とする.

1. 「全ての x に対して $P(x)$ が真である」という命題を
$$\forall x : P(x)$$
と表し, 普通「任意の x に対して, $P(x)$ が成り立つ」とか「任意の x に対して, $P(x)$」と読む.
2. 「$P(x)$ が真であるような x が少なくとも 1 個はある」という命題を
$$\exists x : P(x)$$
と表し, 普通「ある x が存在して, $P(x)$ が成り立つ」とか「ある x が存在して, $P(x)$」と読む.

Remark . このように述語が真となるような変数の量を指定する記号を量化子(りょうかし)(quantifier) という. $\forall$ は全称量化子(ぜんしょうりょうかし)(universal quantifier), あるいは全称記号と呼ばれる. $\exists$ は存在量化子(そんざいりょうかし)(existential quantifier), あるいは存在記号と呼ばれる.

Definition 1.1.11. $P(x)$, $Q(x)$ を変数 x に関する述語とする.

1. $\forall x : P(x) \to Q(x)$ という命題を
$$\forall x(P(x)) : Q(x)$$
とかくことがある. ふつうこれを「$P(x)$ が成り立つような任意の x に対して, $Q(x)$」等と読む.

2. $\exists x : P(x) \land Q(x)$ という命題を

$$\exists x(P(x)) : Q(x)$$

とかくことがある．ふつうこれを「$P(x)$ が成り立つようなある x が存在して，$Q(x)$」等と読む．

Remark . 変数が 2 つ以上ある述語についても同様なことを繰り返して命題を作ることができるが，記法は次の規約によることとする．例えば $P(x, y)$ が変数 x, y に関する述語であるとき，

$$\forall y : P(x, y)$$

は変数 x に関する述語であり，

$$\forall x : (\forall y : P(x, y))$$

は命題である．この命題を

$$\forall x, \forall y : P(x, y) \quad \text{とか} \quad \forall x \forall y : P(x, y)$$

等とかく．

量化子 $\forall$, $\exists$ の順番について次が成り立つ．

Theorem 1.1.12. *$P(x, y)$ を変数 x, y に関する述語とする．次が成り立つ．*

1. $\forall x, \forall y : P(x, y) \equiv \forall y, \forall x : P(x, y)$.
2. $\exists x, \exists y : P(x, y) \equiv \exists y, \exists x : P(x, y)$.

Proof. 意味を考えれば明らか． □

Caution! . 一般に $\forall x, \exists y : P(x, y) \not\equiv \exists y, \forall x : P(x, y)$ である．

量化子 $\forall$, $\exists$ を含む命題の否定について次が成り立つ．

Theorem 1.1.13. *$P(x), Q(x)$ を変数 x に関する述語とする．次が成り立つ．*

1. $\neg\bigl(\forall x : P(x)\bigr) \equiv \exists x : \neg P(x)$.
2. $\neg\bigl(\exists x : P(x)\bigr) \equiv \forall x : \neg P(x)$.
3. $\neg\bigl(\forall x(P(x)) : Q(x)\bigr) \equiv \exists x(P(x)) : \neg Q(x)$.
4. $\neg\bigl(\exists x(P(x)) : Q(x)\bigr) \equiv \forall x(P(x)) : \neg Q(x)$.

Proof. 1, 2 は意味を考えれば明らか．3 も意味を考えればわかると思うが，少し形式的にやると，

$$
\begin{aligned}
\neg\bigl(\forall x(P(x)) : Q(x)\bigr) &= \neg\bigl(\forall x : P(x) \to Q(x)\bigr) \\
&\equiv \exists x : \neg\bigl(P(x) \to Q(x)\bigr) \\
&\equiv \exists x : P(x) \wedge \neg Q(x) \\
&\equiv \exists x(P(x)) : \neg Q(x).
\end{aligned}
$$

4 も同様. □

量化子 $\forall$, $\exists$ と論理結合子 $\vee$, $\wedge$, $\to$ の関係については数学序論のノート (http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/joron-note.html, 2012 年 2 月 15 日版 §12) に少しまとめてあるが, この後すぐ使うであろうもの, 注意が必要なものをいくつか挙げておく.

Theorem 1.1.14. $P(x)$, $Q(x)$ を変数 x に関する述語, r を命題（あるいは変数 x を含まない述語）とする. 次が成り立つ.

1. $\forall x : r \vee Q(x) \equiv r \vee (\forall x : Q(x))$.
2. $\exists x : r \wedge Q(x) \equiv r \wedge (\exists x : Q(x))$.
3. $\forall x(P(x)) : r \vee Q(x) \equiv r \vee (\forall x(P(x)) : Q(x))$.
4. $\exists x(P(x)) : r \wedge Q(x) \equiv r \wedge (\exists x(P(x)) : Q(x))$.
5. $\forall x : P(x) \wedge Q(x) \equiv (\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$.
6. $\exists x : P(x) \vee Q(x) \equiv (\exists x : P(x)) \vee (\exists x : Q(x))$.

Proof. 1, 2 は意味を考える, あるいは r の真偽で場合分けして両辺の真偽を比べる等すればよい. 3 も同様に考えてもよいが,

$$p \to (r \vee q) \equiv (\neg p) \vee (r \vee q) \equiv r \vee ((\neg p) \vee q) \equiv r \vee (p \to q)$$

に注意すれば 1 を使って

$$
\begin{aligned}
\forall x(P(x)) : r \vee Q(x) &= \forall x : P(x) \to (r \vee Q(x)) \\
&\equiv \forall x : r \vee (P(x) \to Q(x)) \\
&\equiv r \vee (\forall x : P(x) \to Q(x)) \\
&= r \vee (\forall x(P(x)) : Q(x))\,.
\end{aligned}
$$

4 も同様だがもう少しやさしい. 5,6 も意味を考える, あるいは両辺の真偽を比べる等すればよい. □

Caution! . 上の 5,6 で $\forall$ と $\exists$ を入れかえたものは一般には正しくない.

1.2　集合

集合の記法等の復習もかねてラッセルのパラドックス (Russell's paradox) を紹介しよう.

Definition 1.2.1.

1. 我々の思考の対象で条件のはっきりしたものの集まりを集合 (set) とよぶ.
2. S を集合とするとき, S を構成する個々のものを S の元(げん)または要素 (element) という.
   - x が S の元であることを,「x が S に属する」,「x が S に含まれる」,「S が x を含む」 等といって, $x \in S$ または $S \ni x$ と表す.
   - $\neg(x \in S)$ であること, すなわち x が S の元でないことを,「x は S に属さない」,「x は S に含まれない」,「S は x を含まない」等といって, $x \notin S$ または $S \not\ni x$ と表す.

Definition 1.2.2. A, B を集合とする.

1. A は B の部分集合 (subset) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A の任意の元 x に対して, $x \in B$ である.
   論理式を使って書けば, $\forall x : x \in A \to x \in B$ (別の書き方をすれば $\forall x \in A : x \in B$) が真であるということ.
   このとき, $A \subset B$ または $B \supset A$ と表す.
2. 集合 A と集合 B は等しい $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $A \subset B$ かつ $B \subset A$ である.
   このとき, $A = B$ と書く.

Definition 1.2.3. 集合の表し方.

1. 外延的(がいえんてき)(extensional) 記法
   集合の元をすべて列挙し, それを括弧 $\{\}$ でくくる.
   元が無限個ある場合, あるいは有限個でも全てを列挙出来ない場合, 誤解を生じるおそれが無ければ $\ldots$ を使う.
   例. $\{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$ (10000 以下の自然数全体のなす集合)
2. 内延的(ないえんてき)(intensional) 記法
   何某かの条件をみたすもの全体として集合を表す方法. $P(x)$ を変数 x に関する述語とする. $P(x)$ が真となるようなすべての x からなる集合を $\{x \mid P(x)\}$ と表す.
   変数 x のとる値がある集合 U に制限されているとき, $P(x)$ が真となるようなすべての x (ただし $x \in U$) からなる集合を $\{x \in U \mid P(x)\}$ と表す.

例. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10000\}$ (10000 以下の自然数全体のなす集合)

Example 1.2.4 (ラッセルのパラドックス, Russell's paradox)**.** 次の集合

$$S = \{X \mid X \notin X\}$$

を考える. つまり集合 X であって, X 自身は X の元ではないようなものたちの集まりが S である. 例えば $\mathbb{N} \notin \mathbb{N}$ だから $\mathbb{N} \in S$ である. さて, S については $S \in S$ と $S \notin S$ どちらが成り立つだろうか？

$S \in S$ とすると, S の定め方から $S \notin S$ となる. $S \notin S$ とすると, S の定め方から $S \in S$ となる. すなわち S は S の元でありかつ, S の元ではないということになってしまう.

このように集合やその構成法をあまり素朴に考えていると困ったことがおきてしまう. 現在ではこれらの困難を回避するため<u>公理的集合論 (axiomatic set theory)</u> により集合をあつかうことが多い. 中でも <u>Zermelo-Fraenkel の公理系＋選択公理 (ZFC)</u> という公理系（集合をあつかうためのルール）が一般的に用いられている. （が, 他にも色々な立場, 方法がある.）ZFC については集合論の本には必ず載っているし, [4] 等にも短い解説がある. 普通の数学をやる分にはあまりこういったことを意識する必要は無いし, そういう機会も少ない. この講義では素朴な立場で集合をあつかうが, 選択公理については少しふれる.

1.3　集合の演算

数学序論で学んだ集合の演算を思い出そう.

Definition 1.3.1.

1. A, B を集合としたとき, A, B の少なくとも一方に属する要素を全部集めたものを A と B の合併集合（または和集合 (union)，結び）といって, $A \cup B$ で表す.
   つまり
   $$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$
2. A と B の両方に属する要素を全部集めたものを A と B の共通集合（または積, 交わり (intersection)）といって, $A \cap B$ で表す.
   つまり
   $$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$
   $A \cap B = \emptyset$ のとき, A と B は互いに素 (disjoint) という.
3. A に属して, B に属さない要素の全体を A から B を引いた差集合 (difference) といって, $A - B$ または $A \setminus B$ で表す.
   つまり
   $$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$
4. ある集合 X を固定して, X の部分集合についてのみ考えるとき, $X - A$ を A の（X に関する）補集合 (complement) といって A^c であらわす. すなわち
   $$A^c = \{x \in X \mid x \notin A\} = \{x \in X \mid \neg(x \in A)\}.$$
   このとき X を普遍集合 (universal set) あるいは全体集合という.

Thm. 1.1.7 から次がわかる.

Theorem 1.3.2. A, B, C を集合とする. 次が成り立つ.

1. （交換法則, commutative law）
   (i) $A \cup B = B \cup A$.
   (ii) $A \cap B = B \cap A$.
2. （結合法則, associative law）
   (i) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
   (ii) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

3. （分配法則, distributive law）
   (i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
   (ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Proof. 3(i) を示してみよう．

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{x \mid x \in A \wedge x \in B \cup C\} \\ &= \{x \mid x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)\} \\ &= \{x \mid \ (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)\} \\ &= \{x \mid \ (x \in A \cap B) \vee (x \in A \cap C)\} \\ &= (x \in A \cap B) \cup (x \in A \cap C)\,. \end{aligned}$$

他も同様である．もちろん, 下の Lem. 1.3.4 等を使って, 左辺が右辺に含まれ, 右辺が左辺に含まれるということを示してもよい． □

Theorem 1.3.3. X を全体集合, $A, B \subset X$ とする．次が成り立つ．

1. $(A^c)^c = A$.
2. (i) $A \cup A^c = X$.
   (ii) $A \cap A^c = \emptyset$.
3. （ド・モルガンの法則, de Morgan's law）
   (i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
   (ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Proof. 2(i) を示してみよう．

$$\begin{aligned} A \cup A^c &= \{x \in X \mid x \in A \vee x \in A^c\} \\ &= \{x \in X \mid x \in A \vee \neg(x \in A)\} \end{aligned}$$

$x \in A \vee \neg(x \in A)$ は常に真だから

$$= X.$$

他も同様である． □

次の補題は集合の包含関係を考えるときに基本的であり, 以降ことわりなく使う．証明は定義からほとんどあきらかである．（ただし論理式の変形で証明しようとすると結構面倒である．のでやらないほうがよいかも.）

Lemma 1.3.4. A, B, C を集合とする．次が成り立つ．

1. $A \subset B$ かつ $B \subset C \Rightarrow A \subset C$.
2. $A \subset C$ かつ $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$.
3. $A \supset C$ かつ $B \supset C \Rightarrow A \cap B \supset C$.

exercise 1. 上の 2, 3 では逆も成り立つことを示せ.

問題集． 4(1), 6, 7(1)(2)(3)(4)

Definition 1.3.5. X を集合とする．X の部分集合の全てを要素としてもつ集合を X の冪（べき）集合 (power set) といって $\mathcal{P}(X)$ で表す．つまり

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

定義からあきらかに次が成り立つ.

Theorem 1.3.6.
1. $A \subset X \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(X)$.
2. $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$.
3. $X \in \mathcal{P}(X)$.

Remark．この講義では記号 $\Leftrightarrow$ は左辺と右辺が同値であることを表す．すなわち, 左辺が成り立てば右辺も成り立ち, 右辺が成り立てば左辺も成り立つということ．言い換えれば「左辺 $\leftrightarrow$ 右辺」という命題が真であるということ.

Example 1.3.7.
1. $\mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.
2. $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.
3. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. 右辺は空集合ではない．空集合という元を 1 つもつ集合である.

exercise 2. $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ を求めよ.

Definition 1.3.8. 2 つの対象 a, b に対し, それを順に並べて括弧でくくったもの (a,b) を a と b の順序対（じゅんじょつい）(ordered pair) という.

2 つの順序対 $(a,b), (a',b')$ は, $a = a'$ かつ $b = b'$ であるときに等しいといって, $(a,b) = (a',b')$ と書く.

Remark．2 つの対象からなる集合 $\{a,b\}$ については, $\{a,b\} = \{b,a\}$ である．一方, 順序対の場合, $a \neq b$ であれば, $(a,b) \neq (b,a)$ である.

Remark．集合論では a と b の順序対を $(a,b) := \{\{a\},\{a,b\}\}$ により定義することが多い.

Definition 1.3.9. X, Y を集合とする．次で与えられる集合 $X \times Y$ を X と Y のデカ

ルト積 (Cartesian product) という．デカルト積のことを直積ということも多い.

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

$X = Y$ のとき, $X \times X$ を X^2 と書くことが多い.

Example 1.3.10.

$$\begin{aligned}\{1,2,3\} \times \{1,2,3,4\} = \big\{&(1,1),(2,1),(3,1),\\ &(1,2),(2,2),(3,2),\\ &(1,3),(2,3),(3,3),\\ &(1,4),(2,4),(3,4)\big\}\end{aligned}$$

Example 1.3.11. $X \times \emptyset = \emptyset = \emptyset \times X$. 実際, $y \in \emptyset$ となる y は無いので, $x \in X \wedge y \in \emptyset$ は常に偽.

３つ以上の集合のデカルト積も考えることが出来る.

Definition 1.3.12. $n \in \mathbb{N}$ とし, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ を集合とする.

$(X_1 \times X_2) \times X_3$ を, $X_1 \times X_2 \times X_3$ と書く．また, $X_1 \times X_2 \times X_3$ の元は, $((x_1, x_2), x_3)$ とは書かずに, (x_1, x_2, x_3) と書く.

より一般に, 帰納的に

$$X_1 \times \cdots \times X_n := (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$$

と定める．また, $X_1 \times \cdots \times X_n$ の元は $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ と書く.

$X_1 = \cdots = X_n = X$ であるとき, $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n\text{ 個}}$ を X^n と書くことが多い.

exercise 3. $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$ とする．次を適当に図示せよ.

1. $I \times I$.
2. $S^1 \times I$.
3. $S^1 \times S^1$.
4. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

問題集． 13, 14

1.4　関係と写像

1.4.1　関係

Definition 1.4.1. X, Y を集合とする.

R が X と Y の間の二項関係 (binary relation) である

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ R が $X \times Y$ の部分集合である.

また, $(x, y) \in R$ であるとき, xRy と書く.

特に誤解が生じなければ二項関係のことを単に関係 (relation) という.

Example 1.4.2. $X = Y = \mathbb{R}$ とする.

1. $$\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$
   とすると, $x\Delta y \Leftrightarrow x = y$.
2. $$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \leq y\right\} \subset \mathbb{R}^2$$
   とすると, $xLy \Leftrightarrow x \leq y$.
3. $$\Gamma = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$
   とすると, $x\Gamma y \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

1.4.2　写像

例 1.4.2 の最後の Γ は, 関数 $f(x) = 2x + 1$ のグラフである. 一般に関数が与えられるとそのグラフを作れるが, 逆にグラフが分かればもとの関数も分かる. そういう意味で, グラフを考えることと関数を考えることは同じである. 集合論的には, グラフの方が関数の本体であると考える. (のではあるけれど, 大抵の人にとってはそのように考えて物事が分かりやすくなるわけでもないので, 今までどおり X の各元それぞれに y の元をただひとつ対応させる規則と思ってよい.)

Definition 1.4.3. X, Y を集合とする.

f が X から Y への写像 (map) である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\begin{cases}1. & f \text{ は } X \text{ と } Y \text{ の間の関係である.}\\ 2. & \text{任意の } x \in X \text{ に対し, ある } y \in Y \text{ がただひとつ存在して, } (x,y) \in f \text{ となる.}\end{cases}$$

f が X から Y への写像であることを, $f\colon X \to Y$ あるいは $X \xrightarrow{f} Y$ 等と表し, X を f の定義域 (domain) あるいは始域, source等という. Y に名前をつけてよぶことは少ないが, 終域, codomain, target等という.

f を $X \times Y$ の部分集合と思ったとき, その部分集合を写像 f のグラフ (graph) という. 同じ記号を使うとややこしいので $f\colon X \to Y$ のグラフを Γ_f 等と書く.

また, $(x,y) \in \Gamma_f$ であるとき, y を $f(x)$ と書き, x の f による像 (image) という: $y = f(x) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x,y) \in \Gamma_f$. あきらかに $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$ である.

Remark . f を X から Y への写像とする. 定義より, $(x,y),(x,y') \in \Gamma_f$ ならば $y = y'$ である. したがって, 例 1.4.2.2 の L は写像ではない. 残りの 2 つは写像である.

Definition 1.4.4. $f,g\colon X \to Y$ を写像とする. 任意の $x \in X$ に対し $f(x) = g(x)$ となるとき, 写像 f と g は等しいといって $f = g$ と書く.

Remark . $f = g \Leftrightarrow \Gamma_f = \Gamma_g$ である.

Example 1.4.5. 写像 $f,g\colon \{0,1\} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ により定めると, $f = g$ である.

Example 1.4.6. X を集合とする.

1. 空集合 $\emptyset$ から X への写像がただ 1 つ存在する.
   $X \neq \emptyset$ であれば, X から $\emptyset$ への写像は存在しない.
2. 1 点からなる集合 $[1] = \{0\}$ を考える.
   X から $[1]$ への写像がただ 1 つ存在する.
   $[1]$ から X への写像を定めることと, X の元を 1 つ指定することは同じことである. もちろん, これらのことは $\{0\}$ に特有の性質ではなく, 元の個数が 1 個である集合全てに対して成り立つ. 元の個数が 1 個である集合を（そのまんまだが）1 元集合 (singleton) という.
   0 を $x \in X$ に移す $[1]$ から X への写像を $x\colon [1] \to X$ と書くことがある.

Definition 1.4.7. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする. このとき $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ により定まる写像 $g \circ f\colon X \to Z$ を f と g の合成 (composition) あるいは合成写像 (composite map) という. $g \circ f$ を gf と略記することもある.

Definition 1.4.8. 1. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon X \to Z$ を写像とする. $h = gf$ で

あるとき次の図式は可換 (commutative) である, あるいは可換図式 (commutative diagram) であるという：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} .$$

2. $f_i\colon X \to Y_i$, $g_i\colon Y_i \to Z$ （$i = 1, 2$）を写像とする．$g_1 f_1 = g_2 f_2$ であるとき次の図式は可換 (commutative) である, あるいは可換図式 (commutative diagram) であるという：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"'] & Y_1 \arrow[d, "g_1"] \\ Y_2 \arrow[r, "g_2"'] & Z. \end{tikzcd}$$

Example 1.4.9. 写像 $f\colon X \to Y$ は, ある $y_0 \in Y$ が存在して, 任意の $x \in X$ に対し, $f(x) = y_0$ となるとき, （y_0 に値をとる）定値写像 (constant map) という．

写像 $f\colon X \to Y$ が定値写像であることと, ある $y_0 \in Y$ が存在して, 次の図式が可換となることは同値である：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & {[1]} \arrow[ur, "y_0"'] & \end{tikzcd} .$$

例えば, $c \in \mathbb{R}$ としたとき, $f(x) = c$ で定義される定数関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は, c に値をとる定値写像である．

Remark . 任意の $x, x' \in X$ に対し $f(x) = f(x')$ であるときに定値写像とする流儀もある．二つの定義は $X = Y = \emptyset$ の場合に（のみ）異なる．

Definition 1.4.10. 集合 X の各要素をそれ自身にうつす X から X への写像を X の恒等写像 (identity map) という．恒等写像を id_X や 1_X といった記号で表すことが多い．

$$\mathrm{id}_X\colon X \to X,$$
$$\mathrm{id}_X(x) = x.$$

恒等写像のグラフは対角線集合 (diagonal set) である：

$$\Gamma_{\mathrm{id}_X} = \{(x, x) \mid x \in X\} \subset X \times X.$$

Proposition 1.4.11. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ を写像とする．このとき次が成り立つ．

1. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
2. $f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$.

Proof. あきらか. □

exercise* 4. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ を写像とする.

1. 合成 gf のグラフ Γ_{gf} はどのような集合か？
2. $h(gf) = (hg)f$ となることをグラフを用いて説明せよ.

Definition 1.4.12. X を集合, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. A の要素 $a \in A$ を X の要素 $a \in X$ と見ることにより得られる A から X への写像を包含写像 (inclusion map) という. つまり $i\colon A \to X$ を包含写像とすると $i(a) = a$.
   また, $i\colon A \to X$ が包含写像であるとき, $i\colon A \hookrightarrow X$ と書くこともある.
2. $f\colon X \to Y$ を写像とする. 包含写像 $i\colon A \to X$ と f の合成 $f \circ i$ を f の A への制限 (restriction) といい, $f|_A$, $f|A$ 等と表す：

$$f|_A = f \circ i\colon A \to Y.$$

Definition 1.4.13. $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. X の部分集合 A に対して, Y の部分集合

$$\{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}$$

   を, 集合 A の f による像 (image) といって $f(A)$ で表す.
2. $f(X)$ を f の像 (image) あるいは値域 (range) といい $\mathrm{Im}\, f$ 等と書く.
3. Y の部分集合 B に対して, X の部分集合

$$\{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

   を f による B の逆像 (inverse image) といい, $f^{-1}(B)$ で表す.

Proposition 1.4.14. $f\colon X \to Y$ を写像, $A \subset X$, $B \subset Y$ とする. このとき次が成り立つ. $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.

Proof. 定義よりあきらか. □

Definition 1.4.15. $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. f が X から Y への全射 (surjection) または上への写像 (onto map) である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y.$
   言い換えれば f が全射であるとは, $f(X) = Y$ ということ.
2. f が単射 (injection) または 1 対 1(one-to-one) である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in X(x_1 \neq x_2) : f(x_1) \neq f(x_2).$
3. f が全単射 (bijection) である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f は全射かつ単射である.
   X から Y への全単射が存在するとき X と Y は対等 (equinumerous,equipotent) という.
   この講義では（少なくとも第 1 章の間はおそらく）X と Y が対等であるとき $X \cong Y$ と書く.

Definition 1.4.16. 写像 $f\colon X \to Y$ が単射のとき, 各 $y \in f(X)$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ がただひとつ存在する. この x を $f^{-1}(y)$ と書くと f^{-1} は $f(X)$ から X への写像となる. これを f の逆写像 (inverse map) という.

特に f が全単射であれば, f^{-1} は Y から X への写像になる.

Proposition 1.4.17. 写像 $f\colon X \to Y$ が全単射 $\Leftrightarrow$ ある写像 $g\colon Y \to X$ が存在して, $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたす.

Proof. 問題集 73(1). □

Proposition 1.4.18. 任意の写像は全射と単射の合成に分解される. すなわち, 任意の写像 $f\colon X \to Y$ に対し, ある全射 $p\colon X \to Z$ とある単射 $i\colon Z \to Y$ が存在して, $f = i \circ p$ と書ける. さらに, この分解は次の意味で一意的である. $f\colon X \xrightarrow{q} W \xrightarrow{j} Y$（$q$ は全射, j は単射）をもうひとつの分解とすると, 次の図式を可換にするような全単射 $g\colon Z \underset{g}{\overset{\cong}{\to}} W$ がただひとつ存在する：

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, dotted, "\exists g"', "\cong"] & \\
X \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \\
& W \arrow[ur, "j"'] &
\end{tikzcd}.$$

Proof. 分解できることを示す. $Z = f(X)$ とおき, 写像 f を X から $Z = f(X)$ への写像とみたものを p, 包含写像を $i\colon Z = f(X) \hookrightarrow Y$ とすれば, あきらかに p は全射, i は単射で $f = i \circ p$ である.

分解の一意性を示そう. $f = ip = jq$, p, q は全射, i, j は単射とする. $f = ip$ かつ p

は全射であるから $\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Im}\, f$ であり，$i\colon Z \to \mathrm{Im}\, f$ は全単射である．同様にして $j\colon W \to \mathrm{Im}\, f$ も全単射である．$g = j^{-1}i$ とおけばよい．また j が単射であるから，$jg = i$ となるような $g\colon Z \to W$ は一意的である（問題集 73(2)）．

□

Remark . $f\colon X \to Y$ を写像とし $B \subset Y$ を $f(X) \subset B$ であるような部分集合とする．このとき f は X から B への写像を定める．制限のように適当な記号があればよいのだが，習慣としてしばしばこれを同じ記号で $f\colon X \to B$ と表す．

exercise 5. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする．f が全射であれば $\mathrm{Im}\, g \circ f = \mathrm{Im}\, g$ であることを示せ．

問題集 . 15(1)(2)(3)(4), 16(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8), 17(1)(2), 18(1)(2)(3), 19(1)(2)(3)(4), 25,26, 73(1)(2)(3)

1.4.3　デカルト積と写像

この節 §1.4.3 では集合は全て空集合ではない場合のみ考える．（空集合についても適当に扱えばよいがここでは省略する.）

Definition 1.4.19.

1. X_1, X_2 を集合とする．$i = 1, 2$ に対し，$p_i(x_1, x_2) = x_i$ により定まる写像 $p_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$ を第 i 成分への射影 (projection) という．
   (厳密には $p_i((x, y))$ と書くべきであるが見にくくなるだけなので普通このように書く.)
2. $f_i\colon Y \to X_i$ $(i = 1, 2)$ を写像とする．写像 $(f_1, f_2)\colon Y \to X_1 \times X_2$ を $(f_1, f_2)(y) = (f_1(y), f_2(y))$ により定める．
3. X を集合とする．写像 $\Delta = (1_X, 1_X)\colon X \to X \times X$ を対角線写像 (diagonal map) という．$\Delta(x) = (x, x) \in X \times X$ である．
4. $f_i\colon X_i \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ を写像とする．写像 $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ を $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ により定める．

Example（講義後追加）.

1. $a, b > 0$ とし，$\mathbb{R}^2$ の部分集合
$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$$
（楕円）の射影による像を考える．$p_1(E) = [-a, a]$, $p_2(E) = [-b, b]$ である．
2. $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_1(t) = a\cos(t)$, $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_2(t) = b\sin(t)$ で定めると，$(f_1, f_2)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は $(f_1, f_2)(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$ という写像（楕円の媒介変数

表示）である．

exercise 6. $f_i\colon Y \to X_i$ $(i=1,2)$, $g\colon Y \to X_1 \times X_2$ を写像とする．

1. $p_i \circ (f_1, f_2) = f_i$ $(i=1,2)$ を示せ．
2. $g = (p_1 \circ g, p_2 \circ g)$ を示せ．
3. 写像 g が $p_i \circ g = f_i$ をみたせば $g = (f_1, f_2)$ である．
4. $h\colon Z \to Y$ を写像とする．$(f_1, f_2) \circ h = (f_1 \circ h, f_2 \circ h)$.

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, "h"'] \arrow[ddl, bend right, "f_1h"'] \arrow[ddr, bend left, "f_2h"] & \\
& Y \arrow[d, "(f_1,f_2)"', "g"] \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1 & X_1 \times X_2 \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & X_2
\end{tikzcd}$$

exercise 7. 1. $f_i\colon X_i \to Y_i$ $(i=1,2)$ を写像, $p_i\colon X_1 \times X_2 \to X_i$, $q_i\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$ $(i=1,2)$ を射影とする．

(i) $q_i \circ (f_1 \times f_2) = f_i \circ p_i$ $(i=i,2)$ を示せ．

(ii) $f_1 \times f_2 = (f_1 \circ p_1, f_2 \circ p_2)$ を示せ．

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "f_1"'] & X_1 \times X_2 \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "f_1 \times f_2"] & X_2 \arrow[d, "f_2"] \\
Y_1 & Y_1 \times Y_2 \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"'] & Y_2
\end{tikzcd}$$

2. $f_i\colon X_i \to Y_i$, $g_i\colon Z \to X_i$ $(i=1,2)$ を写像とする．

(i) $(f_1 \times f_2) \circ (g_1, g_2) = (f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2)$ を示せ．

(ii) $(g_1, g_2) = (g_1 \times g_2) \circ \Delta$ を示せ．

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "(f_1g_1, f_2g_2)"] \arrow[dr, "(g_1,g_2)"'] & & Y_1 \times Y_2 \\
& X_1 \times X_2 \arrow[ur, "f_1 \times f_2"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "(g_1,g_2)"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & X_1 \times X_2 \\
& Z \times Z \arrow[ur, "g_1 \times g_2"'] &
\end{tikzcd}.$$

exercise 8. 1. X, Y を集合とする．$1_X \times 1_Y = 1_{X \times Y}$ を示せ．

2. $f_i\colon X_i \to Y_i$, $g_i\colon Y_i \to Z_i$ $(i=1,2)$ を写像とする．$(g_1 \times g_2) \circ (f_1 \times f_2) =$

$(g_1 \circ f_1) \times (g_2 \circ f_2)$ を示せ.

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \times X_2 \arrow[rr, "g_1 f_1 \times g_2 f_2"] \arrow[dr, "f_1 \times f_2"'] & & Z_1 \times Z_2 \\
& Y_1 \times Y_2 \arrow[ur, "g_1 \times g_2"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

exercise 9. X, Y を集合とする. 写像 $\tau\colon X \times Y \to Y \times X$ を $\tau(x, y) = (y, x)$ により定めると τ は全単射である.

exercise 10. X, Y を集合, $y \in Y$ とする. 写像 $i_y\colon X \to X \times Y$ を $i_y(x) = (x, y)$ により定める.

1. i_y は単射である.
2. $c_y\colon X \to Y$ を y に値をとる定値写像とする. $i_y = (1_X, c_y)$ を示せ.

しばしば, この写像 i_y により X とその像 $X \times \{y\} \subset X \times Y$ を同一視し, X を $X \times Y$ の部分集合とみなすことがある. 同様に, X と $X \times \{*\}$ はしばしば同一視される.

Example 1.4.20. X を集合とする. $X \times X$ から X への写像を X 上の二項演算 (binary operation) とよぶことがある. 写像 $\mu\colon X \times X \to X$ を二項演算とみるとき, $\mu(x, y) \in X$ を $x\mu y$ とか xy と書くことがある.

$\mu\colon X \times X \to X$ を二項演算とし, $\mu(x, y)$ を xy と書く.

1. 次の図式が可換であるとき, すなわち, $\mu(\mu \times 1_X) = \mu(1_X \times \mu)$ が成り立つとき μ は結合的 (associative) であるという：

$$
\begin{tikzcd}
X \times X \times X \arrow[r, "\mu \times 1_X"] \arrow[d, "1_X \times \mu"'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] \\
X \times X \arrow[r, "\mu"'] & X.
\end{tikzcd}
$$

つまり μ が結合的であるとは, 任意の $x, y, z \in X$ に対し, $\mu(\mu(x, y), z) = \mu(x, \mu(y, z))$, すなわち $(xy)z = x(yz)$ が成り立つということ.

2. 次の図式が可換であるとき, すなわち, $\mu = \mu\tau$ が成り立つとき μ は可換 (commutative) であるという：

$$
\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\tau"'] & X \\
X \times X \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

ただし $\tau\colon X\times Y\to X\times Y$ は $\tau(x,y)=(y,x)$ で定義される写像. つまり μ が可換であるとは, 任意の $x,y\in X$ に対し, $\mu(x,y)=\mu(\tau(x,y))$, すなわち $xy=yx$ が成り立つということ.

3. 次の図式の左（右）の三角形を可換にするような写像

$$\eta\colon [1]\to X$$

が存在するとき, すなわち $\mu(\eta\times 1_X)=1_X$ $(\mu(1_X\times\eta)=1_X)$ が成り立つような η が存在するとき, μ は左（右）単位元をもつといい, $e=\eta(0)\in X$ を μ の左（右）単位元 (unit) という. 両方の三角形が可換であるとき μ は単位元をもつといい, e を単位元という.

$$\begin{tikzcd}
{[1]\times X} \arrow[r, "\eta\times 1_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & X\times X \arrow[d, "\mu"] & X\times[1] \arrow[l, "1_X\times\eta"'] \arrow[dl, "1_X"] \\
& X &
\end{tikzcd}.$$

つまり e が左（右）単位元であるとは, 任意の $x\in X$ に対し, $\mu(\eta(0),x)=x$ $(\mu(x,\eta(0))=x)$, すなわち $ex=x$ $(xe=x)$ が成り立つということ.

Example 1.4.21. 実数の和 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x+y$, 積 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto xy$ はいずれも結合的, 可換で単位元をもつ. もちろん単位元はそれぞれ 0 と 1 である. また和は逆元をもつ.

Example 1.4.22. $\vee$, $\wedge$, $\to$ は $[2]=\{0,1\}$ 上の二項演算を与える. $\vee$, $\wedge$ は結合的, 可換で単位元をもつ. $\vee$ の単位元は 0, $\wedge$ の単位元は 1. $\to$ は結合的でも可換でもないが, 左単位元 1 をもつ $(1\to 0=0,\ 1\to 1=1)$.

1.4.4　Y^X

Definition 1.4.23. X, Y を集合とする. X から Y への写像全体のなす集合を $\mathrm{Map}(X,Y)$ あるいは Y^X と表す. ($\mathrm{Hom}(X,Y)$, $F(X,Y)$ といった記号を使うこともある.)

$$\mathrm{Map}(X,Y)=Y^X=\left\{f \;\middle|\; f \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への写像}\right\}.$$

Example 1.4.24. Ex. 1.4.6 参照.

任意の集合 Y に対し, $\emptyset$ から Y への写像がただ 1 つ存在するので $Y^{\emptyset}\cong[1]$. 特に $\emptyset^{\emptyset}\cong[1]$.

$X\neq\emptyset$ のときは, X から $\emptyset$ への写像は存在しないので $\emptyset^X=\emptyset$.

また, 任意の集合 X に対し, X から $[1]$ への写像がただ 1 つ存在するので $[1]^X \cong [1]$. $Y^{[1]}$ については Ex. 1.4.37 を見よ.

Example 1.4.25. 自然数全体 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

を実数列 という. 普通 $a(n)$ を a_n と書いて, 数列を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とか $\{a_n\}$ と表す.
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ は実数列全体のなす集合である.

Definition 1.4.26. $f\colon X \to Y$ を写像, Z を集合とする.

1. 写像 $f_*\colon \mathrm{Map}(Z, X) \to \mathrm{Map}(Z, Y)$ を $f_*(g) = f \circ g$ で定める：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(Z,X) & \xrightarrow{f_*} & \mathrm{Map}(Z,Y) \\ \Cup & & \Cup \\ Z \underset{g}{\to} X & \longmapsto & Z \underset{g}{\to} X \underset{f}{\to} Y. \end{array}$$

2. 写像 $f^*\colon \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ を $f^*(h) = h \circ f$ で定める：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Map}(Y,Z) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Map}(X,Z) \\ \Cup & & \Cup \\ Y \underset{h}{\to} Z & \longmapsto & X \underset{f}{\to} Y \underset{h}{\to} Z. \end{array}$$

写像 f_*, f^* を f により誘導される写像 (induced map) という. 写像 f_*, f^* は集合 Z にも依存している. f_* を $\mathrm{Map}(Z, f)$, $\mathrm{Map}(\mathrm{id}_Z, f)$, $\mathrm{Hom}(Z, f)$ 等と, f^* を $\mathrm{Map}(f, Z)$, $\mathrm{Map}(f, \mathrm{id}_Z)$, $\mathrm{Hom}(f, Z)$ 等と書くこともある.
Y^X という記法を使う場合, f_* を f^Z と, f^* を Z^f と書くこともある：

$$f^Z = f_*\colon X^Z \to Y^Z$$
$$Z^f = f^*\colon Z^Y \to Z^X$$

Caution! . 写像の向きに注意.

Example 1.4.27. X を集合, $A \subset X$, $i\colon A \to X$ を包含写像とする. $i^*\colon \mathrm{Map}(X, Y) \to \mathrm{Map}(A, Y)$ は写像 $f\colon X \to Y$ に対し, その A への制限 $f|_A$ を対応させる写像である.

Example 1.4.28.
1. 写像 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = 2n$ で定めると, $f^*\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ （すなわち第 n 項が a_{2n} である数列）にうつす写像である.

2. 写像 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = 2x$ で定めると，$g_*\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ は数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\{2a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$（すなわち第 n 項が $2a_n$ である数列）にうつす写像である．

Proposition 1.4.29. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像, W を集合とする．

1. $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}\colon \mathrm{Map}(W,X) \to \mathrm{Map}(W,X)$.
2. $(g\circ f)_* = g_* \circ f_*\colon \mathrm{Map}(W,X) \to \mathrm{Map}(W,Z)$.
3. $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}\colon \mathrm{Map}(X,W) \to \mathrm{Map}(X,W)$.
4. $(g\circ f)^* = f^* \circ g^*\colon \mathrm{Map}(Z,W) \to \mathrm{Map}(X,W)$.

Remark . 2,4 は別の書き方をすればそれぞれ $(gf)^W = g^W f^W$, $W^{gf} = W^f W^g$：

$$\begin{tikzcd} X^W \arrow[rr, "(gf)^W"] \arrow[dr, "f^W"'] & & Z^W \\ & Y^W \arrow[ur, "g^W"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W^Z \arrow[rr, "W^{gf}"] \arrow[dr, "W^g"'] & & W^X \\ & W^Y \arrow[ur, "W^f"'] & \end{tikzcd}.$$

Proof. $h \in \mathrm{Map}(W,X)$ に対し，

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_X)_*(h) &= \mathrm{id}_X \circ h = h, \\ (g\circ f)_*(h) &= (g\circ f)\circ h \\ &= g\circ(f\circ h) \\ &= g_*(f\circ h) \\ &= g_*(f_*(h)) \\ &= (g_*\circ f_*)(h). \end{aligned}$$

□

exercise 11. 3, 4 を示せ．

Corollary 1.4.30. $f\colon X \to Y$ が全単射であれば f_*, f^* もそうである．

Proof. $g\colon Y \to X$ を $g\circ f = \mathrm{id}_X$, $f\circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたす写像（f の逆写像）とすると，$g_*\circ f_* = (g\circ f)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}$, $f_*\circ g_* = (f\circ g)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}$ となり，f_* は全単射で，g_* が f_* の逆写像である．f^* も同様． □

Proposition 1.4.31. $f\colon X \to Y$, $h\colon Z \to W$ を写像とすると $h^*\circ f_* = f_*\circ h^*$：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Map}(W,X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "h^*"'] & \mathrm{Map}(W,Y) \arrow[d, "h^*"] \\ \mathrm{Map}(Z,X) \arrow[r, "f_*"'] & \mathrm{Map}(Z,Y). \end{tikzcd}$$

この合成写像 $\mathrm{Map}(h,1_X)\circ\mathrm{Map}(1_W,f)=h^*\circ f_*=f_*\circ h^*=\mathrm{Map}(1_Z,f)\circ\mathrm{Map}(h,1_X)$ を $\mathrm{Map}(h,f)$ と書くことがある．証明から分かるように，$\mathrm{Map}(h,f)(g)=f\circ g\circ h$ である：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Map}(W,X) & \xrightarrow{\mathrm{Map}(h,f)} & \mathrm{Map}(Z,Y) \\ \Cup & & \Cup \\ W\underset{g}{\to}X & \longmapsto & Z\underset{h}{\to}W\underset{g}{\to}X\underset{f}{\to}Y.\end{array}$$

Proof. $g\in\mathrm{Map}(W,X)$ に対し，

$$\begin{aligned}(h^*\circ f_*)(g)&=h^*(f_*(g))\\&=h^*(f\circ g)\\&=(f\circ g)\circ h\\(f_*\circ h^*)(g)&=f_*(h^*(g))\\&=f_*(g\circ h)\\&=f\circ(g\circ h).\end{aligned}$$

□

Proposition 1.4.32. X_1,X_2,Y を集合とする．

1. $p_i\colon X_1\times X_2\to X_i$ $(i=1,2)$ を射影とすると，$(p_{1*},p_{2*})\colon\mathrm{Map}(Y,X_1\times X_2)\to\mathrm{Map}(Y,X_1)\times\mathrm{Map}(Y,X_2)$ は全単射である：

$$\mathrm{Map}(Y,X_1\times X_2)\xrightarrow[(p_{1*},p_{2*})]{\cong}\mathrm{Map}(Y,X_1)\times\mathrm{Map}(Y,X_2),$$
$$(X_1\times X_2)^Y\xrightarrow[(p_1^Y,p_2^Y)]{\cong}X_1^Y\times X_2^Y.$$

2. $X_1\cap X_2=\emptyset$ とし，$i_k\colon X_k\to X_1\coprod X_2$ $(k=1,2)$ を包含写像とすると，$(i_1^*,i_2^*)\colon\mathrm{Map}\left(X_1\coprod X_2,Y\right)\to\mathrm{Map}(X_1,Y)\times\mathrm{Map}(X_2,Y)$ は全単射である：

$$\mathrm{Map}\left(X_1\coprod X_2,Y\right)\xrightarrow[(i_1^*,i_2^*)]{\cong}\mathrm{Map}(X_1,Y)\times\mathrm{Map}(X_2,Y),$$
$$Y^{(X_1\coprod X_2)}\xrightarrow[(Y^{i_1},Y^{i_2})]{\cong}Y^{X_1}\times Y^{X_2}.$$

Proof. 1. これは本質的には exe. 6 である．実際，exe. 6.1 より (p_{1*},p_{2*}) が全射であることがわかり，exe. 6.2 あるいは exe. 6.3 から単射であることがわかる．

少し丁寧に書いてみる．$(f,g)\in\mathrm{Map}(Y,X_1)\times\mathrm{Map}(Y,X_2)$ に対し $(f,g)\colon Y\to X_1\times X_2\in\mathrm{Map}(Y,X_1\times X_2)$ を対応させる写像が,(p_{1*},p_{2*}) の逆写像をあたえる

のだが, $\mathrm{Map}(Y,X_1)\times\mathrm{Map}(Y,X_2)$ の元と $\mathrm{Map}(Y,X_1\times X_2)$ の元を同じ (f,g) という記号で表すと混乱するのでここでは写像 $(f,g)\colon Y\to X_1\times X_2$ を $\langle f,g\rangle$ と書くことにする. (実際はこの対応により自然に同一視できるので同じ記号を用いても通常問題は無い.)

写像 $\varphi\colon \mathrm{Map}(Y,X_1)\times\mathrm{Map}(Y,X_2)\to\mathrm{Map}(Y,X_1\times X_2)$ を $\varphi(f,g)=\langle f,g\rangle$ により定める.

$(f,g)\in\mathrm{Map}(Y,X_1)\times\mathrm{Map}(Y,X_2)$ に対し,

$$\begin{aligned}((p_{1*},p_{2*})\circ\varphi)(f,g)&=(p_{1*},p_{2*})(\varphi(f,g))\\&=(p_{1*},p_{2*})(\langle f,g\rangle)\\&=(p_{1*}(\langle f,g\rangle),p_{2*}(\langle f,g\rangle))\\&=(p_1\circ\langle f,g\rangle,p_2\circ\langle f,g\rangle)\\&=(f,g).\end{aligned}$$

ただし最後の変形は exe. 6.1 による. よって $(p_{1*},p_{2*})\circ\varphi=\mathrm{id}$.

$h\in\mathrm{Map}(Y,X_1\times X_2)$ に対し

$$\begin{aligned}(\varphi\circ(p_{1*},p_{2*}))(h)&=\varphi((p_{1*},p_{2*})(h))\\&=\varphi(p_{1*}(h),p_{2*}(h))\\&=\varphi(p_1\circ h,p_2\circ h)\\&=\langle p_1\circ h,p_2\circ h\rangle\\&=h.\end{aligned}$$

ただし最後の変形は exe. 6.2 による. よって $\varphi\circ(p_{1*},p_{2*})=\mathrm{id}$.

よって (p_{1*},p_{2*}) は全単射であり φ がその逆写像である.

2. 写像 $\psi\colon\mathrm{Map}(X_1,Y)\times\mathrm{Map}(X_2,Y)\to\mathrm{Map}\left(X_1\coprod X_2,Y\right)$ を

$$(\psi(f,g))(x)=\begin{cases}f(x), & x\in X_1\\ g(x), & x\in X_2\end{cases}$$

により定めると容易に ψ が (i_1^*,i_2^*) の逆写像を与えることがわかる.

□

Proposition 1.4.33. $f_k\colon X_k\to Y_k$ $(k=1,2)$ を写像, Z を集合とする.

1. $p_k\colon X_1\times X_2\to X_k$, $q_k\colon Y_1\times Y_2\to Y_k$ $(k=1,2)$ を射影とする. このとき

$(f_{1*} \times f_{2*}) \circ (p_{1*}, p_{2*}) = (q_{1*}, q_{2*}) \circ (f_1 \times f_2)_*$：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(Z, X_1 \times X_2) \arrow[r, "(p_{1*}, p_{2*})"] \arrow[d, "(f_1 \times f_2)_*"'] & \mathrm{Map}(Z, X_1) \times \mathrm{Map}(Z, X_2) \arrow[d, "f_{1*} \times f_{2*}"] \\
\mathrm{Map}(Z, Y_1 \times Y_2) \arrow[r, "(q_{1*}, q_{2*})"'] & \mathrm{Map}(Z, Y_1) \times \mathrm{Map}(Z, Y_2).
\end{tikzcd}$$

2. $X_1 \cap X_2 = \emptyset = Y_1 \cap Y_2$ とし，$i_k \colon X_k \to X_1 \coprod X_2$，$j_k \colon Y_k \to Y_1 \coprod Y_2$ $(k = 1, 2)$ を包含写像とする．このとき $(f_1^* \times f_2^*) \circ (j_1^*, j_2^*) = (i_1^*, i_2^*) \circ (f_1 \coprod f_2)^*$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(X_1 \coprod X_2, Z) \arrow[r, "(i_1^*, i_2^*)"] & \mathrm{Map}(X_1, Z) \times \mathrm{Map}(X_2, Z) \\
\mathrm{Map}(Y_1 \coprod Y_2, Z) \arrow[r, "(j_1^*, j_2^*)"'] \arrow[u, "(f_1 \coprod f_2)^*"] & \mathrm{Map}(Y_1, Z) \times \mathrm{Map}(Y_2, Z). \arrow[u, "f_1^* \times f_2^*"']
\end{tikzcd}$$

Proof. 1 を示す．

$$\begin{aligned}
(f_{1*} \times f_{2*}) \circ (p_{1*}, p_{2*}) &= (f_{1*} \circ p_{1*}, f_{2*} \circ p_{2*}) \\
&= ((f_1 \circ p_1)_*, (f_2 \circ p_2)_*) \\
&= ((q_1 \circ (f_1 \times f_2))_*, (q_2 \circ (f_1 \times f_2))_*) \\
&= (q_{1*} \circ (f_1 \times f_2)_*, q_{2*} \circ (f_1 \times f_2)_*) \\
&= (q_{1*}, q_{2*}) \circ (f_1 \times f_2)_*.
\end{aligned}$$

2 も同様である． □

Example 1.4.34. $\mu \colon Y \times Y \to Y$ を集合 Y 上の二項演算とし，$\mu(y_1, y_2)$ を $y_1 \cdot y_2$ と書く．二つの写像 $f, g \colon X \to Y$ に対し，写像 $f \cdot g \colon X \to Y$ を $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ で定め，f と g の各点毎の積 (pointwise multiplication) 等とよぶ．写像の合成で書けば $f \cdot g = \mu \circ (f, g) = \mu \circ (f \times g) \circ \Delta$ である:

$$\begin{tikzcd}
f \cdot g \colon X \arrow[rr, "(f,g)"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & Y \times Y \arrow[r, "\mu"] & Y \\
& X \times X \arrow[ur, "f \times g"'] & & .
\end{tikzcd}$$

$(f, g) \in Y^X \times Y^X$ に対し $f \cdot g \in Y^X$ を対応させることで Y^X 上の二項演算が定まる．この二項演算は Ex. 1.4.32 の同一視のもと，μ が誘導する写像である：

$$Y^X \times Y^X \xrightarrow[(p_{1*}, p_{2*})^{-1}]{\cong} (Y \times Y)^X \xrightarrow[\mu_*]{} Y^X.$$

実際, $\left(\mu_* \circ (p_{1*}, p_{2*})^{-1}\right)(f, g) = \mu_*((f, g)) = \mu \circ (f, g) = f \cdot g$.

X の元を代入して計算すればすぐわかるが, もとの二項演算 μ が結合的（可換, 単位元をもつ）であるとき, μ の定める二項演算も結合的（可換, 単位元をもつ）である．このことは, 例えば結合性については, 次の図式が可換であることからもわかる：

$$\begin{tikzcd}
Y^X \times Y^X \times Y^X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"'] & (Y \times Y)^X \times Y^X \arrow[r, "\mu_* \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\cong"'] & Y^X \times Y^X \arrow[d, "\cong"] \\
Y^X \times (Y \times Y)^X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu_*"'] & (Y \times Y \times Y)^X \arrow[r, "(\mu \times \mathrm{id})_*"] \arrow[d, "(\mathrm{id} \times \mu)_*"'] & (Y \times Y)^X \arrow[d, "\mu_*"] \\
Y^X \times Y^X \arrow[r, "\cong"'] & (Y \times Y)^X \arrow[r, "\mu_*"'] & Y^X.
\end{tikzcd}$$

Example 1.4.35. 各点毎の和, 積, すなわち $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ に対し, $(a+b)_n = a_n + b_n$, $(ab)_n = a_n b_n$ により定まる数列を対応させることで, 実数列の和, 積 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ が定まる．

Definition 1.4.36. X, Y を集合, $X, Y \neq \emptyset$ とする．$\mathrm{ev}(f, x) = f(x)$ で定まる写像

$$\mathrm{ev}\colon Y^X \times X \to Y$$

を<u>値写像 (evaluation map)</u> という．（X か Y が $\emptyset$ のときは必要なら $\mathrm{ev}\colon Y^X \times X = \emptyset \to Y$ を一意に存在する写像 $\emptyset \to Y$ と定める.）

また $x_0 \in X$ に対し, $\mathrm{ev}_{x_0}(f) = f(x_0)$ で定まる写像

$$\mathrm{ev}_{x_0}\colon Y^X \to Y$$

を<u>点$x_0 \in X$における値写像 (evaluation map)</u> という．

あきらかに ev_{x_0} は ev と $i_{x_0}\colon Y^X \to Y^X \times X$, $i_{x_0}(f) = (f, x_0)$ との合成である． 言い換えれば ev を $Y^X \times \{x_0\}$ に制限し（て $Y^X \times \{x_0\}$ と Y^X を同一視し）たものである：

$$Y^X \xrightarrow{\cong} Y^X \times \{x_0\} \hookrightarrow Y^X \times X \xrightarrow{\mathrm{ev}} Y.$$

Example 1.4.37. $X = [1] = \{0\}$ の場合を考える．このとき値写像は全単射 $Y^{[1]} \cong Y$ を与える（Ex. 1.4.6 参照）：

$$\begin{tikzcd}
Y^{[1]} \arrow[rr, "\cong", "\mathrm{ev}_0"'] \arrow[dr, "\cong", "i_0"'] & & Y \\
& Y^{[1]} \times [1] \arrow[ur, "\cong", "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}.$$

Example 1.4.38. $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathrm{ev}_n \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ は数列に対しその第 n 項を対応させる写像である. 特に $\mathrm{ev}_1 \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ は数列の初項を与える写像である.

Example 1.4.39. X を集合とする. 集合 $[2] = \{0, 1\}$ から X への写像全体 $X^{[2]}$ を考える. 写像 $(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1) \colon X^{[2]} \to X^2$, $(\mathrm{ev}_0, \mathrm{ev}_1)(f) = (f(0), f(1))$ はあきらかに全単射である.

同様に, n 個の元をもつ集合 $[n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ を考えると, 写像

$$\begin{array}{rccc} (\mathrm{ev}_0, \ldots, \mathrm{ev}_{n-1}) \colon & X^{[n]} & \longrightarrow & X^n \\ & \cup\!\!\!\!\!\!\;\; & & \cup \\ & f & \longmapsto & (f(0), f(1), \ldots, f(n-1)) \end{array}$$

により全単射 $X^{[n]} \to X^n$ がえられる.

exercise 12. 1. 写像 $(\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_0) \colon X^{[2]} \to X^2$ も全単射である.

2. $\sigma \colon [n] \to [n]$ を全単射とする. このとき写像

$$(\mathrm{ev}_{\sigma(0)}, \mathrm{ev}_{\sigma(1)}, \ldots, \mathrm{ev}_{\sigma(n-1)}) \colon X^{[n]} \to X^n$$

も全単射である.

Proposition 1.4.40. X, Y, Z を集合, $f \colon X \to Y$ を写像, $z_0 \in Z$, $x_0 \in X$ とする. 次の図式は可換である.

1.

$$\begin{tikzcd} X^Z \times Z \arrow[r, "f_* \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] & Y^Z \times Z \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

2.

$$\begin{tikzcd} X^Z \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_{z_0}"'] & Y^Z \arrow[d, "\mathrm{ev}_{z_0}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

3.

$$\begin{tikzcd} Z^Y \times X \arrow[r, "f^* \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \times f"'] & Z^X \times X \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ Z^Y \times Y \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & Z. \end{tikzcd}$$

4.

$$\begin{tikzcd} Z^Y \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_{f(x_0)}"'] & & Z^X \arrow[dl, "\mathrm{ev}_{x_0}"] \\ & Z & . \end{tikzcd}$$

Proof. 1. $h \in X^Z$ と $z \in Z$ に対し，

$$\begin{aligned} (\mathrm{ev} \circ (f_* \times \mathrm{id}))(h, z) &= \mathrm{ev}((f_* \times \mathrm{id})(h, z)) \\ &= \mathrm{ev}(f_*(h), z) \\ &= \mathrm{ev}(f \circ h, z) \\ &= (f \circ h)(z) \\ &= f(h(z)), \\ (f \circ \mathrm{ev})(h, z) &= f(\mathrm{ev}(h, z)) \\ &= f(h(z)). \end{aligned}$$

他も同様. □

exercise 13. 2, 3, 4 を示せ.

Example 1.4.41. $Z = [1]$ の場合を考える．次の図式は可換である：

$$\begin{tikzcd} X^{[1]} \arrow[r, "f^{[1]}"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"', "\cong"] & Y^{[1]} \arrow[d, "\mathrm{ev}_0", "\cong"'] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

すなわち，ev_0 により $X^{[1]}$ と X, $Y^{[1]}$ と Y をそれぞれ同一視すれば，$f_* = f^{[1]}$ は f と同一視できる．

Example 1.4.42. X, Y, Z を集合とする．写像の合成は写像

$$\begin{array}{rccc} c_{X,Y,Z} \colon & \mathrm{Map}(Y, Z) \times \mathrm{Map}(X, Y) & \longrightarrow & \mathrm{Map}(X, Z) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & (g, f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

を定める．

Ex. 1.4.26 の写像は合成を $\{g\} \times \mathrm{Map}(X, Y)$ や $\mathrm{Map}(Y, Z) \times \{f\}$ に制限したものである：

$$g_*\colon \mathrm{Map}(X,Y) \xrightarrow{\cong} \{g\}\times \mathrm{Map}(X,Y) \hookrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z)\times \mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(X,Z),$$
$$f^*\colon \mathrm{Map}(Y,Z) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Map}(Y,Z)\times \{f\} \hookrightarrow \mathrm{Map}(Y,Z)\times \mathrm{Map}(X,Y) \to \mathrm{Map}(X,Z).$$

$X=[1]$ の場合を考えると（自然な同一視のもと）値写像は合成の特別な場合とみなせる：

$$\begin{tikzcd}
Z^Y \times Y^{[1]} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times \mathrm{ev}_0"', "\cong"] & Z^{[1]} \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{ev}_0"] \\
Z^Y \times Y \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

写像の合成は結合的であるから $c_{X,Z,W}\circ(\mathrm{id}\times c_{X,Y,Z}) = c_{X,Y,W}\circ(c_{Y,Z,W}\times \mathrm{id})$ が成り立つ：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Map}(Z,W)\times \mathrm{Map}(Y,Z)\times \mathrm{Map}(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{id}\times c_{X,Y,Z}"] \arrow[d, "c_{Y,Z,W}\times \mathrm{id}"'] & \mathrm{Map}(Z,W)\times \mathrm{Map}(X,Z) \arrow[d, "c_{X,Z,W}"] \\
\mathrm{Map}(Y,W)\times \mathrm{Map}(X,Y) \arrow[r, "c_{X,Y,W}"'] & \mathrm{Map}(X,W).
\end{tikzcd}$$

適当な同一視のもと，Prop. 1.4.29, 1.4.31, 1.4.40 はこの特別な場合である．

Example 1.4.43. X を集合とする．合成

$$c = c_{X,X,X}\colon \mathrm{Map}(X,X)\times \mathrm{Map}(X,X) \to \mathrm{Map}(X,X)$$

は $\mathrm{Map}(X,X)$ 上に結合的で単位元をもつ二項演算を与える．単位元は id_X である．一般に可換ではない．

X から X への全単射全体を $\mathrm{Aut}(X)$ と書く．合成

$$c\colon \mathrm{Aut}(X)\times \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(X)$$

は $\mathrm{Aut}(X)$ 上に結合的で単位元 id_X をもつ二項演算を与える．さらに，この二項演算は逆元をもつ．すなわち，写像の合成により $\mathrm{Aut}(X)$ は群 (group) となる．もちろん $f\in \mathrm{Aut}(X)$ の逆元は f の逆写像 f^{-1} である．

$X=\{1,2,\ldots,n\}$ （$n\in\mathbb{N}$）の場合，$\mathrm{Aut}(X)$ を S_n と書き，n 次対称群 (symmetric group) という．

Theorem 1.4.44. X,Y,Z を集合とする．

写像 $\Phi\colon \mathrm{Map}(X\times Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z^Y)$ を

$$((\Phi(\varphi))(x))(y) = \varphi(x,y)$$

により定める.

また, 写像 $\Psi\colon \operatorname{Map}(X, Z^Y) \to \operatorname{Map}(X \times Y, Z)$ を

$$(\Psi(\psi))\,(x, y) = (\psi(x))(y)$$

により定める.

1. このとき, Φ は全単射であり Ψ がその逆写像である：

$$\Phi\colon\ \operatorname{Map}(X \times Y, Z) \xrightarrow{\ \cong\ } \operatorname{Map}(X, Z^Y).$$

別の記法で書けば

$$\Phi\colon Z^{X\times Y} \xrightarrow{\cong} \left(Z^Y\right)^X.$$

2. $f\colon X_1 \to X_2$, $g\colon Y_1 \to Y_2$, $h\colon Z_1 \to Z_2$ を写像とする. 次が成り立つ.

(i) $\Phi \circ (f \times \mathrm{id})^* = f^* \circ \Phi$, $\Psi \circ f^* = (f \times \mathrm{id})^* \circ \Psi$:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Map}(X_1 \times Y, Z) \arrow[r, "\Phi"] & \operatorname{Map}(X_1, Z^Y) \arrow[r, "\Psi"] & \operatorname{Map}(X_1 \times Y, Z) \\
\operatorname{Map}(X_2 \times Y, Z) \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[u, "(f\times\mathrm{id})^*"] & \operatorname{Map}(X_2, Z^Y) \arrow[r, "\Psi"'] \arrow[u, "f^*"'] & \operatorname{Map}(X_2 \times Y, Z). \arrow[u, "(f\times\mathrm{id})^*"']
\end{tikzcd}$$

(ii) $\Phi \circ h_* = (h_*)_* \circ \Phi$, $\Psi \circ (h_*)_* = h_* \circ \Psi$:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Map}(X \times Y, Z_1) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "h_*"'] & \operatorname{Map}(X, Z_1^Y) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "(h_*)_*"] & \operatorname{Map}(X \times Y, Z_1) \arrow[d, "h_*"] \\
\operatorname{Map}(X \times Y, Z_2) \arrow[r, "\Phi"'] & \operatorname{Map}(X, Z_2^Y) \arrow[r, "\Psi"'] & \operatorname{Map}(X \times Y, Z_2).
\end{tikzcd}$$

(iii) $\Phi \circ (\mathrm{id} \times g)^* = (g^*)_* \circ \Phi$, $\Psi \circ (g^*)_* = (\mathrm{id} \times g)^* \circ \Psi$:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Map}(X \times Y_1, Z) \arrow[r, "\Phi"] & \operatorname{Map}(X, Z^{Y_1}) \arrow[r, "\Psi"] & \operatorname{Map}(X \times Y_1, Z) \\
\operatorname{Map}(X \times Y_2, Z) \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[u, "(\mathrm{id}\times g)^*"] & \operatorname{Map}(X, Z^{Y_2}) \arrow[r, "\Psi"'] \arrow[u, "(g^*)_*"'] & \operatorname{Map}(X \times Y_2, Z). \arrow[u, "(\mathrm{id}\times g)^*"']
\end{tikzcd}$$

証明の前に, この写像 Φ の感じをつかむため例を挙げよう.

Example 1.4.45. 1. いくつかの場所 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ におけるある年の 5 月 $D = \{1, 2, \ldots, 30, 31\}$ の天気 $W = \{$ ☀, ☁, ☂ $\}$ のデータがあるとする：

	x_1	$\dots$	x_n
1	☀	$\dots$	☀
2	☀	$\dots$	☁
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
30	☂	$\dots$	☂
31	☀	$\dots$	☀

このデータは,

(i) 場所 $x \in X$ と日付 $d \in D$ に対し, そこでのその時の天気を対応させる写像

$$f\colon X \times D \to W$$

と見ることができる. $f(x,d) \in W$ は上の表の x 列 d 行目の天気である.

(ii) また, 各場所 $x \in X$ に対し, その場所での天気の変化を表す写像 $f_x\colon D \to W$ が与えられている, すなわち写像

$$F\colon X \to \mathrm{Map}(D,W), \quad F(x) = f_x$$

と見ることもできる. もちろん f_x は上の表の x 列目を表している写像であり, $f_x(d)$ は上の表の x 列 d 行目の天気である.

いずれの見方も別の表現をしているだけで, 内容は同じである.

あきらかに, Thm. 1.4.44 の

$$\Phi\colon \mathrm{Map}(X \times D, W) \to \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(D,W))$$
$$\Psi\colon \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(D,W)) \to \mathrm{Map}(X \times D, W)$$

により $\Phi(f) = F$, $\Psi(F) = f$ である. つまり Φ は (i) の見方を (ii) の見方に, Ψ は (ii) の見方を (i) の見方に書き換える写像である.

2. もう少し数学的（だけれど実質同じ）例として, $m \times n$ 実行列全体 $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ を考えてみよう. $\mathbf{m} = \{1,\dots,m\}$, $\mathbf{n} = \{1,\dots,n\}$ とする.

(i) $m \times n$ 行列は各 (i,j) 成分を定めれば決まる. すなわち, 各 $(i,j) \in \mathbf{m} \times \mathbf{n}$ に対し $a_{ij} \in \mathbb{R}$ を定めれば, 行列 $M = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ が定まるので, 写像

$$\mathrm{Map}(\mathbf{m} \times \mathbf{n}, \mathbb{R}) \to \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

が得られ, あきらかに全単射である.

（これにより, $\mathrm{Map}(\mathbf{m} \times \mathbf{n}, \mathbb{R})$ と $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ はほとんど同じものだと思うことが出来るのであるが, この全単射は, $\mathbf{m}, \mathbf{n}$ のどちらが行でどちらが列に対応するかを指定することで定まることに注意.)

(ii) $m \times n$ 行列は n 次元行ベクトルを m 個ならべることでも得られる．また，n 次元行ベクトル $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ は，各 $j \in \mathbf{n}$ に対し $x_j \in \mathbb{R}$ を定めることで定まる，すなわち $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ の元だと思ってよい（Ex. 1.4.39 参照，しかし exe. 12 も参照のこと）．すなわち各 $i \in \mathbf{m}$ に対し，$a_i \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ を定めれば行列 $M = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_m \end{pmatrix}$ が定まるので，写像

$$\mathrm{Map}(\mathbf{m}, \mathbb{R}^{\mathbf{n}}) \to \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

が得られ，あきらかに全単射である．

これら（とその逆写像）の合成がこの場合の Thm. 1.4.44 の写像 Φ, Ψ である：

$$\mathrm{Map}(\mathbf{m} \times \mathbf{n}, \mathbb{R}) \cong \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{Map}(\mathbf{m}, \mathbb{R}^{\mathbf{n}}).$$

つまり，この全単射は，行列を各 (i, j) 成分のあつまりと見る見方と，行ベクトルがならんだものと見る見方の間の対応を与えている．

この例が上の 1 と実質的に同じであるのはあきらかであろう．

3. ２変数関数の偏微分（や累次積分）を思い出そう．$\mathbb{R}^2$ で定義された２変数実数値関数 $f(x, y)$ の，点 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ における y に関する偏微分係数 $f_y(a, b)$ は，$x = a$ を固定して，y の関数 $z = f(a, y)$ を考え，これを $y = b$ で微分するのであった．この，各 $a \in \mathbb{R}$ に対し $f(a, y) \in \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ を対応させる，という写像が，上の Thm. 1.4.44 の $\Phi(f)$ である：

$$\begin{array}{ccc} \Phi\colon \mathrm{Map}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})) \\ \Cup & & \Cup \\ f(x, y) & \longmapsto & a \mapsto f(a, y)\ . \end{array}$$

Proof of Thm. 1.4.44. $\Psi(\psi) = \mathrm{ev} \circ (\psi \times \mathrm{id}_Y)$ であることに注意する．：

$$\Psi(\psi)\colon X \times Y \xrightarrow[\psi \times \mathrm{id}_Y]{} Z^Y \times Y \xrightarrow[\mathrm{ev}]{} Z.$$

1. $f \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ に対し $\Psi \circ \Phi(f) \in \mathrm{Map}(X \times Y, Z)$ を考える．

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \Phi(f))\,(x, y) &= \big(\Psi(\Phi(f))\big)(x, y) \\ &= \big(\,(\Phi(f))\,(x)\big)(y) \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

ゆえ $\Psi \circ \Phi(f) = f$，すなわち $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}$.

$F \in \mathrm{Map}(X, Z^Y)$ に対し $\Phi \circ \Psi(F) \in \mathrm{Map}(X, Z^Y)$ を考える.

$$
\begin{aligned}
\big((\Phi \circ \Psi(F))\,(x)\big)(y) &= \big((\Phi(\Psi(F)))(x)\big)(y) \\
&= \big(\Psi(F)\big)(x, y) \\
&= \big(F(x)\big)(y)
\end{aligned}
$$

ゆえ $(\Phi \circ \Psi(F))(x) = F(x)$, ゆえ $\Phi \circ \Psi(F) = F$, すなわち $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$.

2. Φ, Ψ は互いに他の逆写像であるから, Ψ の方のみ示せばよい.

(i) $\psi \in \mathrm{Map}(X_2, Z^Y)$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\Psi(f^*(\psi)) &= \Psi(\psi \circ f) \\
&= \mathrm{ev} \circ (\psi \circ f \times \mathrm{id}) \\
&= \mathrm{ev} \circ (\psi \times \mathrm{id}) \circ (f \times \mathrm{id}), \\
(f \times \mathrm{id})^*(\Psi(\psi)) &= \Psi(\psi) \circ (f \times \mathrm{id}) \\
&= \mathrm{ev} \circ (\psi \times \mathrm{id}) \circ (f \times \mathrm{id}).
\end{aligned}
$$

(ii) $\psi \in \mathrm{Map}(X, Z_1^Y)$ に対し, Prop. 1.4.40 を使って,

$$
\begin{aligned}
\Psi\left((h_*)_*(\psi)\right) &= \Psi\left(h_* \circ \psi\right) \\
&= \mathrm{ev} \circ (h_* \circ \psi \times \mathrm{id}_Y) \\
&= \mathrm{ev} \circ (h_* \times \mathrm{id}_Y) \circ (\psi \times \mathrm{id}_Y) \\
&= h \circ \mathrm{ev} \circ (\psi \times \mathrm{id}_Y), \\
h_*\left(\Psi(\psi)\right) &= h \circ \Psi(\psi) \\
&= h \circ \mathrm{ev} \circ (\psi \times \mathrm{id}_Y).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[d, "\psi\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "h_*\psi\times\mathrm{id}"] & \\
Z_1^Y \times Y \arrow[r, "h_*\times\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}"'] & Z_2^Y \times Y \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
Z_1 \arrow[r, "h"'] & Z_2.
\end{tikzcd}
$$

(iii) $\psi \in \mathrm{Map}(X, Z^{Y_2})$ に対し, Prop. 1.4.40 を使って,

$$
\begin{aligned}
\Psi((g^*)_*(\psi)) &= \Psi(g^* \circ \psi) \\
&= \mathrm{ev} \circ (g^* \circ \psi \times \mathrm{id}) \\
&= \mathrm{ev} \circ (g^* \times \mathrm{id}) \circ (\psi \times \mathrm{id}) \\
&= \mathrm{ev} \circ (\mathrm{id} \times g) \circ (\psi \times \mathrm{id}),
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\times g)^*(\Psi(\psi)) &= \Psi(\psi)\circ(\mathrm{id}\times g)\\ &= \mathrm{ev}\circ(\psi\times\mathrm{id})\circ(\mathrm{id}\times g)\\ &= \mathrm{ev}\circ(\mathrm{id}\times g)\circ(\psi\times\mathrm{id}).\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} X\times Y_1 \arrow[r, "\psi\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times g"'] & Z^{Y_2}\times Y_1 \arrow[r, "g^*\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times g"'] & Z^{Y_1}\times Y_1 \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\ X\times Y_2 \arrow[r, "\psi\times\mathrm{id}"'] & Z^{Y_2}\times Y_2 \arrow[r, "\mathrm{ev}"'] & Z. \end{tikzcd}$$

もちろん元を代入して計算してもよい.

$\square$

exercise 14. $f_i\colon X_i\to Y_i$ $(i=1,2)$ を全単射, $g_1\colon X_1\to X_2$, $g_2\colon Y_1\to Y_2$ を写像とする. このとき $g_2\circ f_1=f_2\circ g_1 \Leftrightarrow f_2^{-1}\circ g_2=g_1\circ f_1^{-1}$:

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "g_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y_1 \arrow[d, "g_2"] \\ X_2 \arrow[r, "f_2"'] & Y_2 \end{tikzcd} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{tikzcd} X_1 \arrow[d, "g_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & Y_1 \arrow[l, "f_1^{-1}"'] \arrow[d, "g_2"] \\ X_2 & Y_2. \arrow[l, "f_2^{-1}"] \end{tikzcd}$$

exercise 15. $\Psi\colon \mathrm{Map}(Y^X, Y^X)\to\mathrm{Map}(Y^X\times X, Y)$ による $\mathrm{id}\colon Y^X\to Y^X$ の像 $\Psi(\mathrm{id})$ を求めよ.

Remark . Thm. 1.4.44.2 は次のように表すこともできる.

(i) 任意の $\varphi\colon X_2\times Y\to Z$ に対し, $\Phi(\varphi\circ(f\times\mathrm{id}))=\Phi(\varphi)\circ f$,
任意の $\psi\colon X_2\to Z^Y$ に対し, $\Psi(\psi\circ f)=\Psi(\psi)\circ(f\times\mathrm{id})$.

(ii) 任意の $\varphi\colon X\times Y\to Z_1$ に対し, $\Phi(h\circ\varphi)=h_*\circ\Phi(\varphi)$,
任意の $\psi\colon X\to Z_1^Y$ に対し, $\Psi(h_*\circ\psi)=h_*\circ\Psi(\psi)$.

(iii) 任意の $\varphi\colon X\times Y_2\to Z$ に対し, $\Phi(\varphi\circ(\mathrm{id}\times g))=g^*\circ\Phi(\varphi)$,
任意の $\psi\colon X\to Z^{Y_2}$ に対し, $\Psi(g^*\circ\psi)=\Psi(\psi)\circ(\mathrm{id}\times g)$.

Corollary 1.4.46. 1. $f\colon X_1 \to X_2$ を写像とする.

(i) $\varphi_i\colon X_i \times Y \to Z$ $(i = 1, 2)$ を写像とする. このとき,

$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id}) \Leftrightarrow \Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_2) \circ f$：

$$\begin{tikzcd} X_1 \times Y \arrow[rr, "f\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \times Y \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & Z & \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\Phi(\varphi_1)"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[dl, "\Phi(\varphi_2)"] \\ & Z^Y & \end{tikzcd} .$$

(ii) $\psi\colon X_i \times Y \to Z$ $(i = 1, 2)$ を写像とする. このとき,

$\psi_1 = \psi_2 \circ f \Leftrightarrow \Psi(\psi_1) = \Psi(\psi_2) \circ (f \times \mathrm{id})$:

$$\begin{tikzcd} X_1 \times Y \arrow[rr, "f\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\Psi(\psi_1)"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \times Y \arrow[dl, "\Psi(\psi_2)"] \\ & Z & \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X_2 \arrow[dl, "\psi_2"] \\ & Z^Y & \end{tikzcd} .$$

2. $h\colon Z_1 \to Z_2$ を写像とする.

(i) $\varphi_i\colon X \times Y \to Z_i$ $(i = 1, 2)$ を写像とする. このとき,

$\varphi_2 = h \circ \varphi_1 \Leftrightarrow \Phi(\varphi_2) = h_* \circ \Phi(\varphi_r)$:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ Z_1 \arrow[rr, "h"'] & & Z_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\Phi(\varphi_1)"'] \arrow[dr, "\Phi(\varphi_2)"] & \\ Z_1^Y \arrow[rr, "h_*"'] & & Z_2^Y \end{tikzcd} .$$

(ii) $\psi_i\colon X \to Z_i^Y$ $(i = 1, 2)$ を写像とする. このとき,

$\psi_2 = h_* \circ \psi_1 \Leftrightarrow \Psi(\psi_2) = h \circ \Psi(\psi_1)$:

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "\Psi(\psi_1)"'] \arrow[dr, "\Psi(\psi_2)"] & \\ Z_1 \arrow[rr, "h"'] & & Z_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\ Z_1^Y \arrow[rr, "h_*"'] & & Z_2^Y \end{tikzcd} .$$

3. $g\colon Y_1 \to Y_2$ を写像とする.

(i) $\varphi_i\colon X \times Y_i \to Z$ $(i = 1, 2)$ を写像とする. このとき,

$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (\mathrm{id} \times g) \Leftrightarrow \Phi(\varphi_1) = g^* \circ \Phi(\varphi_2)$:

$$\begin{tikzcd} X \times Y_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}\times g"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & {} \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & X \times Y_2 \arrow[dl, "\varphi_2"] \\ & Z & \end{tikzcd} \Leftrightarrow \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\Phi(\varphi_2)"'] \arrow[dr, "\Phi(\varphi_1)"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ Z^{Y_2} \arrow[rr, "g^*"'] & {} & Z^{Y_1} \end{tikzcd} .$$

(ii) $\psi_i\colon X \to Z^{Y_i}$ $(i=1,2)$ を写像とする．このとき，
$\psi_1 = g^* \circ \psi_2 \Leftrightarrow \Psi(\psi_1) = \Psi(\psi_2) \circ (\mathrm{id} \times g)$:

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y_1 \arrow[rr, "\mathrm{id}\times g"] \arrow[dr, "\Psi(\psi_1)"'] & \circlearrowleft & X \times Y_2 \arrow[dl, "\Psi(\psi_2)"] \\
& Z &
\end{tikzcd}
\Leftrightarrow
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "\psi_1"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\
Z^{Y_2} \arrow[rr, "g^*"'] & \circlearrowleft & Z^{Y_1}
\end{tikzcd}
.
$$

Proof. 1(i) のみ示す．他も同様である．Thm. 1.4.44.2 より $\Phi(\varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id})) = \Phi(\varphi_2) \circ f$ である．

$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id})$ であるとすると，$\Phi(\varphi_1)\Phi(\varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id})) = \Phi(\varphi_2) \circ f$.

一方，$\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_2) \circ f$ であるとすると，$\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_2) \circ f = \Phi(\varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id}))$. Φ は単射であるから $\varphi_1 = \varphi_2 \circ (f \times \mathrm{id})$. □

Remark . これらをいくつか組み合わせたものもよく使われる．例えば，$f\colon X_1 \to X_2$, $h\colon Z_1 \to Z_2$ を写像，$\psi_i\colon X_i \to Z_i^Y$ $(i=1,2)$ を写像とすると，

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \times Y \arrow[r, "f\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\Psi(\psi_1)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_2 \times Y \arrow[d, "\Psi(\psi_2)"] \\
Z_1 \arrow[r, "h"'] & Z_2
\end{tikzcd}
\Leftrightarrow
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X_2 \arrow[d, "\psi_2"] \\
Z_1^Y \arrow[r, "h_*"'] & Z_2^Y
\end{tikzcd}
.
$$

とくに $X_i = Z_i^Y$, $f = h^*$, $\psi_i = \mathrm{id}$ とするとあきらかに右の図式は可換．よって左側も可換．

$$
\begin{tikzcd}
Z_1^Y \times Y \arrow[r, "h_*\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\Psi(\mathrm{id})=\mathrm{ev}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_2^Y \times Y \arrow[d, "\Psi(\mathrm{id})=\mathrm{ev}"] \\
Z_1 \arrow[r, "h"'] & Z_2
\end{tikzcd}
\Leftrightarrow
\begin{tikzcd}
Z_1^Y \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Z_2^Y \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
Z_1^Y \arrow[r, "h_*"'] & Z_2^Y
\end{tikzcd}
$$

すなわち Prop. 1.4.40.1 の可換図式をえる．（が，我々は Thm. 1.4.44.2 の証明に Prop. 1.4.40.1 を用いたので，これは Prop. 1.4.40.1 の別証明にはもちろんなっていない.)

Remark . Y^X という記法について．

Y^X という記法を使うのは数の冪乗の類似が成り立つことによる．

$$
\begin{aligned}
&X^{\emptyset} \cong [1] && X^{[1]} \cong X \\
&\emptyset^X = \emptyset \ (X \neq \emptyset) && [1]^X \cong [1] \\
&(X \times Y)^Z \cong X^Z \times Y^Z && Z^{(X \coprod Y)} \cong Z^X \times Z^Y
\end{aligned}
$$

$$Z^{X\times Y} \cong (Z^Y)^X$$

（これらの全単射が「自然な」写像で与えられるということが大切なのであるがそれについては時間その他の都合によりあまりふれないことにする.）

なお自然数の自然数乗との直接的関係についていずれ述べる.

1.4.5　冪集合と特性関数

Definition 1.4.47. X を集合とする.

1. $A \subset X$ を X の部分集合とする. 次で定義される写像 $\chi_A\colon X \to [2] = \{0, 1\}$ を A の（X 上の）特性関数 (characteristic function) という.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A). \end{cases}$$

2. 写像 $\chi\colon \mathcal{P}(X) \to [2]^X$ を $\chi(A) = \chi_A$ により定める.

Remark . しばしば $[2]^X$ を 2^X と略記する.

Theorem 1.4.48. 写像 $\chi\colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ は全単射である.

Proof. 写像 $\varphi\colon 2^X \to \mathcal{P}(X)$ を $\varphi(a) = a^{-1}(1)$ で定めると, あきらかに χ の逆写像である. 実際, $a \in 2^X$ に対し,

$$\begin{aligned} (\chi \circ \varphi)(a) &= \chi(\varphi(a)) \\ &= \chi\left(a^{-1}(1)\right) \\ &= \chi_{a^{-1}(1)} \end{aligned}$$

であるが, $x \in X$ に対し, $x \in a^{-1}(1) \Leftrightarrow a(x) = 1$, $x \notin a^{-1}(1) \Leftrightarrow a(x) \neq 1 \Leftrightarrow a(x) = 0$ であるから,

$$\begin{aligned} \chi_{a^{-1}(1)}(x) &= \begin{cases} 1, & x \in a^{-1}(1) \\ 0, & x \notin a^{-1}(1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & a(x) = 1 \\ 0, & a(x) = 0 \end{cases} \\ &= a(x). \end{aligned}$$

よって $\chi \circ \varphi = \mathrm{id}_{2^X}$. 一方, $A \in \mathcal{P}(X)$ に対し,

$$(\varphi \circ \chi)(A) = \varphi(\chi(A))$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi\left(\chi_A\right) \\
&= \chi_A^{-1}(1) \\
&= A.
\end{aligned}
$$

よって $\varphi \circ \chi = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(X)}$. □

Example 1.4.49. X を集合, $P(x)$ を述語とし, X の部分集合

$$\tilde{P} = \{x \in X \mid P(x)\}$$

を考える. $x \in \tilde{P}$ かどうかを知るには $P(x)$ がどのような内容の述語であれ $P(x)$ が真となるか偽となるかだけが分かればよい. このような観点からすると $P(x)$ を次で定まる X から $[2] = \{0, 1\}$ への写像 $\bar{P}\colon X \to [2]$ と考えることができる:

$$\bar{P}(x) = \begin{cases} 1, & P(x) \text{ が真} \\ 0, & P(x) \text{ が偽}. \end{cases}$$

あきらかに

$$\tilde{P} = \left\{x \in X \mid \bar{P}(x) = 1\right\}$$

すなわち, $\chi_{\tilde{P}} = \bar{P}$ である.

また $A \subset X$ に対し, 「$x \in A$」という述語を 2^X の元とみると, A の特性関数 χ_A に他ならない.

Example 1.4.50. $X \times Y$ の部分集合を考えることと, X から $\mathcal{P}(Y)$ への写像を与えることは同じことである：$\mathcal{P}(X \times Y) \cong \mathcal{P}(Y)^X$.

実際, $R \subset X \times Y$ に対し, $\tilde{\Phi}(R)\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ を $\tilde{\Phi}(R)(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in R\}$ により定めれば, この対応 $\tilde{\Phi}$ が全単射を与える. 逆は, $\psi\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ に対し, $\{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \psi(x)\}$ を対応させればよい. この写像 $\tilde{\Phi}$ に対応するのは Φ である：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X \times Y) \arrow[r, "\tilde{\Phi}"] \arrow[d, "\chi"'] & \mathcal{P}(Y)^X \arrow[d, "\chi_*"] \\
2^{X \times Y} \arrow[r, "\Phi"'] & \left(2^Y\right)^X .
\end{tikzcd}
$$

実際,

$$
\begin{aligned}
\chi_* \circ \tilde{\Phi}(R)(x)(y) = \chi_{\tilde{\Phi}(R)(x)}(y) &= \begin{cases} 1, & (x, y) \in R \\ 0, & (x, y) \notin R. \end{cases} \\
&= \Phi \circ \chi(R)(x)(y).
\end{aligned}
$$

Example 1.4.51. X を集合, $X \neq \emptyset$ とする．写像 $s\colon X \to \mathcal{P}(X)$ を $s(x) = \{x\}$ により定める．これを singleton map という．

合成 $\chi \circ s\colon X \to \mathcal{P}(X) \cong 2^X$ を考える． $\chi(s(x)) = \chi(\{x\}) = \chi_{\{x\}}$ であるから, $x, y \in X$ に対し

$$((\chi \circ s)(x))(y) = \chi_{\{x\}}(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

である．よって, $\chi s \in \left(2^X\right)^X$ の, 同型写像 $\Psi\colon \left(2^X\right)^X \xrightarrow{\cong} 2^{X \times X}$ による像 $\Psi(\chi s)$ は,

$$\begin{aligned} \Psi(\chi s)\colon \quad X \times X &\longrightarrow [2] \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y, \end{cases} \end{aligned}$$

すなわち, 対角線集合 $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\} \subset X \times X$ の特性関数である：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(X)^X \arrow[r, "\chi_*", "\cong"'] & \left(2^X\right)^X \arrow[r, "\Psi", "\cong"'] & 2^{X \times X} \arrow[r, "\chi^{-1}", "\cong"'] & \mathcal{P}(X \times X) \\[-20pt] \rotatebox{90}{$\in$} & & & \rotatebox{90}{$\in$} \\[-20pt] s \arrow[rrr, mapsto] & & & \Delta_X. \end{tikzcd}$$

Proposition 1.4.52. X を集合とする．集合 $[2]$ 上の演算 $\neg, \vee, \wedge, \to$ は, 各点毎の演算により 2^X 上の演算 を定める． ($a, b \in 2^X$ と $x \in X$ に対し, $(\neg a)(x) = \neg(a(x))$, $(a \vee b)(x) = a(x) \vee b(x)$ といった具合.) 任意の $A, B \subset X$ に対し次が成り立つ.

1. $\chi_{A^c} = \neg \chi_A$.
2. $\chi_{A \cup B} = \chi_A \vee \chi_B$.
3. $\chi_{A \cap B} = \chi_A \wedge \chi_B$.
4. $\chi_{A^c \cup B} = \chi_A \to \chi_B$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "()^c"'] & 2^X \arrow[d, "\neg"] \\ \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi"'] & 2^X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi \times \chi"] \arrow[d, "\cup"'] & 2^X \times 2^X \arrow[d, "\vee"] \\ \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi"'] & 2^X \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi \times \chi"] \arrow[d, "\cap"'] & 2^X \times 2^X \arrow[d, "\wedge"] \\ \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi"'] & 2^X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi \times \chi"] \arrow[d, "()^c \cup"'] & 2^X \times 2^X \arrow[d, "\to"] \\ \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi"'] & 2^X. \end{tikzcd}$$

Proof. $\chi_A(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A$ に注意すればいずれもほとんどあきらかであるが, 1 と 2 を示そう.

1.

$$\begin{aligned}
(\neg\chi_A)^{-1}(1) &= \{x \in X \mid \neg\chi_A(x) = 1\} \\
&= \{x \in X \mid \neg(\chi_A(x)) = 1\} \\
&= \{x \in X \mid \chi_A(x) = 0\} \\
&= \{x \in X \mid x \notin A\} \\
&= A^c.
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(\chi_A \vee \chi_B)(x) = 1 &\Leftrightarrow \chi_A(x) \vee \chi_B(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \\
&\Leftrightarrow x \in A \cup B \\
&\Leftrightarrow \chi_{A\cup B}(x) = 1.
\end{aligned}$$

□

exercise 16. 3,4 を示せ.

Remark . 演算 $\mu\colon [2] \times [2] \to [2]$, $\mu(p, q) = p \cdot q$ が与えられたとする. μ の定める各点毎の演算 $2^X \times 2^X \to 2^X$, すなわち $a, b \in 2^X$ に対し, $(a \cdot b)(x) = a(x) \cdot b(x)$ により定まる $a \cdot b \in 2^X$ を対応させる写像を考える. 元を代入して計算すればすぐわかるように, μ が結合的（可換, 単位元をもつ）ならば, 各点毎の演算もそうである.

この演算は全単射 $\chi\colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ を通して $\mathcal{P}(X)$ 上の演算を定める. すなわち, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ に対し, $A \cdot B \in \mathcal{P}(X)$ を $\chi^{-1}(\chi_A \cdot \chi_B)$ により定める. 言い換えれば, $A \cdot B$ は特性写像が $\chi_{A\cdot B} = \chi_A \cdot \chi_B$, すなわち, $\chi_{A\cdot B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$ によりあたえられる集合

$$A \cdot B = \{x \in X | \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = 1\}$$

である：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \arrow[r, "\chi\times\chi"] \arrow[d, "\cdot"'] & 2^X \times 2^X \arrow[d, "\cdot"] \\
\mathcal{P}(X) & 2^X. \arrow[l, "\chi^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

もちろん, μ が結合的（可換, 単位元をもつ）ならば, この $\mathcal{P}(X)$ 上の演算もそうである.

Proposition 1.4.53. $f\colon X \to Y$. $B \in \mathcal{P}(Y)$ に対し, $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)$ を対応させる写像 $\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を f^* と書く.

$\chi \circ f^* = f^* \circ \chi$ が成り立つ：

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\chi"', "\cong"] & \mathcal{P}(X) \arrow[d, "\chi", "\cong"'] \\ 2^Y \arrow[r, "f^*"'] & 2^X. \end{tikzcd}$$

すなわち, $f^{-1}(B) \subset X$ の特性関数は $\chi_{f^{-1}(B)} = f^*(\chi_B) = \chi_B \circ f$ により与えられる.

Proof. χ の逆写像を φ と書く. $\varphi \circ f^* = f^* \circ \varphi$ を示せばよい.

$$\begin{aligned} \varphi(f^*(a)) &= \varphi(a \circ f) \\ &= (a \circ f)^{-1}(1) \\ &= f^{-1}(a^{-1}(1)), \\ f^*(\varphi(a)) &= f^{-1}(a^{-1}(1)). \end{aligned}$$

□

Remark . $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ と書いてもよいのであるが, いろいろと混乱することがあるので, この講義では当面 f^* という記号を使う. f の誘導する写像 $2^Y \to 2^X$ も f^* と書くのであるが, χ により同一視すれば同じなので, こちらはさほど困ることはない.

Remark . あきらかに $f^*\colon 2^Y \to 2^X$ は各点毎の演算を保つ.

つまり $a, b \in 2^Y$ に対し,

$$\begin{aligned} (f^*(a \cdot b))(x) &= ((a \cdot b) \circ f)(x) = (a \cdot b)(f(x)) \\ &= a(f(x)) \cdot b(f(x)) = (f^*(a))(x) \cdot (f^*(b))(x) = (f^*(a) \cdot f^*(b))(x), \end{aligned}$$

すなわち $f^*(a \cdot b) = f^*(a) \cdot f^*(b)$.

よって逆像は, 対応する部分集合の演算を保つ. すなわち

$$\begin{aligned} \chi_{f^{-1}(A \cdot B)} &= f^*(\chi_{A \cdot B}) = f^*(\chi_A \cdot \chi_B) \\ &= f^*(\chi_A) \cdot f^*(\chi_B) = \chi_{f^{-1}(A)} \cdot \chi_{f^{-1}(B)} \\ &= \chi_{f^{-1}(A) \cdot f^{-1}(B)} \end{aligned}$$

となり, $f^{-1}(A \cdot B) = f^{-1}(A) \cdot f^{-1}(B)$ である.

Theorem 1.4.54. $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. 次は同値.
   (i) f は全射.
   (ii) $f^*\colon 2^Y \to 2^X$ は単射.
   (iii) $f^*\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ は単射.
2. 次は同値.
   (i) f は単射.
   (ii) $f^*\colon 2^Y \to 2^X$ は全射.
   (iii) $f^*\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ は全射.

Proof. いずれも (ii) と (iii) が同値であることは Prop. 1.4.53 よりあきらか.

1. (i)⇒(ii). $b_1, b_2 \in 2^Y$, $f^*(b_1) = f^*(b_2)$ とする. このとき $b_1 \circ f = f^*(b_1) = f^*(b_2) = b_2 \circ f$ である. $y \in Y$ とする. f は全射であるから, ある $x \in X$ が存在して $f(x) = y$ となる. よって, $b_1(y) = b_1(f(x)) = b_2(f(x)) = b_2(y)$. ゆえ $b_1 = b_2$.
   (iii)⇒(i). $f(X), Y \in \mathcal{P}(Y)$ に対し, $f^*(f(X)) = f^{-1}(f(X)) = X = f^{-1}(Y) = f^*(Y)$ であり, 仮定より f^* は単射なので, $f(X) = Y$.
   (もちろん $\chi_Y, \chi_{f(X)}$ を考えて (ii)⇒(i) を示してもよい.)
2. (i)⇒(iii). $A \in \mathcal{P}(X)$ とする. f は単射なので $f^{-1}(f(A)) = A$, すなわち $f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ に対し, $f^*(f(A)) = A$.
   (iii)⇒(i). $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$ とする. $\{x_1\} \in \mathcal{P}(X)$ に対し, f^* が全射であるから, $f^*(B) = \{x_1\}$, すなわち $f^{-1}(B) = \{x_1\}$ となる $B \in \mathcal{P}(Y)$ が存在する. $f(x_2) = f(x_1) \in B$ であるから, $x_2 \in f^{-1}(B) = \{x_1\}$, すなわち, $x_2 = x_1$.

□

1.4.6　誘導される写像の単射性と全射性

f の誘導する写像の単射性.

Theorem 1.4.55. $f\colon X \to Y$ を写像, Z を集合とする.

1. 次は同値.
   (i) f は単射.
   (ii) 任意の集合 Z に対し, $f_*\colon \mathrm{Map}(Z, X) \to \mathrm{Map}(Z, Y)$ が単射.
2. 次は同値.
   (i) f は全射.
   (ii) 任意の集合 Z に対し, $f^*\colon \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ が単射.

Proof. これは問題集 73(2)(3) の言い換えである．

1. (i)⇒(ii) $g, h\colon Z \to X$, $f \circ g = f \circ h$ とする．任意の $z \in Z$ に対し，

$$f(g(z)) = (f \circ g)(z) = (f \circ h)(z) = f(h(z))$$

であり，f は単射なので，$g(z) = h(z)$．よって $g = h$．
(ii)⇒(i) $Z = [1]$ に仮定を使うと，$f_*\colon X^{[1]} \to Y^{[1]}$ は単射．Ex. 1.4.41 でみたように次は可換であるから f も単射．

$$\begin{tikzcd} X^{[1]} \arrow[r, "f^{[1]}"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_0"', "\cong"] & Y^{[1]} \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{ev}_0"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

同じことであるが，直接やれば，こんな感じ．
$x_1, x_2 \in X$ が $f(x_1) = f(x_2)$ をみたすとする．写像 $g_i\colon [1] \to X$ を $g_i(0) = x_i$ により定めると，

$$(f_*(g_1))(0) = (f \circ g_1)(0) = f(g_1(0)) = f(x_1) = f(x_2) = (f_*(g_2))(0)$$

となり，$f_*(g_1) = f_*(g_2)$．f_* は単射だから $g_1 = g_2$．よって $x_1 = g_1(0) = g_2(0) = x_2$．

2. (i)⇒(ii) $g, h\colon Y \to Z$, $g \circ f = h \circ f$ とする．仮定より f は全射である．よって，任意の $y \in Y$ に対し，ある $x \in X$ が存在し，$y = f(x)$ となる．ゆえに

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$$

したがって $g = h$．
(ii)⇒(i) $Z = [2]$ に仮定を使えば，$f^*\colon [2]^Y \to [2]^X$ は単射．よって Thm. 1.4.54 より f は全射．
直接示すには $\chi_{f(X)}, \chi_Y\colon Y \to [2]$ を考えればよい．

□

f の誘導する写像の全射性．

Theorem 1.4.56. X を空でない集合，$f\colon X \to Y$ を写像，Z を集合とする．

1. 次は同値．
   (i) f は単射．

(ii) $\exists r\colon Y \to X : r \circ f = \mathrm{id}_X$.

(iii) $f^*\colon \ \mathrm{Map}(Y, X) \to \mathrm{Map}(X, X)$ が全射.

(iv) 任意の集合 Z に対し, $f^*\colon \ \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ が全射.

2. (ii),(iii),(iv) は同値である．また, (ii)⇒(i) が成り立つ.

(i) f は全射.

(ii) $\exists s\colon Y \to X : f \circ s = \mathrm{id}_Y$.

(iii) $f_*\colon \ \mathrm{Map}(Y, X) \to \mathrm{Map}(Y, Y)$ が全射.

(iv) 任意の集合 Z に対し, $f_*\colon \ \mathrm{Map}(Z, X) \to \mathrm{Map}(Z, Y)$ が全射.

Proof. 1. (i)⇒(iv) を示せばよい．$Z = \emptyset$ の場合はすぐわかる．$Z \neq \emptyset$ の場合を考える．$h\colon X \to Z$ を写像とする．次の図式が可換となるような写像 $g\colon Y \to Z$ を作ればよい．（このような写像 g を h の拡張という.）

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & Z \\ Y \arrow[ur, dotted, "g"'] & \end{tikzcd}.$$

f は単射なので, 逆写像 $f^{-1}\colon f(X) \to X$ がある．$z_0 \in Z$ をひとつとる.

$$g(y) = \begin{cases} h(f^{-1}(y)) & y \in f(X), \\ z_0 & y \notin f(X) \end{cases}$$

とすればよい.

2. (ii)⇒(iv) を示せばよい．$f_* \circ s_* = (f \circ s)_* = \mathrm{id}_* = \mathrm{id}$ ゆえ f_* は全射.

□

Remark . $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. 写像 $r\colon Y \to X$ で, $r \circ f = \mathrm{id}_X$ をみたすものをレトラクションという．あきらかに f がレトラクションを持てば f は単射である.
2. 写像 $s\colon Y \to X$ で $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ をみたすものを f の切断 (section) という．あきらかに f が切断を持てば f は全射である.

Thm. 1.4.56 によれば, f が単射であることとレトラクションをもつことは同値である．一方, f が全射ならば切断をもつか？ を考えてみる．$f\colon X \to Y$ が全射であるから, 各 $y \in Y$ に対し, $f(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在するので, そのような x をひとつ選び $s(y) = x$ とすればよい, ように思うが...

1.5　集合族

Definition 1.5.1.

1. 元がすべて集合であるような集合を集合族 (family of sets) という.
2. 集合 Λ から, ある集合族への写像を, Λ で添字付けられた集合族 (indexed family of sets) という.
   添字付けられた集合族 $A\colon \Lambda \to \mathcal{A}$ は, 普通, $A(\lambda) \in \mathcal{A}$ を A_λ と書いて, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と書かれることが多い.

Remark . 添字付けられた集合族は, 集合族の特別な場合ではない. 集合族と, 添字付けられた集合族との関係は, 数の集合と数列との関係と同様である.

なお, 集合族は, それ自身で添字付けられた集合族 (つまり, 恒等写像 $\mathrm{id}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$) と考えることが出来る.

濫用であるが以下, 添字付けられた集合族のことを, 単に集合族とよぶこともある.

Definition 1.5.2. $\mathcal{A} = \{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とする.

1. 集合
   $$\{x \mid \exists\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\}$$
   を集合族 $\mathcal{A}$ の和集合 (union) といって,
   $$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, \quad \bigcup \mathcal{A}$$
   等と表す.
   $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ の場合
   $$\bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$
   $\Lambda = \mathbb{N}$ の場合
   $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$
   と書くことが多い.
2. 集合
   $$\{x \mid \forall\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\}$$

を集合族 $\mathcal{A}$ の共通集合 (intersection) といって,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda, \quad \bigcap \mathcal{A}$$

等と表す.

$\Lambda = \{1, 2, \dots, n\}$ の場合

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i,$$

$\Lambda = \mathbb{N}$ の場合

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

と書くことが多い.

Caution! . $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ と書いたとき, A_∞ という集合が与えられているわけではない.

Remark . 添字集合が空集合 $\Lambda = \emptyset$ である添字付られた集合族 $A\colon \emptyset \to \mathcal{A}$ について考えてみる.

$$\begin{aligned}\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda &= \{x \mid \exists\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\} \\ &= \{x \mid \exists\lambda \in \emptyset : x \in A_\lambda\}\end{aligned}$$

となるが, 条件「$\exists\lambda \in \emptyset : x \in A_\lambda$」は常に偽であるから

$$= \emptyset$$

である.

一方, 共通集合については注意が必要である. 何らかの条件, 文脈を設定しなければ

$$\begin{aligned}\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda &= \{x \mid \forall\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\} \\ &= \{x \mid \forall\lambda \in \emptyset : x \in A_\lambda\}\end{aligned}$$

となるが, 条件「$\forall\lambda \in \emptyset : x \in A_\lambda$」は常に真であるから

$$= \bigl\{x \bigm| x \text{ は何でもよい}\bigr\}$$

となってしまい, これを集合と考えることはできない. したがって $\Lambda = \emptyset$ の場合を扱うには, 考えることの出来る元について何らかの制約を課す必要がある.

我々は, 添字付られた集合族, すなわち, 写像 $A\colon \Lambda \to \mathcal{A}$ を考えているので, $\mathcal{A}$ のメンバーの元のみを考えるのが自然であろうから

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \left\{ x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \;\middle|\; \forall\lambda\in\Lambda : x \in A_\lambda \right\}$$

と定義するのが妥当かもしれない. $\Lambda \neq \emptyset$ のときには上の定義と同じである. $\Lambda = \emptyset$ の場合

$$\left\{ x \in \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A \;\middle|\; \forall\lambda\in\emptyset : x \in A_\lambda \right\} = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$$

となる.

Example 1.5.3. 1.

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{2} A_i &= \bigcup_{i\in\{1,2\}} A_i \\ &= \{x \mid \exists i \in \{1,2\} : x \in A_i\} \\ &= \{x \mid x \in A_1 \lor x \in A_2\} \\ &= A_1 \cup A_2.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{2} A_i &= \bigcap_{i\in\{1,2\}} A_i \\ &= \{x \mid \forall i \in \{1,2\} : x \in A_i\} \\ &= \{x \mid x \in A_1 \land x \in A_2\} \\ &= A_1 \cap A_2.\end{aligned}$$

Example 1.5.4. 1. 外延的記法で集合および集合族を表記すると, 和集合をとるという操作は, 内側の括弧（{, }）を取り除くという操作である.

$$\bigcup \Big\{ \{1,2\}, \{1,3\} \Big\} = \{1,2,1,3\} = \{1,2,3\}$$

2. X を集合とすると

$$\bigcup \mathcal{P}(X) = X, \quad \bigcap \mathcal{P}(X) = \emptyset.$$

集合族の和集合や共通集合に対し, 二つの集合の和集合や共通集合と同様なことが成り立つ.

Lemma 1.5.5. $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族, B を集合とする. 次が成り立つ.

1. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.
2. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $A_\lambda \supset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.
3. 「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \subset B$」$\Leftrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset B$.
4. 「任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \supset B$」$\Leftrightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supset B$.

Proof. 1,2 はあきらか. 3,4 の「$\Leftarrow$」は 1,2 よりあきらか. 残りもあきらかであるが 3 の「$\Rightarrow$」を示してみよう.

$x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とする. 定義より, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して, $x \in A_\lambda$ となる. 仮定より $A_\lambda \subset B$ であるから $x \in B$. □

Theorem 1.5.6. A を集合, $\{B_\lambda\}_\Lambda$ を集合族とする.

1. $A \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \cup B_\lambda)$
2. $A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda)$

Proof. Thm. 1.1.14.1,2 からしたがう.

1.
$$\begin{aligned} A \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) &= \{x \mid x \in A \vee (\forall \lambda \in \Lambda : x \in B_\lambda)\} \\ &= \{x \mid \forall \lambda \in \Lambda : x \in A \vee x \in B_\lambda\} \\ &= \{x \mid \forall \lambda \in \Lambda : x \in A \cup B_\lambda\} \\ &= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A \cup B_\lambda) \end{aligned}$$

2. こちらは Lem. 1.5.5 を使って示してみよう.
   (i) $A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) \supset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda)$ であること.
   任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $B_\lambda \subset \bigcup B_\lambda$ であるから, $A \cap B_\lambda \subset A \cap (\bigcup B_\lambda)$. よって $\bigcup_\lambda (A \cap B_\lambda) \subset A \cap (\bigcup_\lambda B_\lambda)$.
   (ii) $A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A \cap B_\lambda)$ であること.
   $x \in A \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda\right)$ とする. $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ であるから, ある $\lambda \in \Lambda$ が存在し, $x \in B_\lambda$ である. また $x \in A$ なので $x \in A \cap B_\lambda$. よって $x \in \bigcup (A \cap B_\lambda)$.

□

Theorem 1.5.7. X を集合, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の部分集合の族, すなわち, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \subset X$ であるとする.

1.
$$\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

2.
$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.$$

Proof. 1 を示そう．

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c &= \left\{x \in X \;\middle|\; x \notin \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right\} \\
&= \left\{x \in X \;\middle|\; \neg\left(x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\right\} \\
&= \{x \in X \mid \neg(\exists\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda)\} \\
&= \{x \in X \mid \forall\lambda \in \Lambda : x \notin A_\lambda\} \\
&= \{x \in X \mid \forall\lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda^c\} \\
&= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c.
\end{aligned}$$

2 も同様．あるいは元をとって示してもよいし，1 を使ってもよい． □

問題集． 8(1), 10(1)〜(7), 11

Theorem 1.5.8. $f\colon X \to Y$ を写像, $\{A_i\}_{i\in I}$ を X の部分集合の族, $\{B_j\}_{j\in J}$ を Y の部分集合の族とする．次が成り立つ．

1. $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$.
3. $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.
4. $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

Proof. 証明は二つのときと同じである．

1. $A_i \subset \bigcup A_i$ ゆえ $f(A_i) \subset f\left(\bigcup A_i\right)$, よって $\bigcup f(A_i) \subset f\left(\bigcup A_i\right)$.
   一方, $y \in f\left(\bigcup A_i\right)$ とすると，ある $x \in \bigcup A_i$ が存在し，$y = f(x)$ となる．この x について, $x \in \bigcup A_i$ ゆえ，ある $I \in I$ が存在し，$x \in A_i$ となる．よって $y = f(x) \in f(A_i)$. ゆえ $y \in \bigcup f(A_i)$.
2. 練習問題.

3.

$$
\begin{aligned}
f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &= \left\{x \,\middle|\, f(x) \in \bigcup_{j\in J} B_j\right\} \\
&= \{x \mid \exists j \in J : f(x) \in B_j\} \\
&= \left\{x \mid \exists j \in J : x \in f^{-1}(B_j)\right\} \\
&= \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)
\end{aligned}
$$

4. 練習問題.

$\square$

Remark . もちろん, 1 を 3 と同様に証明することも出来るし, 3 を 1 と同様に証明することも出来る.

1.

$$
\begin{aligned}
f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &= \left\{y \,\middle|\, \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i : y = f(x)\right\} \\
&= \left\{y \,\middle|\, \exists x : \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right) \wedge (y = f(x))\right\} \\
&= \{y \mid \exists x : (\exists i \in I : x \in A_i) \wedge (y = f(x))\} \\
&= \{y \mid \exists x : \exists i \in I : (x \in A_i) \wedge (y = f(x))\} \\
&= \{y \mid \exists i \in I : \exists x : (x \in A_i) \wedge (y = f(x))\} \\
&= \{y \mid \exists i \in I : \exists x \in A_i : y = f(x)\} \\
&= \{y \mid \exists i \in I : y \in f(A_i)\} \\
&= \bigcup_{i\in I} f(A_i).
\end{aligned}
$$

この証明は本質的に上の証明と同じである.
なお, 4 行目から 5 行目の変形で, $\exists x$ と $\exists i \in I$ を入れ替えていることに注意せよ.
2 で等号が成り立たないのは $\exists x$ と $\forall i \in I$ を入れ替えることが一般には出来ないことによる.

2.

$$
\begin{aligned}
f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) &= \left\{y \,\middle|\, \exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i : y = f(x)\right\} \\
&= \left\{y \,\middle|\, \exists x : \left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right) \wedge (y = f(x))\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \{y \mid \exists x : (\forall i \in I : x \in A_i) \wedge (y = f(x))\} \\
&= \{y \mid \exists x : \forall i \in I : (x \in A_i) \wedge (y = f(x))\} \\
&\subset \{y \mid \forall i \in I : \exists x : (x \in A_i) \wedge (y = f(x))\} \\
&= \{y \mid \forall i \in I : \exists x \in A_i : y = f(x)\} \\
&= \{y \mid \forall i \in I : y \in f(A_i)\} \\
&= \bigcap_{i \in I} f(A_i).
\end{aligned}
$$

exercise 17. 1. 上の 2 を示せ.

2. f が単射であるとき 2 で等号は成り立つか.
3. 上の 4 を示せ.

確率論（測度論）でよく使われる集合の上極限, 下極限を紹介しておく.

Definition 1.5.9. $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を集合族とする.

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim_n} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right), \\
\underline{\lim_n} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right)
\end{aligned}
$$

をそれぞれ集合族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ の上極限 (limit superior), 下極限 (limit inferior) という.

Example 1.5.10. $\mathbb{N}$ の部分集合の族 $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を

$$
A_i = \begin{cases} \{i, i+1, i+2, \dots\} & i : \text{偶数} \\ \{1, 2, \dots, i\} & i : \text{奇数} \end{cases}
$$

により定める. $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2, 3, 4, \dots\}$, $A_3 = \{1, 2, 3\}$ といった具合である. $n \in \mathbb{N}$ に対し $A_{2n-1} = \{1, \dots, 2n-1\}$, $A_{2n} = \{2n, 2n+1, \dots\}$ であるから $A_{2n-1} \cup A_{2n} = \mathbb{N}$, $A_{2n-1} \cap A_{2n} = \emptyset$ であることに注意する. $2n - 1 \geq n$ であるから

$$
\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \supset A_{2n-1} \cup A_{2n} = \mathbb{N} \qquad \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \subset A_{2n-1} \cap A_{2n} = \emptyset
$$

となり

$$
\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \mathbb{N} \qquad \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \emptyset
$$

である．よって

$$\varlimsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathbb{N} = \mathbb{N} \qquad \varliminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\emptyset = \emptyset.$$

Example 1.5.11. 集合族 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を

$$X_i = \{I \subset \mathbb{N} \mid i \in I\}$$

により定める．

$$\begin{aligned}
\varlimsup_n X_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} X_i\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} \{I \subset \mathbb{N} \mid i \in I\}\right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{I \subset \mathbb{N} \mid \exists i \geq n : i \in I\} \\
&= \{I \subset \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists i \geq n : i \in I\} \\
&= \left\{I \subset \mathbb{N} \;\middle|\; I \text{ は無限集合}\right\}, \\
\varliminf_n X_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} X_i\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} \{I \subset \mathbb{N} \mid i \in I\}\right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{I \subset \mathbb{N} \mid \forall i \geq n : i \in I\} \\
&= \{I \subset \mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall i \geq n : i \in I\} \\
&= \left\{I \subset \mathbb{N} \;\middle|\; I^c \text{ は有限集合}\right\}.
\end{aligned}$$

上の例を参考に集合族の上極限, 下極限の意味を少し考えてみよう．$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を集合族とし, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ とおく．$a \in A$ に対し, $\mathbb{N}$ の部分集合 $I(a)$ を, A_i が a を含むような番号 i たちの集合とする, すなわち,

$$I(a) = \{i \in \mathbb{N} \mid a \in A_i\}.$$

あきらかに $a \in A_i \Leftrightarrow i \in I(a)$ である．

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim_n} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{a \mid \exists i \geq n : a \in A_i\} \\
&= \{a \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists i \geq n : a \in A_i\} \\
&= \{a \mid \forall n \in \mathbb{N}, \exists i \geq n : i \in I(a)\} \\
&= \left\{a \;\middle|\; I(a) \text{ は無限集合} \right\}, \\
\underline{\lim_n} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right) \\
&= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a \mid \forall i \geq n : a \in A_i\} \\
&= \{a \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall i \geq n : a \in A_i\} \\
&= \{a \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall i \geq n : i \in I(a)\} \\
&= \left\{a \;\middle|\; I(a)^c \text{ は有限集合} \right\}.
\end{aligned}
$$

つまり，$\overline{\lim}_n A_n$ は，無限個の番号 i に対して $a \in A_i$ となるような a たちの集合で，$\underline{\lim}_n A_n$ は，有限個の番号 i を除いて $a \in A_i$ （つまり，A_i が a を含まないような番号 i が有限個である）ような a たちの集合である．

問題集． 12(1),(2),(3)

Definition 1.5.12. $\mathcal{X} = \{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を集合族とする．Λ から $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ への写像 f であって，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し，$f(\lambda) \in X_\lambda$ となるようなもの全体を $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積 (direct product) といって，

$$
\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \quad \prod \mathcal{X}
$$

等と表す．つまり

$$
\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = \left\{ f \in \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right)^{\Lambda} \;\middle|\; \forall \lambda \in \Lambda : f(\lambda) \in X_\lambda \right\}.
$$

しばしば，直積の元 f を $(x_\lambda : \lambda \in \Lambda)$ という記号で表す．ただし $x_\lambda = f(\lambda)$ である．

　また，$\lambda \in \Lambda$ に対し，$\pi_\lambda(f) = f(\lambda)$ で与えられる写像

$$
\pi_\lambda \colon \prod \mathcal{X} \to X_\lambda
$$

$$f \mapsto f(\lambda)$$

を（λ 成分への）標準的射影という．

$\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$ や $\Lambda = \mathbb{N}$ のとき，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を $\prod_{i=1}^{n} X_i$ や $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ とも書く．

Remark . λ 成分への標準的射影は包含写像と値写像の合成である：

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda & \xrightarrow{\pi_\lambda} & X_\lambda \\
\cap & & \cap \\
\left(\displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\right)^{\Lambda} & \xrightarrow[\mathrm{ev}_\lambda]{} & \displaystyle\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda
\end{array}$$

Example 1.5.13. X_λ が全て同じ $X_\lambda = X$ であるとき，

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = X^\Lambda$$

である．

Example 1.5.14. $\{X_i\}_{i\in[2]}$ を集合族とする．ただし $[2] = \{0, 1\}$ である．標準的射影を用いて与えられる写像

$$\begin{array}{rccc}
\pi = (\pi_0, \pi_1)\colon & \displaystyle\prod_{i\in[2]} X_i & \longrightarrow & X_0 \times X_1 \\
& f & \longmapsto & (f(0), f(1))
\end{array}$$

はあきらかに全単射である．これにより $\prod_{i=0}^{1} X_i$ と $X_0 \times X_1$ をしばしば同一視する．

同様に集合として $\prod_{i=0}^{n-1} X_i$ と $X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$ は異なるが，標準的射影を用いて与えられる全単射

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\prod_{i=0}^{n-1} X_i & \longrightarrow & X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{n-1} \\
f & \longmapsto & (f(0), f(1), \ldots, f(n-1))
\end{array}$$

により，しばしば同一視することがある．

なお，$X_0 = \cdots = X_{n-1}$ であるとき，この同一視は Ex. 1.4.39 で与えた $(\mathrm{ev}_0, \ldots, \mathrm{ev}_{n-1})\colon X^{[n]} \to X^n$ に他ならない．

Definition 1.5.15. $\mathcal{X} = \{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とする．直積 $\Lambda \times \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の部分集合 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を以下で定め，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の<u>直和 (direct sum)</u> または<u>非交和 (disjoint union)</u> という．

つまり

$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \{(\lambda, x) \mid \lambda \in \Lambda \wedge x \in X_\lambda\} \subset \Lambda \times \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda.$$

Example 1.5.16. $X_0 = [0,2], X_1 = [1,3]$ であるとき，

$$\begin{aligned}\coprod_{\lambda\in\{0,1\}} X_\lambda &= \{(\lambda, x) \mid \lambda \in \{0,1\} \wedge x \in X_\lambda\} \\ &= \{(\lambda, x) \mid (\lambda = 0 \wedge x \in [0,2]) \vee (\lambda = 1 \wedge x \in [1,3])\} \\ &= (\{0\} \times [0,2]) \cup (\{1\} \times [2,3]) \subset \{0,1\} \times [0,3].\end{aligned}$$

問題集． 29

1.6　同値関係

集合を仲間分け, グループ分けするという行為は子供の頃からおなじみであろう．同じ仲間であるという「関係」でグループ分けするのであるが, 集合をきちんとグループ分けできる（どのメンバーもいずれかのグループに入っており, また異なるグループは交わらない, つまりどのメンバーもただひとつのグループに入る）ためにはこの「関係」にどのような条件がいるのか, というのを抽象したのが同値関係とよばれる関係である．

まずグループ分けというのをきちんと定式化しよう．

Definition 1.6.1. X を集合とする．X の部分集合の族 $\mathcal{P}$ （すなわち $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$）は次の条件をみたすとき X の分割 (partition) であるという：

1. $\emptyset \notin \mathcal{P}$.
2. $\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = X$.
3. 任意の $A, B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$ に対し, $A \cap B = \emptyset$.

もちろん, 条件 2 は, どのメンバーもいずれかのグループに入るということであり, 条件 3 は異なるグループは交わらないということである．条件 1 は, メンバーのいないグループはないということ．

Example 1.6.2.

1. 集合 $[1] = \{0\}$ の分割は
   - $\{\{0\}\}$

   の 1 つだけ．
2. 集合 $[2] = \{0, 1\}$ の分割は
   - $\{\{0, 1\}\}$
   - $\{\{0\}, \{1\}\}$

   の 2 つ．
3. 集合 $[3] = \{0, 1, 2\}$ の分割は
   - $\{\{0, 1, 2\}\}$
   - $\{\{0\}, \{1, 2\}\}$
   - $\{\{1\}, \{0, 2\}\}$
   - $\{\{2\}, \{0, 1\}\}$
   - $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$

   の 5 つ．

Remark．空集合 $\emptyset$ の分割を考えてみよう．$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ だから, $\mathcal{P}(\emptyset)$ の部分集合は $\emptyset, \{\emptyset\}$

の 2 つ．$\emptyset \in \{\emptyset\}$ であるから $\{\emptyset\}$ は空集合の分割ではない．一方, $\emptyset \subset \mathcal{P}(\emptyset)$ については, $\emptyset \notin \emptyset$, $\bigcup_{A\in\emptyset} A = \emptyset$ である．また, $A \in \emptyset$ となる A はないので分割の条件 3 も成り立っている．すなわち $\emptyset$ は $\emptyset$ の分割である．よって空集合の分割は 1 つ．

Definition 1.6.3. 集合 X 上の関係が次の 3 つの条件:

1. （反射律, reflexive law）　$x \sim x$,
2. （対称律, symmetric law）　$x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
3. （推移律, transitive law）　$x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

を満たすとき, 関係 $\sim$ は集合 X 上の同値関係 (equivalence relation) であるという．

exercise 18.

1. $\mathbb{Z}$ における関係 $\sim$ を $x \sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$「$x, y$ がどちらも奇数」により定める．この関係 $\sim$ は反射律, 対称律, 推移律をみたすか？
2. 次の議論は正しくない．どこが？

   X を集合とし, X 上の関係 $\sim$ が対称律と推移律をみたすとする．このとき $\sim$ は反射律もみたし同値関係である．実際, $x \in X$ とすると, 対称律より $x \sim y$ ならば $y \sim x$ である．よって推移律より $x \sim x$ となる．

Definition 1.6.4. 関係 $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする．X の要素 $a \in X$ に対し, a と同値な要素全体のなす X の部分集合

$$C_a = \{x \in X \mid x \sim a\}$$

を a の同値類 (equivalence class) という．a の同値類を $[a]$, $\bar{a}$ 等と書くことも多い．

$x \in C_a$ をひとつとることを, x を C_a の代表元 (representative) としてとるという．

Lemma 1.6.5. 同値類は次の性質をもつ:

1. $a \in C_a$,
2. 次は同値
   - (i) $a \sim b$.
   - (ii) $C_a = C_b$.
   - (iii) $C_a \cap C_b \neq \emptyset$.
3. 次は同値
   - (i) $a \not\sim b$.
   - (ii) $C_a \neq C_b$.
   - (iii) $C_a \cap C_b = \emptyset$.

Proof.　1. 反射律より $a \sim a$ ゆえ $a \in C_a$.

2. (i)⇒(ii). $a \sim b$ とする. $x \in C_a$ とすると $x \sim a$ ゆえ推移律より $x \sim b$ となり $x \in C_b$, すなわち $C_a \subset C_b$. 対称律より $b \sim a$ だから $C_b \subset C_a$.
(ii)⇒(iii) $C_a = C_b$ とする. このとき $a \in C_a = C_a \cap C_b$ ゆえ $C_a \cap C_b \neq \emptyset$.
(iii)⇒(i) $C_a \cap C_b \neq \emptyset$ とする. $c \in C_a \cap C_b$ をひとつとる. $c \sim a$ かつ $c \sim b$ ゆえ対称律と推移律より $a \sim b$.
3. 2 よりあきらか.

□

Corollary 1.6.6. 同値類の全体のなす集合 $\{C_a \mid a \in X\}$ は X の分割を与える. この分割を同値関係 $\sim$ による X の類別 (classification) という.

Proof. Lem. 1.6.5 より, $a \in C_a$ ゆえ, $C_a \neq \emptyset$ であり $X = \bigcup_{a \in X}\{a\} \subset \bigcup_{a \in X} C_a \subset X$. また, $C_a \neq C_b$ なら $C_a \cap C_b = \emptyset$. □

同値関係を与えることと分割を与えることは同じである.

Proposition 1.6.7. 1. $\mathcal{P}$ を X の分割とする. 関係 $\sim_{\mathcal{P}}$ を

$$x \sim_{\mathcal{P}} y \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{P} : x, y \in A$$

により定めると, $\sim_{\mathcal{P}}$ は同値関係であり, この同値関係による類別は $\mathcal{P}$ である.

2. $\sim$ を X 上の同値関係とし, $\mathcal{P} = \{C_a \mid a \in X\}$ を $\sim$ による類別とする. この $\mathcal{P}$ から 1 により定まる同値関係 $\sim_{\mathcal{P}}$ は $\sim$ である.

exercise 19. 証明せよ.

Definition 1.6.8. X を集合, $\sim$ を X 上の同値関係とする.

1. 同値類の全体 $\{C_a \mid a \in X\}$ を $X/\sim$ と書き, 同値関係 $\sim$ による X の商集合 (quotient set) という.
2. $a \in X$ を $C_a \in X/\sim$ にうつす写像

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X/\sim \\ \cup & & \cup \\ a & \longmapsto & C_a \end{array}$$

を自然な写像 あるいは商写像, 自然な射影などという.

3. $A \subset X$ が完全代表系 (complete system of representatives) である
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 包含写像と商写像の合成

$$A \hookrightarrow X \to X/\sim$$

が全単射.

言い換えれば, A が完全代表系であるとは次の 2 つが成り立つということ.

- $\forall x \in X, \exists a \in A : x \sim a$.
- $\forall a, b \in A(a \neq b) : a \not\sim b$.

すなわち, X のどの元も A の元のいずれかと同値であり, また, A の元同士は同値ではない.

Remark . もちろん, 完全代表系は一般に一意に定まるわけではない.

exercise 20. 自然な射影 $X \to X/\sim$ は全射であることを示せ.

Example 1.6.9. 集合 X における等しいという関係 $=$（$X \times X$ の部分集合としては対角線集合 Δ_X）は同値関係である. $x \in X$ の同値類は $\{x\}$ であり, 商集合 $X/{=}$ は自然に X と同一視される. （厳密に言えば, $X/{=} \subset \mathcal{P}(X)$ は singleton map $s \colon X \to \mathcal{P}(X)$ の像であり, s が全単射 $X \to X/{=}$ を与える.）

Example 1.6.10. 集合 X における関係 $\sim$ を, 任意の $x, y \in X$ に対し $x \sim y$ で定める（$X \times X$ の部分集合としては $X \times X$）と, あきらかに同値関係であり, 同値類は X のみで, 商集合は 1 点のみからなる集合 $X/\sim = \{X\}$ である.

Example 1.6.11. $n \in \mathbb{N}$ とする. $x, y \in \mathbb{Z}$ に対し, $x \sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} n|(x-y)$ と定めると, $\sim$ は同値関係である. 実際,

1. $x - x = 0$ は n の倍数であるので $x \sim x$.
2. $x \sim y$ であるとすると, $x - y$ は n の倍数であるから, $y - x = -(x - y)$ もそうである. よって $y \sim x$.
3. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ であるとする. このとき $x - y, y - z$ は n の倍数である. よって $x - z = (x - y) + (y - z)$ も n の倍数である. ゆえ,$x \sim z$.

$\mathbb{Z}$ におけるこの同値関係を普通

$$x \equiv y \pmod n$$
$$x \equiv y \quad (n)$$

等と書き, x と y は<u>nを法として合同 (congruent modulo n)</u> であるという.

この同値関係による同値類を n を法とする<u>合同類 (congruence class)</u> あるいは<u>剰余類 (residue class)</u> という. $x \in \mathbb{Z}$ の同値類を

$$x \bmod n \qquad\qquad x + n\mathbb{Z}$$

等と書くことも多い.

また, この同値関係による商集合を

$$\mathbb{Z}/n \qquad\qquad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

等と書く.

Example 1.6.12. 集合 $\mathbb{N}\cup\{0\}$ を $\bar{\mathbb{N}}$ と書く. （世の中一般にこう書くわけではない.）集合 $\bar{\mathbb{N}}^2$ における関係 $\sim$ を $(l,m)\sim(p,q) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} l+q=m+p$ により定めると同値関係である. 実際,

1. $l+m=m+l$ だから $(l,m)\sim(l,m)$.
2. $(l,m)\sim(p,q) \Leftrightarrow l+q=m+p \Leftrightarrow p+m=q+l \Leftrightarrow (p,q)\sim(l,m)$.
3. $(l,m)\sim(p,q)$ かつ $(p,q)\sim(s,t)$ とすると, $l+q=m+p$ かつ $p+t=q+s$ だから, $l+t+p+q=m+s+p+q$ ゆえ $l+t=m+s$ となり $(l,m)\sim(s,t)$.

Example 1.6.13. 集合 $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ における関係 $\sim$ を $(l,m)\sim(p,q) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} lq=mp$ により定めると同値関係である. 実際,

1. $lm=ml$ だから $(l,m)\sim(l,m)$.
2. $(l,m)\sim(p,q) \Leftrightarrow lq=mp \Leftrightarrow pm=ql \Leftrightarrow (p,q)\sim(l,m)$.
3. $(l,m)\sim(p,q)$ かつ $(p,q)\sim(s,t)$ とすると, $lq=mp$ かつ $pt=qs$ である. $p=0$ のときは, （$q\neq 0$ だから） $l=s=0$ となり, $lt=0=ms$ ゆえ $(l,m)\sim(s,t)$. $p\neq 0$ のときは, $ltpq=mspq$ ゆえ $lt=ms$ となり $(l,m)\sim(s,t)$.

Example 1.6.14. $\mathbb{R}$ において, $x\sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x-y\in\mathbb{Z}$ により関係 $\sim$ を定めると, これは同値関係である. この同値関係による商集合を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と書く.

問題集 . 33

仲間分けする基準として多く使うのは「何かが同じ」であるという関係であろう. これは次のように定式化できる.

Proposition 1.6.15. X, Y を集合, $f\colon X\to Y$ を写像とする.

1. X における関係 $\sim$ を $x\sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x)=f(y)$ により定めると, これは同値関係である.
2. $\pi\colon X\to X/{\sim}$ をこの関係による商集合への自然な射影, すなわち $x\in X$ に, x を含む同値類 $C_x\in X/{\sim}$ を対応させる写像とする. このとき, 単射 $\bar{f}\colon X/{\sim}\to Y$ が

存在して, $f = \bar{f} \circ \pi$ と表される:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim . \arrow[ur, dotted, "\exists \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

この写像 $\bar{f}$ を f により誘導される写像 (induced map) という. (Prop. 1.6.21 参照.)

特に, $\bar{f}$ により全単射

$$\bar{f} \colon X/\sim \to \operatorname{Im} f$$

がえられる.

Proof. 1. (i) $f(x) = f(x)$ ゆえ $x \sim x$.

(ii) $f(x) = f(y)$ なら $f(y) = f(x)$.

(iii) $f(x) = f(y)$ かつ $f(y) = f(z)$ なら $f(x) = f(z)$.

2. 写像 $\bar{f} \colon X/\sim \to Y$ を $\bar{f}(C_x) = f(x)$ により定める. $C_x = C_y$ のとき $x \sim y$ なので $f(x) = f(y)$ であるから, $f(x)$ は C_x の代表元のとり方によらず, この定義は意味をもつ. (このようなときしばしば「$\bar{f}$ は well-defined である」という.)
あきらかに $f = \bar{f} \circ \pi$ である ($\bar{f} \circ \pi(x) = \bar{f}(C_x) = f(x)$) .
また $\bar{f}(C_x) = \bar{f}(C_y)$ とすると, $f(x) = f(y)$ だから $x \sim y$ ゆえ $C_x = C_y$. すなわち $\bar{f}$ は単射.

□

exercise 21. この同値関係による $x \in X$ の同値類は $f^{-1}(f(x))$ である.

Example 1.6.16. $n \in \mathbb{N}$ とする. 写像 $r \colon \mathbb{Z} \to [n] = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ を $x \in \mathbb{Z}$ に対し x を n で割った余りを対応させる写像とする. すなわち, $r(x) \in [n]$ は

$$x = nq + r(x), \quad q, r(x) \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r(x) < n$$

により定まるものである. 余りのことを剰余 (remainder) という.

あきらかに $x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow r(x) = r(y)$ である, つまり n を法として合同という関係は n で割った余りが同じという関係である.

包含写像と r の合成 $[n] \hookrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{r} [n]$ は恒等写像なので r は全射である. よって $\bar{r} \colon \mathbb{Z}/n \to [n]$ は全単射である. また $\{0, \ldots, n-1\} \subset \mathbb{Z}$ は合同に関する完全代表系で

ある．

$$\begin{tikzcd}
{[n]} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z} \arrow[r, "r"'] \arrow[d] & {[n]} \\
& \mathbb{Z}/n \arrow[ur, "\bar{r}", "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Example 1.6.17. 写像 $d\colon \bar{\mathbb{N}}^2 \to \mathbb{Z}$ を $d(l,m) = l - m$ により定める．ただし $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である．

$d(l,m) = d(p,q) \Leftrightarrow l - m = p - q \Leftrightarrow l + q = m + p$ であるから，Ex. 1.6.12 の同値関係 $\sim$ は $(l,m) \sim (p,q) \Leftrightarrow d(l,m) = d(p,q)$ をみたす，つまり，差が同じという関係である．

あきらかに d は全射であるから，$\bar{d}\colon \bar{\mathbb{N}}^2/\sim\, \to \mathbb{Z}$ は全単射である．また完全代表系として $(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup \{(0,0)\} \cup (\{0\} \times \mathbb{N})$ がとれる．

Example 1.6.18. 写像 $\rho\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ を $\rho(l,m) = \frac{l}{m}$ で定める．

$\rho(l,m) = \rho(p,q) \Leftrightarrow \frac{l}{m} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow lq = mp$ であるから，Ex. 1.6.13 の同値関係 $\sim$ は $(l,m) \sim (p,q) \Leftrightarrow \rho(l,m) = \rho(p,q)$ をみたす，つまり，商が同じという関係である．

あきらかに ρ は全射であるから，$\bar{\rho}\colon (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})\,/\sim\, \to \mathbb{Q}$ は全単射である．

ρ を $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{N}$ に制限すると，全射 $\rho\colon \mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ がえられる．これにより全単射 $\bar{\rho}\colon (\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{N})\,/\sim\, \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ をえる．

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})\,/\sim \arrow[r, "\bar{\rho}", "\cong"'] & \mathbb{Q} \\
(\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{N})\,/\sim \arrow[r, "\cong", "\bar{\rho}"'] \arrow[u, hook] & \mathbb{Q} \setminus \{0\} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Example 1.6.19. $p\colon \mathbb{R} \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ を $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ で定める．

$p(\theta) = p(\tau) \Leftrightarrow e^{2\pi i\theta} = e^{2\pi i\tau} \Leftrightarrow e^{2\pi i(\theta - \tau)} = 1 \Leftrightarrow \theta - \tau \in \mathbb{Z}$ であるから Ex. 1.6.14 の同値関係 $\sim$ は $\theta \sim \tau \Leftrightarrow p(\theta) = p(\tau)$ をみたす．p は全射であるから，$\bar{p}\colon \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$ は全単射である．

Example 1.6.20. X, Y を集合，$\sim, \approx$ をそれぞれ X, Y 上の同値関係，$p\colon X \to X/\sim$, $q\colon Y \to Y/\approx$ をそれぞれ自然な射影とする．

集合 $X \times Y$ における関係 $\simeq$ を $(x,y) \simeq (x',y') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \sim x' \wedge y \approx y'$ により定める．

写像 $p \times q\colon X \times Y \to X/\sim \times Y/\approx$ を考えると，

$$\begin{aligned}
(p \times q)(x,y) = (p \times q)(x',y') &\Leftrightarrow (p(x), q(y)) = (p(x'), q(y')) \\
&\Leftrightarrow p(x) = p(x') \wedge q(y) = q(y') \\
&\Leftrightarrow x \sim x' \wedge y \approx y'
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) \simeq (x',y')$$

であるから $\simeq$ は同値関係であり（もちろん直接確かめてもよい），$(x,y) \in X \times Y$ の同値類は $C_x \times C_y$ である．$p \times q$ は全射であるから，全単射

$$\overline{p \times q}\colon (X \times Y)/\simeq \;\to (X/\sim) \times (Y/\approx)$$

をえる．もちろん，具体的に書けば $\overline{p \times q}(C_x \times C_y) = (C_x, C_y)$ であり，逆写像は $(C_x, C_y) \mapsto C_x \times C_y$ で与えられる．

同じグループのメンバーが皆同じ性質を持っていれば，そのグループはその性質を持っているといってよいであろう．次の命題はこれを定式化したものである．内容，証明ともに Prop. 1.6.15.2 とほぼ同じである．

Proposition 1.6.21. X を集合，$\sim$ を X 上の同値関係とし，$\pi\colon X \to X/\sim$ をこの関係による商集合への自然な射影，すなわち $x \in X$ に，x を含む同値類 $C_x \in X/\sim$ を対応させる写像とする．

$f\colon X \to Y$ を写像とする．次は同値である．

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$.
2. $f = \bar{f} \circ \pi$ となるような写像 $\bar{f}\colon X/\sim \to Y$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
X/\sim . \arrow[ur, dotted, "\exists \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

さらに，このような写像 $\bar{f}$ は一意的である．この写像 $\bar{f}$ を f により誘導される写像 (induced map) という．

具体的に書けば $\bar{f}(C_x) = f(x)$ である．

Proof. $1 \Rightarrow 2$ の証明は Prop. 1.6.15 と同じ．$2 \Rightarrow 1$ を示そう．$f = \bar{f} \circ \pi$ であるとする．$x \sim x'$ とすると，$\pi(x) = \pi(x')$ であるから，

$$f(x) = (\bar{f} \circ \pi)(x) = \bar{f}(\pi(x)) = \bar{f}(\pi(x')) = (\bar{f} \circ \pi)(x') = f(x').$$

π は全射なのでこのような写像 $\bar{f}$ は一意的である． □

Corollary 1.6.22. X, Y を集合，$\sim, \approx$ をそれぞれ X, Y 上の同値関係，$p\colon X \to X/\sim$, $q\colon Y \to Y/\approx$ をそれぞれ自然な射影とする．

$f\colon X \to Y$ を写像とする．次は同値である．

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$.
2. $q \circ f = \bar{f} \circ p$ となるような写像 $\bar{f}\colon X/{\sim} \to Y/{\approx}$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ X/{\sim} \arrow[r, dotted, "\exists \bar{f}"'] & Y/{\approx}. \end{tikzcd}$$

この $\bar{f}$ は $\bar{f}(C_x) = C_{f(x)}$ により与えられる．

Proof. $q \circ f\colon X \to Y/{\approx}$ に Prop. 1.6.21 を使えばよい． □

Example 1.6.23. 整数の加法 $+\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(l,m) \mapsto l+m$ を考える．$l \equiv l' \pmod n$ かつ $m \equiv m' \pmod n$ であれば $l+m \equiv l'+m' \pmod n$ であるから，加法は写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (\bar{l}, \overline{m}) & \longmapsto & \overline{l+m} \end{array}$$

を定める．もう少し丁寧に書けば，次の図式の下の行の合成がこの写像である．ただし，$\sim$ は

$$(l,m) \sim (l',m') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} l \equiv l' \pmod n \text{ かつ } m \equiv m' \pmod n$$

により定まる同値関係，下の行の左側の全単射は Prop. 1.6.20 の全単射の逆写像であり，下の行の右側の写像は Cor. 1.6.22 であたえられる写像である：

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[r, "+"] \arrow[dl] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\ \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n \arrow[r, "\cong"'] & (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/{\sim} \arrow[r] & \mathbb{Z}/n. \end{tikzcd}$$

普通この写像も $+$ を使って表す．すなわち $\bar{l} + \overline{m} := \overline{l+m}$.

同様に整数の乗法 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(l,m) \mapsto lm$ も $\bar{l}\cdot\overline{m} := \overline{lm}$ により $\mathbb{Z}/n$ に乗法を定める．

$\mathbb{Z}/n$ のこの加法と乗法は，整数の加法，乗法と同様な性質（結合律，可換律，分配律等）をみたし，これにより $\mathbb{Z}/n$ は<u>可換環</u>となる．

Example 1.6.24. 集合 $[2] = \{0,1\}$ は $\mathbb{Z}/2$ と自然に同一視される．これにより [2] に加法，乗法が定まる．奇数たす奇数は偶数（$1+1=0$），偶数かける奇数は偶数（$0\cdot 1 = 0$）等といった具合である．

$p+q$

$p\backslash q$	0	1
0	0	1
1	1	0

$p\cdot q$

$p\backslash q$	0	1
0	0	0
1	0	1

すぐわかるように

$$p\cdot q = p\wedge q$$

である．また

$$\begin{aligned} p+q &= \neg(p\leftrightarrow q) \\ &= \neg(p\to q\wedge q\to p) \\ &= (p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg p) \end{aligned}$$

である．

X を集合とする．各点毎の積, 和, すなわち

$$\begin{aligned} (a\cdot b)(x) &= a(x)\cdot b(x) \\ (a+b)(x) &= a(x)+b(x) \end{aligned}$$

により 2^X 上に積, 和が定まる．X の部分集合 A, B に対し

$$\begin{aligned} \chi_A\chi_B &= \chi_{A\cap B} \\ \chi_A+\chi_B &= \chi_{(A\cap B^c)\cup(B\cap A^c)} = \chi_{A\oplus B} \end{aligned}$$

である．[2] の, よって 2^X の和, 積が可換, 結合的, 分配的であり加法および乗法の単位元をもつので集合の共通部分 $\cap$ と対称差 $\oplus$ も可換, 結合的, 分配的であり単位元をもつ．($\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}/2$ の加法, 乗法が可換, 結合的, 分配的であり加法および乗法の単位元をもつことを確かめることと, $\cap$ と $\oplus$ に対しこれらを直接確かめることのどちらが面倒かというと多分前者のような気はするけれど.)

Example 1.6.25. $\bar{\mathbb{N}}^2$ 上の演算 $\ominus\colon \bar{\mathbb{N}}^2\times\bar{\mathbb{N}}^2\to\bar{\mathbb{N}}^2$, $(l,m)\ominus(p,q)=(l+q,m+p)$ は Ex. 1.6.12 の同値関係による商集合上の演算 $\bar{\mathbb{N}}^2/\sim\times\bar{\mathbb{N}}^2/\sim\to\bar{\mathbb{N}}^2/\sim$ を定める．

exercise 22. 上の演算も $\ominus$ と書くことにする．$\bar{d}$ を Ex. 1.6.17 の全単射とするとき, $\bar{d}\left(\bar{d}^{-1}(x)\ominus\bar{d}^{-1}(y)\right)$ を求めよ．

$$\begin{tikzcd} \bar{\mathbb{N}}^2/\sim\times\bar{\mathbb{N}}^2/\sim \arrow[r, "\ominus"] \arrow[d, "\bar{d}\times\bar{d}"', "\cong"] & \bar{\mathbb{N}}^2/\sim \arrow[d, "\cong"', "\bar{d}"] \\ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \arrow[r, dotted] & \mathbb{Z}. \end{tikzcd}$$

Example 1.6.26. 演算 $\oslash\colon (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})\times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}\times\mathbb{N}) \to \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, $(l,m)\oslash(p,q) = (lpq, mp^2)$ は Ex. 1.6.13 の同値関係による商集合上の演算 $(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})/\sim\ \times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}\times\mathbb{N})/\sim\ \to (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})/\sim$ を定める.

exercise 23. 上の演算も $\oslash$ と書くことにする. $\bar\rho$ を Ex. 1.6.18 の全単射とするとき, $\bar\rho\left(\bar\rho^{-1}(x)\oslash\bar\rho^{-1}(y)\right)$ を求めよ.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})/\sim\ \times(\mathbb{Z}\setminus\{0\}\times\mathbb{N})/\sim \arrow[r, "\oslash"] \arrow[d, "\bar\rho\times\bar\rho"', "\cong"] & (\mathbb{Z}\times\mathbb{N})/\sim \arrow[d, "\cong"', "\bar\rho"] \\
\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\setminus\{0\} \arrow[r, dotted] & \mathbb{Q}.
\end{tikzcd}$$

問題集 . 41(1)(2),42(3)(4), 43(1)(2)(3)

1.7　順序関係

Definition 1.7.1. 集合 X における関係 $\leq$ が次の条件をみたすとき，この関係を順序 (order) あるいは半順序 (partial order) という．

1. （反射律, reflexive law ）　$x \leq x$
2. （反対称律, antisymmetric law ）　$x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば, $x = y$
3. （推移律, transitive law ）　$x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば, $x \leq z$

集合 X における順序 $\leq$ がさらに次もみたすとき，この順序を全順序 (total order) あるいは線型順序 (linear order) という．

4. 任意の $x, y \in X$ に対し，$x \leq y$ か $y \leq x$ の少なくとも一方が必ず成立する．

Definition 1.7.2. 集合 X とその上の順序 $\leq$ の組 $(X, \leq)$ を順序集合 (ordered set) あるいは半順序集合 (partially ordered set, poset) という．

混乱のおそれがないときは $\leq$ を省略して単に順序集合 X と書くことが多い．

Remark . 順序関係を表す記号として必ず $\leq$ を使うというわけではない．

この記号 $\leq$ を用いる場合，しばしば以下の記法が用いられる．

- $x \leq y$ のとき $y \geq x$ と書く．
- $x \leq y$ かつ $x \neq y$ のとき $x < y$ と書く．
- $x < y$ のとき $y > x$ と書く．

exercise 24. $x < y$ かつ $y \leq z$ ならば, $x < z$.

Definition 1.7.3. X, Y を順序集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．

1. 任意の $x, x' \in X$ に対し，$x \leq x'$ ならば $f(x) \leq f(x')$ となるとき，f を順序を保つ写像 (order preserving map) という．
2. 順序を保つ写像 f は，順序を保つ写像 $g\colon Y \to X$ で，$g \circ f = \mathrm{id}_X$，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたすものが存在するとき，順序同型写像 (order isomorphism) であるという．
3. X から Y への順序同型写像が存在するとき，X と Y は順序同型であるという．

Remark . 順序を保つ全単射は必ずしも順序同型写像ではない．Ex. 1.7.4 参照.

exercise 25. X, Y を順序集合，$f\colon X \to Y$ を全単射とする．このとき f が順序同型写像であるための必要十分条件は，任意の $x, x' \in X$ に対し $x \leq x' \Leftrightarrow f(x) \leq f(x')$ となる

ことである．

Example 1.7.4. X を集合とする．関係 $=$ はあきらかに順序関係である．X が元を 2 つ以上含めば，この順序は全順序ではない．

$\leq$ を X 上の順序とする．あきらかに恒等写像 $\mathrm{id}\colon (X,=) \to (X,\leq)$ は順序を保つ．

Example 1.7.5. $(X,\leq)$ を順序集合とする．関係 $\prec$ を $x \prec y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \geq y$ により定めると，$\prec$ は順序関係である．これを $\leq$ の双対 (dual) あるいは opposite という．

普通はこの順序を（$\prec$ 等は使わず）$\geq$ と書く．$\leq^{op}$ と書くこともある．

順序集合 X に双対順序をいれた順序集合を X^{op} と書くことがある．

Example 1.7.6. $(X,\leq)$ を順序集合，$A \subset X$ を部分集合とする．A 上の関係 $\prec$ を $a \prec b \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \leq b$（右辺は $a,b \in A$ を X の元とみている）により定めると，$\prec$ は順序関係である．普通はこの順序を（$\prec$ 等は使わず）$\leq$ と書く．特にことわらなければ，順序集合の部分集合を順序集合と考えるときはこの順序を使う．

X が全順序集合であれば，この順序により A も全順序集合である．X が全順序集合でなくとも，この順序により A が全順序集合となることもある．

Example 1.7.7. $\mathbb{N}$ や $\mathbb{Z}$ の普通の順序（数の大小関係）は全順序である．

Example 1.7.8. $\mathbb{N}$ における m が n を割り切るという関係 $m|n$ は順序である．

exercise 26. $\mathbb{Z}$ における関係 $m|n$ は順序か？

Example 1.7.9. X を集合とする．$\mathcal{P}(X)$ 上の包含関係 $A \subset B$ は順序である．特にことわらなければ $\mathcal{P}(X)$ を順序集合と考えるときはこの順序を使う．

X が元を 2 つ以上含めば，$\mathcal{P}(X)$ のこの順序は全順序ではない．

Example 1.7.10. $(P,\leq)$ を順序集合，X を集合とする．P^X の元 f,g に対し，$f \leq g \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X : f(x) \leq g(x)$ と定めると，P^X 上の順序である．

exercise 27. これを示せ．

Example 1.7.11. $[2] = \{0,1\}$ には $\mathbb{Z}$ の部分集合として順序（$0<1$）が入る．

2^X の元 a,b に対し，$a \leq b \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X : a(x) \leq b(x)$ と定めると順序である．

Example 1.7.12. $\chi\colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ は上の Ex. 1.7.9, 1.7.11 の順序に関して順序同型写像である．

実際，$A \subset B \subset X$ であるとする．$x \in A$ のときは，$A \subset B$ であるから，$x \in B$ となり $\chi_B(x) = 1$ ゆえ $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$．$x \notin A$ のときは $\chi_A(x) = 0$ だから，あきらかに

$\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$. よって任意の $x \in X$ に対し $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$, すなわち $\chi_A \leq \chi_B$ である．したがって $\chi(A) = \chi_A \leq \chi_B = \chi(B)$.

χ の逆写像を $\varphi\colon 2^X \to \mathcal{P}(X)$ とする．$\varphi(a) = a^{-1}(1)$ である．$a \leq b \in 2^X$ とする．$a(x) = 1$ ならば $b(x) \geq a(x) = 1$ だから $b(x) = 1$ である．よって $\varphi(a) = a^{-1}(1) \subset b^{-1}(1) = \varphi(b)$.

Example 1.7.13. P, Q を順序集合とする．

1. 直積 $P \times Q$ 上の $(p,q) \leq (p',q') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p \leq p' \wedge q \leq q'$ で定まる関係は順序である．これを直積順序 (product order) という．
2. 直積 $P \times Q$ 上の $(p,q) \leq (p',q') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p < p' \vee (p = p' \wedge q \leq q')$ で定まる関係は順序である．これを辞書式順序 (lexicographical order) という．
   もちろん, これは（2 文字からなる単語だけが載っている）辞書で単語が並んでいる順番である．

例えば $P = Q = \{a,b,c\}$ に $a < b < c$ という順序をいれたとき, $\{a,b,c\}^2$ に直積順序をいれたものを図示（小さい方から大きい方へ矢印が書いてある．このような図をハッセ図という．Def. 1.7.16 を見よ.）すると

$$\begin{tikzcd}
(c,a) \arrow[r] & (c,b) \arrow[r] & (c,c) \\
(b,a) \arrow[r] \arrow[u] & (b,b) \arrow[r] \arrow[u] & (b,c) \arrow[u] \\
(a,a) \arrow[r] \arrow[u] & (a,b) \arrow[r] \arrow[u] & (a,c) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

となる．この順序では例えば (a,b) と (b,a) の間に大小関係は無い．一方, 辞書式順序をいれたものは

$$\begin{tikzcd}
(c,a) \arrow[r] & (c,b) \arrow[r] & (c,c) \\
(b,a) \arrow[r] & (b,b) \arrow[r] & (b,c) \arrow[ull] \\
(a,a) \arrow[r] & (a,b) \arrow[r] & (a,c) \arrow[ull]
\end{tikzcd}$$

となる．

直積順序と辞書式順序は 3 つ以上の順序集合のデカルト積に対しても同様に定義される．また, 辞書式順序は全順序集合に対して用いられることが多い．

exercise 28. P,Q を順序集合とし, $P\times Q$ 上の直積順序を $\leq_{prod}$, 辞書式順序を $\leq_{lex}$ で表す.

1. $\leq_{prod}$ と $\leq_{lex}$ が順序であることを示せ.
2. 恒等写像

$$\mathrm{id}\colon (P\times Q,\leq_{prod})\to(P\times Q,\leq_{lex}),$$
$$\mathrm{id}\colon (P\times Q,\leq_{lex})\to(P\times Q,\leq_{prod})$$

は順序を保つか?

3. P,Q がともに全順序集合であれば, $\leq_{lex}$ も全順序であることを示せ.

Example 1.7.14. P を順序集合とする. 集合 $P^{[2]}$ に Ex. 1.7.10 の順序を, P^2 に直積順序をいれる. 写像

$$e=(\mathrm{ev}_0,\mathrm{ev}_1)\colon \begin{array}{ccc} P^{[2]} & \longrightarrow & P^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ f & \longmapsto & (f(0),f(1)) \end{array}$$

は順序同型写像である.

Definition 1.7.15. X を順序集合, $a,b\in X$ とする.

1.
$$[a,b]:=\{x\in X\mid a\leq x\leq b\}$$
を a,b を端点とする閉区間 (closed interval) という.
2.
$$(a,b):=\{x\in X\mid a<x<b\}$$
を a,b を端点とする開区間 (open interval) という.
3. $a<b$ かつ $(a,b)=\emptyset$ であるとき, a を b の直前 (predecessor) の元, b を a の直後 (successor) の元という.

この他半開区間 $[a,b)$ 等といった記号も使う. 意味はあきらかであろう.

Caution! . 開区間の記号 (a,b) は直積集合 $X\times X$ の元を表す記号と同じなので注意が必要であるが, 通常文脈からどちらの意味かは判断出来る.

以下の 2 つの exercise では, $x>b$ となるような $x\in X$ が存在する場合のみ解答すればよい. (もちろん, そうでない場合も考えてもよいけれど.)

exercise 29. X を順序集合, $a,b\in X$, $a\leq b$ とし, $A=\bigcap_{x>b}[a,x)$ とおく.

1. $A \supset [a,b]$ であることを示せ.
2. X の順序が全順序であれば $A = [a,b]$ であることを示せ.
3. $A \neq [a,b]$ となる例を挙げよ.

exercise 30. X を順序集合, $a, b \in X$, $a \leq b$ とし, $A = \bigcap_{x>b} [a,x]$ とおく. 次の 2 つの条件を考える.

(i) $A = [a,b]$.
(ii) $\forall y > b, \exists x > b : x < y$.

1. X が全順序集合であるとき, (i) と (ii) は同値であることを示せ.
2. X の順序が全順序でないとき, (i)⇒(ii) は成り立つか？ 成り立つなら証明し, 成り立たない場合は例を挙げよ.

3*. X の順序が全順序でないとき, (ii)⇒(i) は成り立つか？ 成り立つなら証明し, 成り立たない場合は例を挙げよ.

Definition 1.7.16 (ハッセ図, Hasse diagram)**.** 有限順序集合を図示するのに有用なハッセ図 (Hasse diagram) を紹介しておく. （とはいえ, 人が手で苦労せず書けるのは元の数がごく少ない場合に限られるであろうし, ぱっと見て意味を読み取れるのも元の数がそれほど多くは無い場合であろうけれど.)

$(X, \leq)$ を有限順序集合とする. X の元を頂点とし, x の直後の元が y であるときに x から y へ矢印を書く. ただし, 矢印同士は頂点同士以外では交わってもよい. 矢印を書くと煩雑になるので, 矢印を使わず大きい元が上になるように書くことも多い.

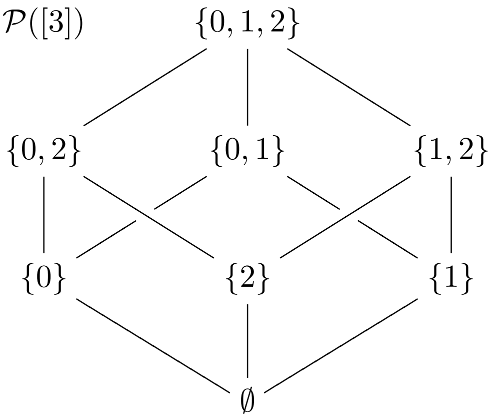
与えられた順序集合に対し, ハッセ図が一通りに書けるわけではないが, （正しく書かれた）ハッセ図から順序関係を復元することが出来る.

具体的な例を挙げよう.

1. 冪集合に包含関係で順序をいれたもの.

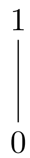
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathcal{P}([1]) & \{0\} \arrow[d, dash] \\ & \emptyset \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \mathcal{P}([2]) & & \{0,1\} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ & \{0\} \arrow[dr, dash] & & \{1\} \arrow[dl, dash] \\ & & \emptyset & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{P}([3])$

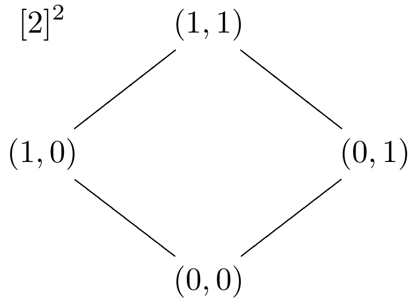


2. $[2] = \{0, 1\}$ に $0 < 1$ という順序をいれたものの直積に直積順序をいれたもの.

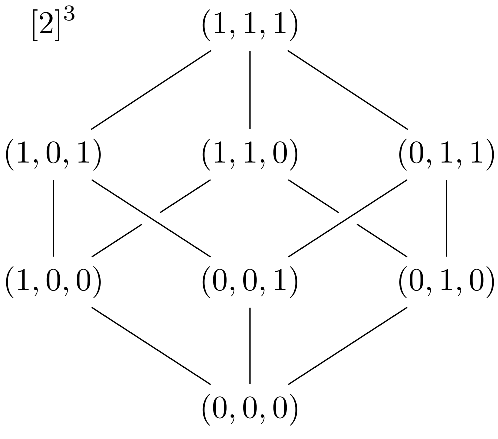
$[2]$



$[2]^2$

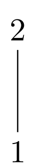


$[2]^3$

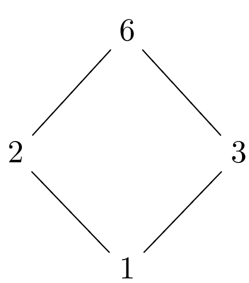


3. いくつかの自然数の集合に割り切れるという順序をいれたもの.

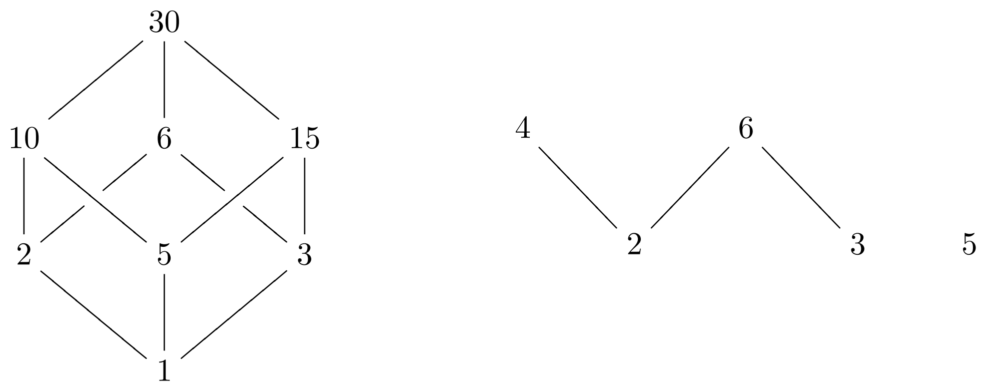
$(\{1, 2\}, |)$



$(\{1, 2, 3, 6\}, |)$



$(\{1,2,3,5,6,10,15,30\},|)$　　$(\{2,3,4,5,6\},|)$



4. 冪集合から空集合を除いたものに包含関係で順序をいれたもの.

$\mathcal{P}([1]) \setminus \{\emptyset\}$　　$\{0\}$

$\mathcal{P}([2]) \setminus \{\emptyset\}$　　$\{0\} \longrightarrow \{0,1\} \longleftarrow \{1\}$

$\mathcal{P}([3]) \setminus \{\emptyset\}$

$$\begin{tikzcd}
 & & \{2\} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \{0,2\} \arrow[dr] & & \{1,2\} \arrow[dl] & \\
 & & \{0,1,2\} & & \\
\{0\} \arrow[uur] \arrow[rr] & & \{0,1\} \arrow[u] & & \{1\} \arrow[uul] \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Definition 1.7.17. X を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. $m \in X$ が A の上界 (upper bound) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in A : a \leq m$.
2. $l \in X$ が A の下界 (lower bound) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall a \in A : l \leq a$.

   Caution! . 上界, 下界とも 1 つだけというわけではない.

3. A が上界をもつとき A は上に有界 (bounded from above) であるという.
   A が下界をもつとき A は下に有界 (bounded from below) であるという.
   上にも下にも有界であるとき有界 (bounded) であるという.

定義より「A が有界 $\Leftrightarrow \exists l, m \in X, \forall a \in A : l \leq a \leq m$ 」がわかる.

Remark . $l \in X$ が A の下界であることと $l \in X^{op}$ が A の上界であることは同じことである．このように，順序をその双対でおきかえて得られる（つまり不等号の向きを全て逆にして得られる）概念をもとのものの双対という．下界は上界の，上界は下界の双対である．

任意の順序集合に対して成立する命題は，（X^{op} を考えることで）不等号の向きを逆にした命題も成立する．これを順序に対する双対原理 (duality principle) という．

exercise 31. X を順序集合, $A, B \subset X$ とする．

1. B が有界で, $A \subset B$ ならば, A も有界.
2. X を全順序集合とする．A, B がどちらも有界ならば, $A \cup B$ も有界.
3. A, B ともに有界であるが, $A \cup B$ は有界とならないような例があれば挙げよ.

Example 1.7.18. $X \neq \emptyset$ を順序集合とする．任意の $x \in X$ は $\emptyset \subset X$ の上界かつ下界である．実際, $\forall a \in \emptyset : a \leq x$, $\forall a \in \emptyset : x \leq a$ はどちらも（前提が偽であるから）成り立つ．

とくに $X \neq \emptyset$ のとき, $\emptyset \subset X$ は有界である．

Definition 1.7.19. X を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする．

1. $M \in X$ が A の最大元 (maximum element) である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & M \in A \\ \text{(ii)} & M \text{ は } A \text{ の上界である. すなわち } \forall a \in A : a \leq M \end{cases}$$

このとき $M = \max_{a \in A} a = \max_A a = \max A$ 等と書く．

2. $m \in X$ が A の最小元 (minimum element) である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & m \in A \\ \text{(ii)} & m \text{ は } A \text{ の下界である. すなわち } \forall a \in A : m \leq a \end{cases}$$

このとき $m = \min_{a \in A} a = \min_A a = \min A$ 等と書く．

Remark . 最大元と最小元は互いに双対である．

Proposition 1.7.20. $A \subset X$ の最大元 (最小元) は存在すれば一意的である．

Proof. 実際, M_1, M_2 をともに A の最大元とすると定義より次が成り立つ．

(i1) $M_1 \in A$

(ii1) $\forall a \in A : a \leq M_1$

(i2) $M_2 \in A$

(ii2) $\forall a \in A : a \leq M_2$

(i1) と (ii2) より $M_1 \leq M_2$. 同様に $M_2 \leq M_1$. よって順序の性質より $M_1 = M_2$.

最小元についても同様にして示してもよいが, 双対性原理より成り立つ. つまり, $m \in X$ が A の最小元であることと $m \in X^{op}$ が A の最大元であることは同じことであることに注意すれば最大元のときのみ示しておけば十分である. □

exercise 32. $X \neq \emptyset$ を順序集合, $A \subset X$ を有限部分集合とする.

1. A が有界とはならないような例があれば挙げよ.
2. X が全順序集合であるとき, $A \neq \emptyset$ ならば, $\max A$, $\min A$ が存在することを, 帰納法を用いて示せ.
3. X が全順序集合であるとき, A が有限部分集合であるならば, A は有界であることを示せ.

Example 1.7.21. $\mathbb{N}$ に数の大小関係で順序をいれる. 任意の $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ に対し, $\min A$ が存在する.

Proof. $n \in A$ をひとつとる. $A_n := \{a \in A \mid a \leq n\}$ とおけば $A_n \subset \{1, \ldots, n\}$ だから A_n は有限集合であり, $n \in A_n$ なので $A_n \neq \emptyset$. $\mathbb{N}$ は全順序集合であるから exe. 32 より A_n には最小元が存在する. $m := \min A_n$ とおくと $m = \min A$ である. 実際, $m \in A_n \subset A$ ゆえ $m \in A$. $a \in A$ とする. $a \leq n$ であれば, $a \in A_n$ だから $a \geq \min A_n = m$. $a \geq n$ であれば, $n \in A_n$ に注意すると, $a \geq n \geq \min A_n = m$ ゆえ $a \geq m$. □

Definition 1.7.22. 順序集合 $(X, \leq)$ の任意の空でない部分集合が最小元をもつとき, この順序 $\leq$ を<u>整列順序 (well-order)</u> といい, $(X, \leq)$ を<u>整列集合 (well-ordered set)</u> という.

上の Ex. 1.7.21 は次のようにいえる.

Theorem 1.7.23. $\mathbb{N}$ に数の大小関係で順序をいれたものは整列集合である.

Proposition 1.7.24. 整列順序は全順序である.

Proof. $(X, \leq)$ を整列集合とする. $x, y \in X$ とすると $\min\{x, y\}$ が存在する. $\min\{x, y\} = x$ のときは $x \leq y$, $\min\{x, y\} = y$ のときは $y \leq x$ である. □

Example 1.7.25. $\mathbb{N}$ に $m|n$ で順序をいれる. $\min \mathbb{N} = 1$ である. 一方, $\min(\mathbb{N} \setminus \{1\})$ は存在しない. 実際, $p \in \mathbb{N}$ が素数であれば, $m|p$ となる $m \in \mathbb{N}$ は $1, p$ のみである. とくに, $2, 3 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ に対し, $m|2$ かつ $m|3$ となる $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ は存在しない.

Example 1.7.26. $\max \mathcal{P}(X) = X$, $\min \mathcal{P}(X) = \emptyset$.

exercise 33. これを確かめよ.

Example 1.7.27. $[2]$ に $0 < 1$ という順序をいれると, $\min\{p,q\} = p \wedge q = pq$. $\max\{p,q\} = p \vee q$.

exercise 34. これを確かめよ.

exercise 35. X を順序集合, $a, b \in X$, $a \leq b$ とする. $\max[a,b] = b$, $\min[a,b] = a$ を示せ.

Example 1.7.28. $\mathbb{Q}$ に数の大小関係で順序をいれる. $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ とする. $\max(a,b)$, $\min(a,b)$ はともに存在しない. とくに $\mathbb{Q}$（に普通の順序をいれたもの）は整列集合ではない.

実際, 任意の $x \in (a,b)$ について, x が最小元ではないことが以下のようにしてわかる. $x \in (a,b)$ ゆえ $a < x < b$. $c = \frac{x+a}{2}$ とおくと,

$$c - a = \frac{x+a}{2} - a = \frac{x-a}{2} > 0 \qquad x - c = x - \frac{x+a}{2} = \frac{x-a}{2} > 0$$

だから $a < c < x$. $x < b$ なので $c < b$. よって $c \in (a,b)$ かつ $c < x$. よって x は最小元ではない. 最大元についても同様.

exercise 36. 最大元について示せ.

Definition 1.7.29. X を順序集合, $A \subset X$ とする.

1. A の上界全体の集合に最小元が存在するときそれを A の<u>上限 (supremum)</u> とよび

$$\sup_{a \in A} a \text{ または } \sup A$$

で表す. すなわち A の上界全体を

$$U_A := \left\{ x \in X \;\middle|\; x \text{ は } A \text{ の上界} \right\}$$

とおくと, $\sup A = \min U_A$.

2. A の下界全体の集合に最大元が存在するときそれを A の<u>下限 (infimum)</u> とよび

$$\inf_{a \in A} a \text{ または } \inf A$$

で表す. すなわち A の下界全体を

$$L_A := \left\{ x \in X \;\middle|\; x \text{ は } A \text{ の下界} \right\}$$

とおくと, $\inf A = \max L_A$.

Remark . 上限, 下限は互いに双対である. また, 上限, 下限ともに存在すれば一意的である.

Example 1.7.30. X を順序集合とする. $\min X$ が存在すれば $\sup \emptyset = \min X$ である. $\max X$ が存在すれば $\inf \emptyset = \max X$ である.

実際, $\min X$ か $\max X$ が存在すれば $X \neq \emptyset$ であるから $\emptyset \subset X$ は有界であり, $U_\emptyset = L_\emptyset = X$ となる.

Proposition 1.7.31. $\max A$ が存在すれば $\sup A = \max A$.

Proof. $M = \max A$ とする. A の上界全体のなす集合を U_A とかく.

最大元の定義 (ii) より M は A の上界である, すなわち $M \in U_A$.

また最大元の定義 (i) より $M \in A$. 従って, A の任意の上界 $m \in U_A$ に対し $M \leq m$.

よって $M = \min U_A$, すなわち A の上限である. □

Proposition 1.7.32. X を全順序集合, $A \subset X$ とする.

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \forall a \in A : a \leq s, \\ \text{(ii)} & \forall x \in X : (x < s \to \exists a \in A : x < a). \end{cases}$$

Caution! . この特徴づけは全順序集合でなければ一般には正しくない.

Proof. 条件 (i) は s が A の上界であることをいっている.

一方対偶を考えると条件 (ii) は「x が A の上界ならば, $s \leq x$」と同値.

すなわち (i),(ii) は s が A の上界の最小元であることをいっている. □

exercise 37.
1. 上の証明のどこで X が全順序集合であることを用いているか?
2. 一般の順序集合で Prop. 1.7.32 の $\Rightarrow$ は成り立つだろうか? 成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例を挙げよ.

3*. 一般の順序集合で Prop. 1.7.32 の $\Leftarrow$ は成り立つだろうか? 成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例を挙げよ.

Example 1.7.33. $\mathbb{Q}$ に数の大小関係で順序をいれる. $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ とする. $\sup(a, b) = b$, $\inf(a, b) = a$ である.

Proof. $b = \sup(a, b)$ であることを, Prop. 1.7.32 を使って示そう.

$x \in (a, b)$ ならば $a < x < b$ であるから b は (a, b) の上界である. すなわち b は Prop. 1.7.32 の条件 (i) をみたす.

条件 (ii) を調べよう． $c < b$ とする． $d = \max\{a, c\}$ とおくと, $d < b$． よって $y = (b+d)/2 \in \mathbb{Q}$ とおくと $d < y < b$ となる． $a \leq d$ に注意すると $a < y < b$, すなわち $y \in (a, b)$ である．また $c \leq d$ であるから $c < y$．よって条件 (ii) も成り立っている．従って $b = \sup(a, b)$.

$\inf(a, b) = a$ も同様. □

exercise 38. 下限の方を示せ.

Example 1.7.34. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ に対し, $\sup \mathcal{A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, $\inf \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ である．ただし, $\mathcal{A} = \emptyset$ のときは $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = X$ と約束する． (§1.5 の Remark 参照.)

Proof. 下限の方を示そう． $\mathcal{A} \neq \emptyset$ のときを考える．

$$\begin{aligned} B \subset X \text{ が } \mathcal{A} \text{ の下界} &\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall A \in \mathcal{A} : B \subset A \\ &\Leftrightarrow B \subset \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \end{aligned}$$

であるから $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ は $\mathcal{A}$ の下界の最大元, すなわち $\inf \mathcal{A}$ である．

$\mathcal{A} = \emptyset$ のときは, $\max \mathcal{P}(X) = X$ であるから $\inf \emptyset = \max \mathcal{P}(X) = X$ ゆえ成立. □

exercise 39. 上限の方を示せ.

Definition 1.7.35. X を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする．

1. $M \in X$ が A の<u>極大元 (maximal element)</u> である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & M \in A, \\ \text{(ii)} & \forall a \in A : M \not< a. \end{cases}$$

   つまり, M が A の元であり, かつ M より大きい元は A の中にないときに M は A の極大元である．

2. $m \in X$ が A の<u>極小元 (minimal element)</u> である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & m \in A, \\ \text{(ii)} & \forall a \in A : a \not< m. \end{cases}$$

   つまり, m が A の元であり, かつ m より小さい元は A の中にないときに m は A の極小元である．

Proposition 1.7.36. 最大元は極大元であり, 最小元は極小元である．

Proof. $a \leq M \Rightarrow M \not< a$. □

Proposition 1.7.37. 全順序部分集合では極大元は最大元であり，極小元は最小元である．

Proof. 全順序集合では $M \not< a \Rightarrow M \geq a$. □

Example 1.7.38. 一般には極大元, 極小元は一意ではない．$\mathbb{N}$ に $m|n$ で順序をいれる．$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ が極小であることと n が素数であることは同値である．

Definition 1.7.39. 一般の順序集合に対して定義することはあまりないが, 上界, 下界が存在する場合上極限, 下極限を定義できる．X を順序集合, $a \colon \mathbb{N} \to X$ を写像とする．（これを X の点列という.）数列の場合と同様, 普通 $a(n) \in X$ を a_n と書き, 点列を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n\}$ 等と表す．

1. 点列 $\{\overline{a}_n\}$ を $\overline{a}_n := \sup\{a_i | i \geq n\} \in X$ で定める．X の部分集合 $\{\overline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の下限を点列 $\{a_n\}$ の上極限といい, $\limsup a_n$ あるいは $\overline{\lim}\, a_n$ と書く．すなわち
$$\limsup a_n = \inf\{\overline{a}_n\} = \inf\left\{\sup\{a_i | i \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$
2. 点列 $\{\underline{a}_n\}$ を $\underline{a}_n := \inf\{a_i | i \geq n\}$ で定める．X の部分集合 $\{\underline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上限を点列 $\{a_n\}$ の下極限といい, $\liminf a_n$ あるいは $\underline{\lim}\, a_n$ と書く．すなわち
$$\liminf a_n = \sup\{\underline{a}_n\} = \sup\left\{\inf\{a_i | i \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Example 1.7.40. $\mathcal{P}(X)$ の点列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対し，ここで定義した上極限, 下極限と Def. 1.5.9 で定義したものは同じである．

exercise 40. X, Y を順序集合, $f \colon X \to Y$ を順序を保つ写像, $A \subset X$ とする．

1. $m \in X$ が A の上界であれば $f(m)$ は $f(A)$ の上界である．
2. $m = \max A$ ならば $f(m) = \max f(A)$.
3. 上限について同様なことが言えるか？ X, Y, f に適当に条件をつけると何か言えるか？
4. m が A の極大元であるが, $f(m)$ は $f(A)$ の極大元とはならないような例を挙げよ．

exercise 41. X を集合, P を順序集合, P^X に各点毎の順序（Ex. 1.7.10）をいれる．$f_\lambda \in P^X$ とする．$F \subset P^X$ とする．

1. $\max_{f\in F} f$ が存在するとする．このとき任意の $x \in X$ に対し, $(\max_{f\in F} f)(x) = \max\{f(x) \mid f \in F\}$ である．
2. 任意の $x \in X$ に対し, $\max\{f(x) \mid f \in F\}$ が存在するとする．このとき $\max_{f\in F} f$ は存在するか？

3. $\sup_{f\in F} f$ が存在するとする．このとき任意の $x \in X$ に対し，$(\sup_{f\in F} f)(x) = \sup\{f(x) \mid f \in F\}$ である．
4. 任意の $x \in X$ に対し，$\sup\{f(x) \mid f \in F\}$ が存在するとし，$f_s \in P^X$ を $f_s(x) = \sup\{f(x) \mid f \in F\}$ により定める．このとき $f_s = \sup_{f\in F} f$ である．

1.8　濃度

この節では集合の濃度をあつかう．濃度というのはおおざっぱに言えば集合の元の個数のことである．前半では有限集合をあつかい，その後無限集合をあつかう．

この節では非負整数全体 $\mathbb{N}\cup\{0\}$ を $\bar{\mathbb{N}}$ で表す．（以前にも注意したが，この記号は標準的なものではない.）

集合 X から Y へ全単射が存在するときに X と Y は対等といって $X \cong Y$ と書いた（Def. 1.4.15）．この対等という”関係”は同値律をみたす．

Theorem 1.8.1. X, Y, Z を集合とする．

1. $X \cong X$.
2. $X \cong Y \Rightarrow Y \cong X$.
3. $X \cong Y \wedge Y \cong Z \Rightarrow X \cong Z$.

Proof.

1. 恒等写像は全単射.
2. 全単射の逆写像も全単射.
3. 全単射の合成は全単射.

□

1.8.1　有限集合

有限集合とは何か，有限集合の元の個数とは何かを論ずる．ここで述べるような当たり前に見える事柄に関する議論は，何を前提に話をするのかをはっきりさせないと，何をやっているのかよくわからなくなりがちである．前提とするのは自然数の性質である．

個数を数えるので自然数（と 0）を用いるが，我々は自然数の基本的性質は既知のものとしてあつかう．時間の都合もあり，自然数の基本的性質とは何かはあまりはっきりさせないで議論をすすめるが，特に（これまでにも使ったが）数学的帰納法を用いる．

これまでにも有限集合という言葉をことわりなく使ってきたが，ここで定義と基本的な性質を与えておく．

Definition 1.8.2. 集合 X が有限集合 (finite set) である

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある非負整数 $n \in \bar{\mathbb{N}}$ が存在して，X は $[n]$ と対等である．

ただし $[n] = \left\{m \in \bar{\mathbb{N}} \;\middle|\; m < n\right\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ であり，$[0] = \emptyset$ である．

Remark . 有限集合の定義の仕方にはいろいろな流儀がある．適当な仮定のもとではいず

れも同値である．ここで述べた定義は最もわかりやすいものだと思うが, 一番標準的というわけではない．

Lemma 1.8.3. $A \subset [n]$ ならば, ある $m \in \bar{\mathbb{N}}$, $m \leq n$ が存在して, $A \cong [m]$ となる．

Proof. n に関する帰納法. $n = 0$ のときは $[0] = \emptyset$ だから $A = \emptyset \cong [0]$ で O.K.

n で成立するとして, $A \subset [n+1] = \{0, \ldots, n\} = [n] \cup \{n\}$ のときを考える．$n \notin A$ のときは $A \subset [n]$ なので帰納法の仮定より O.K. $n \in A$ のときは $A \setminus \{n\} \subset [n]$ だから, 帰納法の仮定より, ある $m \in \bar{\mathbb{N}}$, $m \leq n$ が存在して全単射 $f\colon A \setminus \{n\} \to [m] = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ が存在する．$m \leq n$ なので $m + 1 \leq n + 1$ である．写像 $\bar{f}\colon A \to [m+1] = [m] \cup \{m\}$ を

$$\bar{f}(l) = \begin{cases} f(l), & l \neq n \\ m, & l = n \end{cases}$$

で定めるとあきらかに $\bar{f}$ は全単射である． □

Remark . 上の Lem. の全単射 $A \xrightarrow{\cong} [m]$ は順序を保つようにとれることに注意.

これまでにも使っているが, 次が成り立つ.

Corollary 1.8.4. 有限集合の部分集合は有限集合である．

Proof. X を有限集合, $A \subset X$ とする．定義よりある $n \in \bar{\mathbb{N}}$ と全単射 $f\colon X \to [n]$ が存在する．f の A への制限により $A \cong f(A) \subset [n]$ である．ある $m \in \bar{\mathbb{N}}$ が存在し $f(A) \cong [m]$ であるから $A \cong [m]$. □

Corollary 1.8.5. X を有限集合, Y を集合とする．全射 $X \to Y$ が存在すれば, Y は有限集合である．

Proof. $Y \neq \emptyset$ としてよい．$[n] \cong X$ とし, 全射 $X \to Y$ との合成 $f\colon [n] \xrightarrow{\cong} X \to Y$ を考えると f は全射である．よって, 任意の $y \in Y$ に対し $[n] \supset f^{-1}(y) \neq \emptyset$ である．よって $\min f^{-1}(y)$ が存在する．写像 $g\colon Y \to [n]$ を $g(y) = \min f^{-1}(y)$ で定める．$g(Y) \subset [n]$ だから $g(Y)$ は有限集合．あきらかに $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ であるから g は単射．よって $Y \cong g(Y)$ は有限集合. □

上の Lemma とほとんど同様に示せるが, 次の Lemma は元の個数を考える上で基本的である．

Lemma 1.8.6. $m, n \in \bar{\mathbb{N}}$ とする．このとき次が成り立つ．

1. 単射 $f\colon [m] \to [n]$ が存在する $\Leftrightarrow m \leq n$.
2. 全射ではない単射 $f\colon [m] \to [n]$ が存在する $\Leftrightarrow m < n$.

Proof. 1,2 とも $\Leftarrow$ は包含写像を考えればあきらか.
$\Rightarrow$ を示す.

1. n に関する帰納法で示そう. $n=0$ のときは $[0]=\emptyset$ だから写像 $f\colon [m]\to[0]$ が存在するのは $[m]=\emptyset$, すなわち $m=0$ のときのみ. よって成立.
   n で成立すると仮定する. $f\colon [m]\to[n+1]=[n]\cup\{n\}$ を単射とする. $n\notin f([m])$ の場合. $f([m])\subset[n]$ なので f は $[m]\xrightarrow{f}[n]\hookrightarrow[n+1]$ と分解する. 帰納法の仮定より $m\le n$ だから $m\le n+1$ で O.K. $n\in f([m])$ の場合. $l\in[m]$, $f(l)=n$ とする. $\sigma\colon [m]\to[m]$ を l と $m-1$ の互換, すなわち
   $$\sigma(k)=\begin{cases} m-1, & k=l \\ l, & k=m-1 \\ k, & k\neq l, m-1 \end{cases}$$
   で与えられる全単射とし, 合成 $f'\colon [m-1]\hookrightarrow[m]\xrightarrow{\sigma}[m]\xrightarrow{f}[n+1]$ を考える. f' は単射の合成だから単射であり, $n\notin f'([m-1])$ である. よって前半の議論から $m-1\le n$ となり, $m\le n+1$ である.
2. 単射 $f\colon [m]\to[n]$ が全射ではないとする. $l\in[n]\setminus f([m])$ をひとつとる. 写像 $f'\colon [m+1]=\{0,\dots,m\}\to[n]$ を
   $$f'(k)=\begin{cases} f(k), & k<m \\ l, & k=m \end{cases}$$
   で定めればあきらかに f は単射. よって 1 より $m+1\le n$ ゆえ $m<n$.

□

Corollary 1.8.7. $m,n\in\mathbb{N}$ とする. このとき

1. 全射 $f\colon [m]\to[n]$ が存在する $\Leftrightarrow m\ge n$.
2. 単射ではない全射 $f\colon [m]\to[n]$ が存在する $\Leftrightarrow m>n$.

Proof. $\Leftarrow$ はやさしい. ($m>n$ のときは単射 $[m]\to[n]$ は存在しないことに注意.)
$\Rightarrow$ を示す. $f\colon [m]\to[n]$ を全射とする. f が全射であるから, 任意の $k\in[n]$ に対し $f^{-1}(k)\neq\emptyset$ である. よって $\min f^{-1}(k)$ が存在する. 写像 $g\colon [n]\to[m]$ を $g(k)=\min f^{-1}(k)$ で定める. あきらかに $f\circ g=\mathrm{id}_{[n]}$ であるから g は単射. よって $n\le m$.
さらに f が単射でなければ g は全射ではない. よってこのときは $n<m$. (g が全 (単) 射なら f も (全) 単射となる, あるいは g の作り方から.) □

Remark . $\Rightarrow$ は $m=0$ または $n=0$ のときも正しい.

exercise 42. $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ とする．全射 $[m] \to [n]$ を作れ.

Corollary 1.8.8. $X \cong Y$ かつ $X \cong [n]$ かつ $Y \cong [m]$ ならば $m = n$.

Proof. 仮定のもと $[m] \cong [n]$ となる．とくに単射 $[m] \to [n]$, $[n] \to [m]$ が存在するので $m \leq n$ かつ $n \leq m$ ゆえ $m = n$. □

Definition 1.8.9. X を有限集合とする．$X \cong [n]$ であるとき, $n \in \bar{\mathbb{N}}$ を X の元の個数あるいは濃度 (cardinality) といい, $\sharp X$, $|X|$ 等と表す．Cor. 1.8.8 を $X = Y$ の場合に使えば, この n は X に対し一意に定まる.

Corollary 1.8.10. X, Y を有限集合とする．このとき $X \cong Y \Leftrightarrow |X| = |Y|$.

exercise 43. これを示せ.

Corollary 1.8.11. X, Y を $|X| = |Y|$ である有限集合とし, $f \colon X \to Y$ を写像とする．次は同値.

1. f は単射.
2. f は全射.
3. f は全単射.

とくに X が有限集合であるとき, 写像 $f \colon X \to X$ に対しこれらは同値.

exercise 44. これを示せ.

Corollary 1.8.12. X を有限集合, $A \subset X$ とする．このとき, $A \cong X \Leftrightarrow A = X$.
　とくに, 有限集合はその真部分集合と対等ではない.

Proof. $\Leftarrow$ はあきらか.
　$\Rightarrow$ を示す．$A \cong X$ とする．このとき $|A| = |X|$ である．$i \colon A \to X$ を包含写像とすると, i は単射であるから, Coro. 1.8.11 より i は全射．包含写像が全射なので $A = X$. □

Corollary 1.8.13. X を集合, Y を有限集合とする.

1. 次は同値.
   (i) X は有限集合で $|X| \leq |Y|$.
   (ii) X から Y への単射が存在する.
2. 次は同値.
   (i) X は有限集合で $|X| = |Y|$.
   (ii) X から Y への全単射が存在する.

(iii) X から Y への単射と Y から X への単射が存在する.

3. 次は同値.

 (i) X は有限集合で $|X| < |Y|$.

 (ii) X から Y への単射が存在するが, X から Y への全単射は存在しない.

 (iii) X から Y への単射が存在するが, Y から X への単射は存在しない.

Proof. 1 は Cor. 1.8.4, Lem. 1.8.6 よりあきらか.
2 は 1 と Cor. 1.8.10 よりあきらか. 3 は 1,2 よりあきらか. □

Corollary 1.8.14. $X \neq \emptyset$ を集合, Y を有限集合とする. このとき次は同値.

1. X から Y への単射が存在する.
2. Y から X への全射が存在する.

Proof. Cor. 1.8.4, 1.8.5, Lem. 1.8.6 Cor. 1.8.7 よりあきらか. □

有限集合の濃度に関する基本的な性質を挙げておく.

Theorem 1.8.15. X, Y を有限集合とする. このとき,

1. $X \coprod Y$ も有限集合で $|X \coprod Y| = |X| + |Y|$.
2. $X \times Y$ も有限集合で $|X \times Y| = |X||Y|$.
3. Y^X も有限集合で $|Y^X| = |Y|^{|X|}$.

いずれも直感的にはあきらかであろう. が, きちんと証明しようとすると, 自然数の和, 積, 冪乗をどのように定義するかはっきりさせる必要がある. 例えば, $[m] \times [n]$ が有限集合であることを帰納法で証明しておいて $mn = |[m] \times [n]|$ と定義するという立場もあるし, mn を m を n 回足すと（帰納法を用いて）定義しておいて $[m] \times [n]$ と $[mn]$ との間の全単射を帰納法で構成するという立場もある. この講義ではこの定理の証明は述べない.

Corollary 1.8.16. X を有限集合とすると, $\mathcal{P}(X)$ も有限集合で $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|}$.

Proof. $\mathcal{P}(X) \cong 2^X$. □

Corollary 1.8.17. A, B を有限集合とする. このとき $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Proof.

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= (A \setminus B) \coprod (A \cap B) \coprod (B \setminus A) \\
A &= (A \setminus B) \coprod (A \cap B) \\
B &= (B \setminus A) \coprod (A \cap B).
\end{aligned}
$$

□

exercise 45. 1. A, B, C を有限集合とする．このとき

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

2. $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ を有限集合とする．このとき，

$$\left| \bigcup_{i \in [n]} A_i \right| = \sum_{\substack{I \subset [n] \\ |I| \text{ is odd}}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{\substack{\emptyset \neq I \subset [n] \\ |I| \text{ is even}}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

disjoint union について注意

Remark . $\bigcap_{i \in \emptyset} A_i = \bigcup_{i \in [n]} A_i$ と約束すれば（§.1.5 の Remark 参照）上の式は

$$\sum_{\substack{I \subset [n] \\ |I| \text{ is even}}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{\substack{I \subset [n] \\ |I| \text{ is odd}}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

と書ける．

1.8.2　無限集合

Definition 1.8.18. 集合 X が無限集合 (infinite set) である

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X は有限集合ではない．

Example 1.8.19. $\mathbb{N}$ は無限集合である．実際，$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(n) = n + 1$ で定めれば，f は単射であるが全射ではない．よって Cor. 1.8.11 より $\mathbb{N}$ は有限集合ではない．

Definition 1.8.20. 集合 X と Y は同じ濃度 (cardinality) を持つ

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X と Y は対等（$X \cong Y$）である．

またこのとき $|X| = |Y|$ と書く．

Remark . 定義より $|X| = |Y|$ ということは $X \cong Y$ ということに他ならない．もちろん本来は，集合 X に対し，（有限集合の場合は元の個数となるような）$|X|$ という「量」を定義して，それを濃度とよび，X と Y の濃度が等しいことと $X \cong Y$ は同値であることを示すというのが正しい態度であろう．

教科書 [5] にあるように，対等という同値「関係」による X の「同値類」を $|X|$ と定めるというのが最も自然な考え方であるが，一般には，集合 X と対等な集合全体は集合とはならない．

有限集合の場合, $|X| = n$ となる集合の代表として $[n]$ を考えた．同じようにして, 無限集合の場合も, 濃度が等しい集合の中でひとつ標準的なものを構成して, （つまり対等という同値関係の完全代表系をひとつ構成して, ）それを濃度と定義するのが標準的考え方である．が, 準備が多く必要となるのでこの講義ではふれない．

Example 1.8.21. $|\bar{\mathbb{N}}| = |\mathbb{N}|$. 実際, $\bar{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$ が全単射を与える．

Example 1.8.22. 開区間 $(0,1) \subset \mathbb{R}$ と半開区間 $(0,1] \subset \mathbb{R}$ の濃度は等しい．実際, 写像 $f\colon (0,1] \to (0,1)$ を

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \exists n \in \mathbb{N} : x = \frac{1}{n} \\ x, & \text{その他} \end{cases}$$

により定めると f は全単射である．

Example 1.8.23. 開区間 $(0,1) \subset \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ の濃度は等しい．実際, 写像 $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}_{>0}$ を $f(x) = x/(1-x)$ により定めれば f は全単射．

exercise 46. 次の $\mathbb{R}$ の部分集合に対し, 全単射を具体的に構成して濃度が等しいことを示せ．

1. 開区間 $(0,1)$ と閉区間 $[0,1]$.
2. 開区間 $(0,1)$ と $\mathbb{R}$.

Definition 1.8.24. X, Y を集合とする．X から Y への単射が存在するとき, $|X| \leq |Y|$ と書く．$|X| \leq |Y|$ かつ $|X| \neq |Y|$ であるとき（すなわち, X から Y への単射は存在するが全単射は存在しないとき）, $|X| < |Y|$ と書き, X の濃度は Y の濃度より小さいという．

Remark . Cor. 1.8.13 より, 有限集合に対し, この濃度の大小は数の大小と一致している．

任意の集合に対し, それより大きな濃度をもつ集合が存在する．

Theorem 1.8.25 (Cantor)**.** 任意の集合 X に対し, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Proof. $X = \emptyset$ のときは $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$ なのであきらか.

$X \neq \emptyset$ とする．singleton map $s\colon X \to \mathcal{P}(X), s(x) = \{x\}$ は単射であるから $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$. よって, X から $\mathcal{P}(X)$ への全射は存在しないことを示せばよい．$f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ を写像とする．

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$$

とおくと $A \notin \operatorname{Im} f$ である．実際, 任意の $y \in X$ に対し, $y \in f(y)$ の場合は $y \notin A$ ゆえ $f(y) \neq A$, $y \notin f(y)$ の場合は $y \in A$ ゆえ $f(y) \neq A$. □

より一般に（本質的には同じであるが）次が成り立つ（[1, Cor.7.13]）．

集合 X から X 自身への写像 $f\colon X \to X$ は, 任意の $x \in X$ に対し $f(x) \neq x$ であるとき固定点を持たない (fixed point free) という．

Theorem 1.8.26. Y を集合とする．Y が固定点を持たない自己写像, すなわち任意の $y \in Y$ に対し $\tau(y) \neq y$ となるような写像 $\tau\colon Y \to Y$ を持つとする．このとき任意の集合 X に対し, X から Y^X への全射は存在しない．

Proof. $X \neq \emptyset$ のときを考えればよい．$\psi\colon X \to Y^X$ を写像とする．$\varphi = \Psi(\psi)\colon X \times X \to Y$ とおく．すなわち $\varphi(x, x') = \psi(x)(x')$. 写像 $\alpha\colon X \to Y$ を

$$\alpha = \tau \circ \varphi \circ \Delta\colon X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\tau} Y$$

により定める．ただし, $\Delta\colon X \to X \times X$ は対角線写像である．このとき $\alpha \notin \operatorname{Im}\psi$ である．実際, 任意の $a \in X$ に対し,

$$\begin{aligned} \alpha(a) &= \tau(\varphi(a, a)) \\ \psi(a)(a) &= \varphi(a, a) \end{aligned}$$

であり, τ は固定点を持たないので $\alpha(a) \neq \psi(a)(a)$. よって $\alpha \neq \psi(a)$. □

この証明における論法（α の構成）を対角線論法 (diagonal argument) という．Thm. 1.8.25 の証明は本質的にはこの Thm. 1.8.26 において $Y = [2]$, $\tau = \neg\colon [2] \to [2]$ としたものである．

exercise 47. $X \neq \emptyset$, $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ を写像とし, $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ とおく．

また, 1.8.26 の証明の構成を $\chi f\colon X \to \mathcal{P}(X) \underset{\chi}{\xrightarrow{\cong}} 2^X$ と $\neg\colon [2] \to [2]$ に対し適用して得られる写像

$$\alpha = \neg \circ \Psi(\chi f) \circ \Delta\colon X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{\Psi(\chi f)} [2] \xrightarrow{\neg} [2]$$

を考える．

このとき $\chi_A = \alpha$ であることを示せ．

Remark . $Y \neq \emptyset$ であるとき, Y が固定点を持たない自己写像を持つことと, Y が 2 つ以上元を含むことは同値であることに注意すれば, Thm. 1.8.26 は Thm. 1.8.25 から示すことが出来る．

exercise 48. $Y \neq \emptyset$ とする．Y が固定点を持たない自己写像を持つことと, Y が 2 つ以上元を含むことは同値である

濃度の大小関係は「順序」である．

Lemma 1.8.27. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ を写像とする. このとき, 部分集合 $A \subset X$, $B \subset Y$ で, $f(A) = B$, $g(B^c) = A^c$ となるものが存在する.

Proof. $S \subset X$ に対し $F(S) \subset X$ を $F(S) = g(f(S)^c)^c \subset X$ により定める. $F(A) = A$ となる集合 $A \subset X$ をみつけて $B = f(A)$ とおけばよい.

$F\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ は順序を保つ, すなわち, $S, T \subset X$ に対し,

$$S \subset T \Rightarrow F(S) \subset F(T)$$

が成り立つ. 実際

$$\begin{aligned} S \subset T &\Rightarrow f(S) \subset f(T) \\ &\Rightarrow f(S)^c \supset f(T)^c \\ &\Rightarrow g(f(S)^c) \supset g(f(T)^c) \\ &\Rightarrow g(f(S)^c)^c \subset g(f(T)^c)^c. \end{aligned}$$

X の部分集合族

$$\mathcal{A} = \{S \subset X \mid S \subset F(S)\}$$

を考える.

(証明で使うわけではないが) あきらかに $\emptyset \subset F(\emptyset)$ ゆえ $\emptyset \in \mathcal{A}$. 特に $\mathcal{A} \neq \emptyset$ である.

$A = \bigcup_{S \in \mathcal{A}} S$ とおく. $F(A) = A$ を示そう.

任意の $S \in \mathcal{A}$ に対し次が成り立つことに注意する.

1. $S \subset A$.
2. $F(S) \in \mathcal{A}$.
3. $S \subset F(A)$.

Proof.
1. A の定め方よりあきらか.
2. $S \in \mathcal{A}$ だから $S \subset F(S)$ であり, F は順序を保つので $F(S) \subset F(F(S))$.
3. $S \in \mathcal{A}$ だから $S \subset F(S)$. また 1 より $S \subset A$ で, F は順序を保つので $F(S) \subset F(A)$. よって $S \subset F(A)$.

□

$A \in \mathcal{A}$, すなわち $A \subset F(A)$ である. 実際, $S \in \mathcal{A}$ なら 3 より $S \subset F(A)$ だから $A = \bigcup_{S \in \mathcal{A}} S \subset F(A)$.

$A \in \mathcal{A}$ だから 2 より $F(A) \in \mathcal{A}$. よって 1 より $F(A) \subset A$.

したがって $F(A) = A$. □

exercise 49. P を順序集合, $f\colon P\to P$ を順序を保つ写像とする.

$$A=\{a\in P\mid a\le f(a)\}$$

が上限を持つとし, $\alpha=\sup A$ とおく. $\alpha=\max A$ であること及び, $f(\alpha)=\alpha$ であることを以下の順に示せ.

1. $f(\alpha)$ は A の上界である, すなわち $\forall a\in A: a\le f(\alpha)$.
2. $\alpha\in A$, すなわち $\alpha\le f(\alpha)$. 特に $\alpha=\max A$.
3. $\forall a\in A: f(a)\in A$.
4. $f(\alpha)\le\alpha$.
5. $f(\alpha)=\alpha$.

exercise 50. X,Y を集合, $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to X$ を写像とする.

$$\mathcal{A}=\{S\subset X\mid S\supset F(S)\}$$

とおく. 次を示せ.

1. $\mathcal{A}\ne\emptyset$ である.
2. $A=\bigcap_{S\in\mathcal{A}}S$ とおくと $F(A)=A$ である.

具体的な写像に対してこの Lem. 1.8.27 の証明にある方法で条件をみたす A を求めることは一般には難しい（と思う）. f または g が単射の場合, 次のようにすると求められることもある. なお, （$X=Y$, f,g として恒等写像を考えればわかるように）このような A は一意的に定まるわけではない. Lem. 1.8.27 で定めたものは, このような部分集合のうち最大のもの, 上の exe. で定めたものは最小のものである.

exercise 51. X,Y を集合, $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to X$ を写像とする. また $F\colon\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ を $F(S)=g(f(S)^c)^c$ により定め, $i\in\bar{\mathbb{N}}$ に対し $F^i(S)$ を帰納的に, $F^0(S)=S$, $F^{i+1}(S)=F(F^i(S))$ により定める. $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合の族とする.

1. g が単射であるとする. このとき次を示せ.
   (i) $F\left(\bigcup_\lambda S_\lambda\right)=\bigcup_\lambda F\left(S_\lambda\right)$
   (ii) $A=\bigcup_{i=0}^\infty F^i(\emptyset)$ とおけば $F(A)=A$.
2. f が単射であるとする. このとき次を示せ.
   (i) $F(\bigcap_\lambda S_\lambda)=\bigcap_\lambda F(S_\lambda)$.
   (ii) $A=\bigcap_{i=0}^\infty F^i(X)$ とおけば $F(A)=A$.

Caution! . 何度か注意しているが, 念の為. $\bigcup_{i=0}^\infty F^i(\emptyset)$ というのは $\bigcup_{i\in\bar{\mathbb{N}}}F^i(\emptyset)$ のことである. $F^\infty(\emptyset)$ という集合を考えるわけではない.

Corollary 1.8.28 (ベルンシュタイン, Bernstein)**.** X, Y を集合とする．このとき次は同値.

1. $X \cong Y$.
2. X から Y への単射と, Y から X への単射が存在する.

Proof. 2⇒1 を示せばよい．$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to X$ を単射とする．Lem. 1.8.27 より, $A \subset X$, $B \subset Y$ で $f(A) = B$, $g(B^c) = A^c$ となるものがある．f, g は単射であるから

$$f|_A\colon A \xrightarrow{\cong} B, \quad g|_{B^c}\colon B^c \xrightarrow{\cong} A^c$$

である．$h\colon X \to Y$ を

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ (g|_{B^c})^{-1}(x), & x \notin A \end{cases}$$

により定めれば h は全単射. □

Corollary 1.8.29. 濃度の大小関係は次をみたす．X, Y, Z を集合とする.

1. $|X| \leq |X|$.
2. $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| = |Y|$.
3. $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z|$ ならば $|X| \leq |Z|$.

Proof. 1 はあきらか．2 は Bernstein の定理．3 は単射の合成は単射であることからあきらか. □

Corollary 1.8.30. X, Y を集合とする．次は同値

1. $|X| < |Y|$.
2. X から Y への単射が存在するが, X から Y への全単射は存在しない.
3. X から Y への単射が存在するが, Y から X への単射は存在しない.

□

Corollary 1.8.31. X, Y, Z を集合とする.
$|X| < |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z|$ ならば $|X| < |Z|$.
特に $|X| < |Y|$ かつ $Y \subset Z$ ならば $|X| < |Z|$.

exercise 52. これを示せ.

Corollary 1.8.32. X, Y, Z を集合とする.
$|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |Z|$ かつ $|X| = |Z|$ ならば $|X| = |Y| = |Z|$. □

Corollary 1.8.33. X を集合, $A \subset X$ とし, $A \cong X$ であるとする．このとき, $A \subset B \subset X$ ならば $B \cong X$.

Proof. 包含写像は単射. □

Example 1.8.34. exe. 46 でみたように $(0,1) \cong \mathbb{R}$ である．$(0,1) \subset (0,1] \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$ だからこれらの濃度は全て等しい.

より一般に, ある $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ が存在して $(a,b) \subset A \subset \mathbb{R}$ であれば $A \cong \mathbb{R}$ である.（が, 逆は正しくない．つまり, $A \cong \mathbb{R}$ であるような $A \subset \mathbb{R}$ で, A は開区間を含まないようなものが存在する．時間の都合でふれないと思うが有名なものとしてカントール集合 (Cantor set) がある.)

exe. 51 を用いて全単射 $(0,1) \to (0,1]$ を作ってみよう．$f\colon (0,1) \to (0,1]$ を包含写像とし, $g\colon (0,1] \to (0,1)$ を $g(x) = x/2$ で定めると, いずれも単射.

$$
\begin{aligned}
f(\emptyset)^c &= (0,1] & & \\
g(f(\emptyset)^c) &= (0,1/2] & F(\emptyset) &= (1/2,1) \\
f(F(\emptyset))^c &= (0,1/2] \cup \{1\} & & \\
g(f(F(\emptyset))^c) &= (0,1/4] \cup \{1/2\} & F^2(\emptyset) &= (1/4,1/2) \cup (1/2,1) \\
f(F^2(\emptyset))^c &= (0,1/4] \cup \{1/2\} \cup \{1\} & & \\
g(f(F^c(\emptyset))^c) &= (0,1/8] \cup \{1/4\} \cup \{1/2\} & F^3(\emptyset) &= (1/8,1/4) \cup (1/4,1/2) \cup (1/2,1) \\
&\cdots & &
\end{aligned}
$$

となり全単射の組

$$
\begin{gathered}
(0,1) \supset A = \bigcup_{i=0}^{\infty} (1/2^{i+1}, 1/2^i) \xrightarrow[\cong]{f=\mathrm{id}} \bigcup_{i=0}^{\infty} (1/2^{i+1}, 1/2^i) = B \subset (0,1] \\
(0,1) \supset A^c = \{1/2^i \mid i \geq 1\} \xrightarrow[\cong]{g^{-1}=2\times} \{1/2^i \mid i \geq 0\} = B^c \subset (0,1]
\end{gathered}
$$

を得る．$h\colon (0,1) \to (0,1]$ を

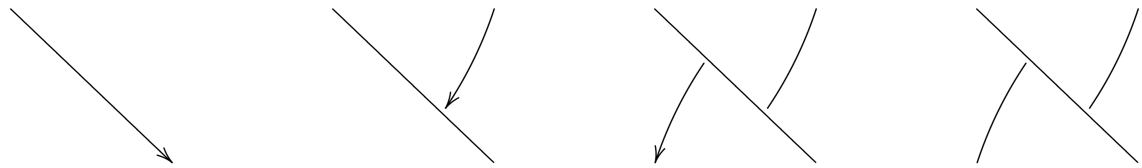
$$
h(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ 2x, & x \notin A \end{cases}
$$

で定めれば h は全単射.

$g\colon (0,1] \to (0,1)$ として $g(x) = x/(x+1)$ を使って同じ構成をすれば Ex. 1.8.22 の全単射（の逆写像）が得られる.

1.8.3　可算集合, 連続体の濃度

Definition 1.8.35. $\mathbb{N}$ と濃度が等しい集合を可算集合 (countable set) という．X が可算集合であるとき, X の濃度は可算無限濃度であるといい, $|X| = \aleph_0$（アレフゼロ）と表す.



X が可算集合であるとは, 直観的に言えば X の元全てに, 重なることなく順に番号を $1, 2, 3, \ldots$ と付けることが出来る（X から $\mathbb{N}$ への全単射がある）, あるいは X の元を順に並べることが出来る ($\mathbb{N}$ から X への全単射がある) ということである.

Definition 1.8.36. 集合 X が可算集合であるか有限集合であるとき, 高々可算 (at most countable) であるという.

Remark . 高々可算である集合を可算集合ということもある．このときは（有限でない）可算集合を可算無限集合 (countably infinite set) とよぶ.

Example 1.8.37. 正の偶数全体 $\mathbb{N}_{even} = \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \text{ は偶数}\right\}$, 正の奇数全体 $\mathbb{N}_{odd} = \left\{n \in \mathbb{N} \;\middle|\; n \text{ は奇数}\right\}$ はいずれも可算集合である．実際, $\mathbb{N}_{even} = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $\mathbb{N}_{odd} = \{1, 3, 5, \ldots\}$ と並べればよい．具体的に式で書けば $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{even}, f(n) = 2n$, $g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_{odd}, f(n) = 2n - 1$ はいずれも全単射.

Example 1.8.38. 整数全体 $\mathbb{Z}$ は可算集合である．実際, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ と並べる, あるいは $\mathbb{Z}$ の元に

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots \\
 & {\scriptstyle 7} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 6} &
\end{array}
$$

と番号を付ければよい．具体的に式で書くと, $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ を

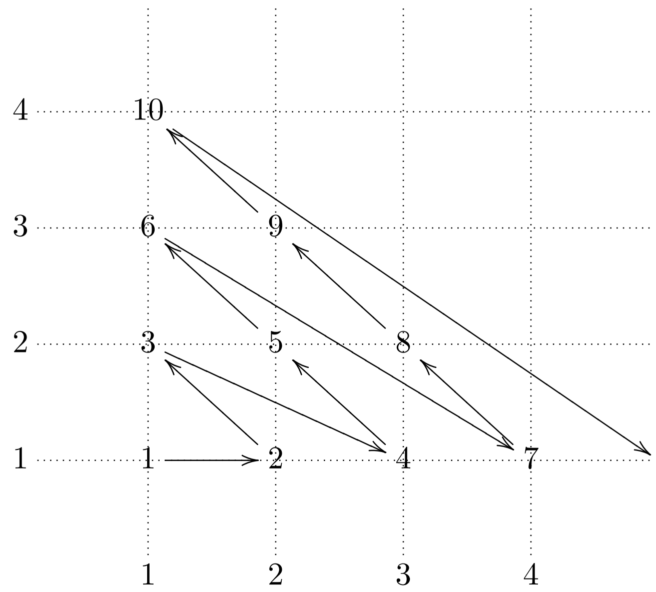
$$
f(n) = \begin{cases} -\frac{n-1}{2} & n \text{ が奇数}, \\ \frac{n}{2}, & n \text{ が偶数} \end{cases}
$$

と定めれば f は全単射であり, $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ を

$$g(l) = \begin{cases} -2l+1, & l \leq 0, \\ 2l, & l > 0 \end{cases}$$

で定めると g が f の逆写像.

Example 1.8.39. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合である．すなわち $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$．実際, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の元に図のように番号をつければよい.



exercise 53. Ex. 1.8.38 の図の対応を与える写像 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を式で書け.

exercise 54. $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を $f(l, m) = 2^{l-1}(2m-1)$ で定めると f は全単射であることを示せ.

Example 1.8.40. 有理数全体 $\mathbb{Q}$ は可算集合である.

実際, $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ を $r \in \mathbb{Q}$ が既約分数で p/q, $q \in \mathbb{N}$ と表されるときに $f(r) = (p, q)$ と定める（ただし $f(0) = (0, 1)$ とする）と f は単射である．（$\rho\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ を $\rho(l, m) = l/m$ で定めれば $\rho \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$.）よって $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}|$. $\mathbb{Z} \cong \mathbb{N}$ なので $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ であり, 上でみたように $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ だから $|\mathbb{Z} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$．すなわち $|\mathbb{Q}| \leq \aleph_0$.

また $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ だから $\aleph_0 \leq |\mathbb{Q}|$．よって $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

具体的に有理数を順に並べるには, 例えば $r \in \mathbb{Q}$ を既約分数で p/q と表したとき $|p| + |q|$ が小さいものから順に, $|p| + |q|$ が同じものについては分母が大きいものから順

に, 正負交互に並べればよい. 見やすさのため正の有理数だけならべると

$$\left\{\underbrace{\frac{1}{1}}_{p+q=2},\underbrace{\frac{1}{2},\frac{2}{1}}_{p+q=3},\underbrace{\frac{1}{3},\frac{3}{1}}_{p+q=4},\underbrace{\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},\frac{4}{1}}_{p+q=5},\dots\right\}$$

といった具合.

可算無限濃度は濃度の大小に関して極小である, すなわち可算無限より小さな無限濃度はない. (後で述べる選択公理を仮定すれば最小であることが示せる.)

Theorem 1.8.41. 可算集合の部分集合は高々可算集合である.

Proof. $\mathbb{N}$ の部分集合 $A \subset \mathbb{N}$ は高々可算であることを示せばよいが, 例えば A の元を小さい方から順にならべればよい.

もう少し厳密には, 次のようにするとよい. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{N}$ とする. $a \in A$ に対し $A_a \subset A$ を $A_a = \{l \in A \mid l \leq a\}$ と定めると, $a \in A_a \subset [a+1]$ だから A_a は空でない有限集合である. $c\colon A \to \mathbb{N}$ を $c(a) = |A_a|$ で定める.

$a, b \in A$, $a < b$ ならば $A_a \subsetneq A_a \cup \{b\} \subset A_b$ だから $c(a) < c(b)$ となるので c は単射である.

また任意の $a \in A$ に対し $\{1, \dots, c(a)\} \subset c(A)$ である. 実際, $|A_a| = c(a)$ なので全単射 $f\colon \{1, \dots, c(a)\} \cong A_a$ がある. f は順序を保つとしてよい. $1 \leq l \leq c(a)$ に対し, $b = f(l) \in A_a$ を考えれば, f が順序を保つ全単射だから $\{1, \dots, l\} \cong A_b$ なので $c(b) = |A_b| = l$.

c が全射ならば A は可算集合.

c が全射でないとする. $m \notin c(A)$ をひとつとる. このとき $c(A) \subset [m]$ であり, A は有限集合. $((\exists a \in A : c(a) \geq m) \Rightarrow m \in c(A).)$ □

Theorem 1.8.42. X を可算集合, Y を高々可算な集合とする. このとき

1. $X \cup Y$ は可算集合.
2. $Y \neq \emptyset$ ならば $X \times Y$ は可算集合.

Proof. 1. $X \cup Y = X \cup (Y \setminus X)$, $X \cap (Y \setminus X) = \emptyset$ であり, Cor. 1.8.4, Thm. 1.8.41 より $Y \setminus X$ は高々可算. よって, $X \cap Y = \emptyset$ の場合を考えればよい. Y が有限集合の場合はやさしい. Y が可算の場合を考える. $f\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} X$, $g\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\cong} Y$ を全単射とする. $h\colon \mathbb{N} \to X \cup Y$ を

$$h(n) = \begin{cases} f(\frac{n+1}{2}), & n \text{ が奇数}, \\ g(\frac{n}{2}), & n \text{ が偶数} \end{cases}$$

と定めれば h は全単射.

2. Y が有限集合の場合はやさしい. Y が可算集合の場合 $X \times Y \cong \mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$.

$\square$

exercise 55. X を可算集合, Y を有限集合とする.

1. $X \cap Y = \emptyset$ とする. $X \cup Y$ は可算集合であることを示せ.
2. $Y \neq \emptyset$ ならば $X \times Y$ は可算集合であることを示せ.

Theorem 1.8.43 (Cantor)**.** 実数全体 $\mathbb{R}$ は可算集合ではない.

Proof. 1 より小さい正の実数で, 少数で表したとき各桁に 0 か 1 しかあらわれないもの全体を B とする.

$$\begin{aligned} B &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = 0.a_1a_2\ldots \ (\text{ただし } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \{0,1\}) \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} \ (\text{ただし } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \{0,1\}) \right\}. \end{aligned}$$

$\aleph_0 < |B|$ を示せばよい.

写像 $i \colon \mathbb{N} \to B$ を $i(n) = 10^{-n}$ で定めるとあきらかに i は単射ゆえ $\aleph_0 \leq |B|$.

$\mathbb{N}$ から B への全射が存在しないことを示せばよい. $f \colon \mathbb{N} \to B$ を写像とし, $f(1), f(2), \ldots$ を順に並べる.

$$\begin{aligned} f(1) &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots \\ f(2) &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots \\ f(3) &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots \\ &\ldots \end{aligned}$$

$n \in \mathbb{N}$ に対し $b_n \in \{0,1\}$ を

$$b_n = \begin{cases} 0, & a_{nn} = 1, \\ 1, & a_{nn} = 0 \end{cases}$$

により定め,

$$b = 0.b_1b_2b_3\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 10^{-n} \in B$$

を考える. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_{nn} \neq b_n$ だから $f(n) \neq b$. よって f は全射ではない. $\square$

Remark . $j \colon 2^{\mathbb{N}} \to B \subset \mathbb{R}$ を $j(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)10^{n}$ で定めればあきらかに j は全単射であるから

$$|2^{\mathbb{N}}| = |B| \leq |\mathbb{R}|$$

であり, ここでの証明は $|\mathbb{N}| < |2^{\mathbb{N}}|$ を示しているとみなせるが, よく見るとわかるように, ここでの議論は Thm. 1.8.26 で $X = \mathbb{N}$, $Y = [2]$, $\tau = \neg\colon [2] \to [2]$ としたものに他ならない.

Definition 1.8.44. 集合 X と実数全体 $\mathbb{R}$ の濃度が等しいとき, X の濃度は連続体の濃度 (cardinality of continuum) であるといい, $|X| = \aleph$ と表す.

上で注意したように $|2^{\mathbb{N}}| \leq \aleph$ であるが, 実はこれらは等しい.

Theorem 1.8.45. $\aleph = |2^{\mathbb{N}}|$.

Proof. $\aleph \leq |2^{\mathbb{N}}|$ を示せばよい. 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ を $f(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq x\}$ で定める. $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ とすると $x < r < y$ となる $r \in \mathbb{Q}$ が存在するので $r \in f(y) \setminus f(x)$ となり $f(x) \neq f(y)$. よって f は単射. （ここでは $\mathbb{Q}$ の $\mathbb{R}$ における稠密性を用いた. $\mathbb{R}$ を Dedekind の切断として構成するという立場からは f は包含写像に他ならない.）$\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$ であったから $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cong 2^{\mathbb{Q}} \cong 2^{\mathbb{N}}$. □

Corollary 1.8.46. $|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = \aleph$.

Proof. 単射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ を構成するのはやさしい.

$|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}|$ を示せばよいが, Thm. 1.8.45 でみたように $\mathbb{R} \cong 2^{\mathbb{N}}$ であり, また $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$ だから Thm. 1.4.44 より,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cong \left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} \cong 2^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{R}.$$

□

exercise 56. 単射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ をつくれ.

Example 1.8.47. $p\colon (0, 1] \to S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ を $p(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ で定めると p は全単射である. $(0, 1] \cong I = [0, 1] \cong \mathbb{R}$ であるから

$$S^1 \cong I \cong \mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong I \times I \cong S^1 \times I \cong S^1 \times S^1$$

はいずれも連続体の濃度をもつ.

1.9　選択公理

Cor. 1.8.14 でみたように, X, Y が空でない有限集合であるとき, X から Y への単射が存在することと Y から X への全射が存在することは同値であった. 有限とは限らない場合を考えてみよう.

Definition 1.9.1. $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. 写像 $r\colon Y \to X$ で, $r \circ f = \mathrm{id}_X$ をみたすものをレトラクション (retraction) あるいは左逆写像 (left inverse map) という. あきらかに f がレトラクションを持てば f は単射であり, レトラクションは全射である.
   f がレトラクションを持つとき, 分裂単射 (split monomorphism) という.
2. 写像 $s\colon Y \to X$ で $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ をみたすものを f の切断 (section) あるいは右逆写像 (right inverse map) という. あきらかに f が切断を持てば f は全射であり, 切断は単射である.
   f が切断を持つとき, 分裂全射 (split epimorphism) という.

exercise 57. $f\colon X \to Y$ を写像とする. 次を示せ.

1. f がレトラクションを持てば f は単射であり, レトラクションは全射である.
2. f が切断を持てば f は全射であり, 切断は単射である.

講義では時間の都合で扱わなかったが Thm. 1.4.56 から f が単射であることとレトラクションをもつことは同値であることがわかる. 直接示しておこう.

Proposition 1.9.2. X, Y を空でない集合とし, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 次は同値である.

1. f は単射.
2. f はレトラクションを持つ.

Proof. 1⇒2 を示せばよい.

f は単射なので, 逆写像 $f^{-1}\colon f(X) \to X$ がある. $x_0 \in X$ をひとつとる.

$$r(y) = \begin{cases} f^{-1}(y) & y \in f(X), \\ x_0 & y \notin f(X) \end{cases}$$

とすればよい. □

特に次が成り立つ.

Corollary 1.9.3. X, Y を空でない集合とする．X から Y への単射が存在すれば，Y から X への全射が存在する．

一方，f が全射ならば切断をもつか？ を考えてみる．Lem. 1.8.5 や Cor. 1.8.7 の証明のように，$f\colon X \to Y$ が全射であるから，各 $y \in Y$ に対し，$f(x) = y$ となるような $x \in X$ が存在するので，そのような x をひとつ選び $s(y) = x$ とすればよい，ように思うが，これがなかなか難しい．このようなことが出来ることを保証するのが選択公理である．

Axiom 1.9.4 (選択公理, Axiom of Choice)**.** 次の条件は同値である．

これら同値な条件を選択公理 (Axiom of Choice) という．また，3 の条件をみたす写像 φ を選択関数 (choice function) という．

1. 任意の全射は切断を持つ．
2. 空でない集合の直積は空ではない．
   すなわち，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $X_\lambda \neq \emptyset$ であるような集合族であれば，$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$.
3. 空でない集合からなる集合族は選択関数をもつ．
   すなわち，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $X_\lambda \neq \emptyset$ であるような集合族であれば，写像 $\varphi\colon \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ で，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し，$\varphi(\lambda) \in X_\lambda$ となるようなものが存在する．

これらが同値であることの証明．2 と 3 が同値であるのは直積の定義（Def. 1.5.12）よりあきらか．

1⇒3．包含写像と射影の合成

$$\begin{tikzcd}
 & & \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \\
\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[r, hook] \arrow[urr, bend left, "p_2"] \arrow[drr, bend right, "p_1"'] & \Lambda \times \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \arrow[ur, "q_1"'] \arrow[dr, "q_2"] & \\
 & & \Lambda
\end{tikzcd}$$

により，写像 $p_1\colon \coprod X_\lambda \to \Lambda$, $p_2\colon \coprod X_\lambda \to \bigcup X_\lambda$ を定める．任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $X_\lambda \neq \emptyset$ なので，p_1 は全射である．仮定より $s\colon \Lambda \to \coprod X_\lambda$ で $p_1 \circ s = \mathrm{id}_\Lambda$ をみたすものが存在する．$\varphi = p_2 \circ s\colon \Lambda \to \bigcup X_\lambda$ とおけばよい．

3⇒1． $f\colon X \to Y$ を全射とする． 集合族 $\{f^{-1}(y)\}_{y\in Y}$ を考えると，f が全射なので，任意の $y \in Y$ に対し，$f^{-1}(y) \neq \emptyset$ である． よって仮定より，写像 $\varphi\colon Y \to$

$\bigcup_{y\in Y} f^{-1}(y) = X$ で, 任意の $y \in Y$ に対し $\varphi(y) \in f^{-1}(y)$ となるものが存在する．あきらかに $f \circ \varphi = \mathrm{id}_Y$. □

Proposition 1.9.5. X, Y を空でない集合とする．選択公理のもと, X から Y への単射が存在することと, Y から X への全射が存在することは同値.

Proof. レトラクションは全射であり，切断は単射である． □

集合論の公理について何も述べていないのに選択公理だけわざわざ一節をさいて紹介するのは, 歴史的理由もあるのであるが, この公理がないと証明出来ない基本的なことがたくさんあるということと, その一方, この公理を認めると直観に反することが証明できてしまう（有名なのはバナッハ・タルスキの逆理）ということにある（のだと思う）.

選択公理と同値な条件がいろいろと知られている.

1.9.1　Zorn の補題

Definition 1.9.6. X を順序集合とする．X の任意の全順序部分集合（すなわち X の部分集合で全順序部分集合になっているもの）が上界をもつとき, X を帰納的順序集合 (inductively ordered set) という

Example 1.9.7.
1. $\mathbb{Q}$ に数の大小関係で順序をいれる．明らかに $\mathbb{Q}$ は帰納的順序集合ではない.
   $\mathbb{Q}_{\leq 0} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \leq 0\}$ とおくと, 明らかに $\mathbb{Q}_{\leq 0}$ は帰納的順序集合である.
2. $\mathcal{P}(X)$ は帰納的順序集合である.

exercise 58. 上の例の主張を確かめよ.

選択公理を仮定すると（ZF のもと）次が成り立つことが知られている．この講義では証明は省略する.

Theorem 1.9.8 (Zorn の補題, Zorn's lemma)**.** 帰納的順序集合は少なくともひとつの極大元をもつ.

Zorn の補題を使う際, 次のことに注意しておくとよい.

Lemma 1.9.9. X を空でない順序集合とする．このとき次は同値である.

1. X は帰納的順序集合である.
2. X の任意の空でない全順序部分集合は上界をもつ.

Proof. 1⇒2 はあきらか．逆を示すには $\emptyset \subset X$ が上に有界であることを示せばよい（$\emptyset$ は

全順序部分集合である.）が Ex. 1.7.18 でみたように, $X \neq \emptyset$ であれば $\emptyset \subset X$ は有界である. $\square$

逆に Zorn の補題を仮定すると, 選択公理を示すことが出来る. Zorn の補題の使い方のよい例であるので証明してみよう.

Theorem 1.9.10. Zorn の補題を仮定する. このとき, 任意の全射 $f\colon X \to Y$ は切断をもつ.

Proof. X または Y が空集合の場合は $f = \mathrm{id}_\emptyset$ となるのであきらか.

X, Y ともに空でない場合を考える. $f\colon X \to Y$ を写像とする.

$$\mathcal{S} = \{(B, g) \mid B \subset Y,\ g\colon B \to X,\ f \circ g = 1_B\}$$

とおく.

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ である. 実際, $x \in X$ をひとつとり $y = f(x) \in Y$ とおく. $g\colon \{y\} \to X$ を $g(y) = x$ で定めると, 明らかに $(\{y\}, g) \in \mathcal{S}$ である.
2. $(B, g), (B', g') \in \mathcal{S}$ に対して
$$(B, g) \leq (B', g') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \subset B' \text{ かつ } g'|_B = g$$
と定めると, あきらかに $\leq$ は $\mathcal{S}$ に順序を定める.
3. この順序に関して $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である. 実際, $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ を全順序部分集合とする.
$$T = \bigcup_{(B,g)\in\mathcal{T}} B$$
とおき, $t\colon T \to X$ を, $(B, g) \in \mathcal{T}$ に対し $y \in B$ であるとき, $t(y) = g(y)$ で定める. t は well-defined である. 実際, $(B', g') \in \mathcal{T}$ に対し $y \in B'$ であるとすると, $\mathcal{T}$ は全順序集合なので $(B, g) \leq (B', g')$ または $(B', g') \leq (B, g)$ のいずれかが成り立つ. $(B, g) \leq (B', g')$ としてよい. このとき $y \in B \subset B'$ であり, $g'|B = g$ なので $g'(y) = g(y)$. 作り方から $f \circ t = 1_Y$ なので $(T, t) \in \mathcal{S}$ であり, また任意の $(B, g) \in \mathcal{T}$ に対し $B \subset T$ かつ $t|B = g$ であるから (T, t) は $\mathcal{T}$ の上界である. （$\mathcal{T}$ の上限であることもすぐわかる.）
4. Zorn の補題より, $\mathcal{S}$ には極大元が存在する. $(Y', s) \in \mathcal{S}$ を極大元とする. f が全射であれば $Y' = Y$ である. 実際, $Y' \neq Y$ であるとすると, $Y \setminus Y' \neq \emptyset$ である. $y_0 \in Y \setminus Y'$ をひとつとると f が全射なので $f(x) = y_0$ となる $x \in X$ が存在する.

$\tilde{s}\colon Y' \cup \{y_0\} \to X$ を

$$\tilde{s}(y) = \begin{cases} s(y), & y \in Y' \\ x, & y = y_0 \end{cases}$$

とおけば $(Y', s) < (Y' \cup \{y_0\}, \tilde{s}) \in \mathcal{S}$ となり極大性に反する．

$\square$

Remark．帰納的順序集合を「任意の全順序部分集合が**上限**をもつ順序集合」と定義する流儀もある．区別するため，この定義をみたすものを「きのうてき順序集合」と書くことにする．

あきらかに「きのうてき順序集合」は帰納的順序集合であるが，逆は成り立たない．例えば例. 1.9.7 の $\mathbb{Q}_{\leq 0}$ は「きのうてき」ではない．しかし，Zorn の補題はどちらの定義を用いても成り立ち，以下は同値である．

1. 選択公理.
2. 帰納的順序集合は少なくともひとつの極大元をもつ.
3. 「きのうてき順序集合」は少なくともひとつの極大元をもつ.

実際，2⇒3 は「きのうてき」ならば帰納的であることからあきらかであり，Thm. 1.9.10 の証明は，$\mathcal{S}$ が途中注意したことから「きのうてき順序集合」となっているので，3⇒1 の証明になっている．

Zorn の補題の典型的使用例.

Theorem 1.9.11. 選択公理を仮定する．

R を（乗法に関する単位元をもつ）可換環とする．任意のイデアル $I \subsetneq R$ に対し，I を含む極大イデアルが存在する．

特に $R \neq \{0\}$ の場合，R には極大イデアルが存在する．

Remark．代数で学んだと思うが，R の部分集合 I がイデアルであるとは I が R の R 部分加群であるということ，つまり

1. $x, y \in I \Rightarrow x + y \in I$
2. $a \in R,\ x \in I \Rightarrow ax \in I$

をみたすということ．また $\mathfrak{m}$ が極大イデアルであるとは，包含関係に関して極大であるような真部分イデアルであるということ，つまり

1. $\mathfrak{m} \subsetneq R$
2. $\mathfrak{m} \subsetneq I \subsetneq R$ となるようなイデアル I は存在しない

ということ.

Proof. $I \subsetneq R$ をイデアルとする. I を含む真部分イデアル全体

$$\mathcal{S} = \left\{ J \;\middle|\; I \subset J \subsetneq R,\ J \text{ はイデアル} \right\}$$

に包含関係で順序をいれる. $\mathcal{S}$ が帰納的順序集合であることを示そう.

あきらかに $I \in \mathcal{S}$ だから $\mathcal{S} \neq \emptyset$ であるから, $\emptyset \neq \mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ を全順序部分集合とするとき $\mathcal{T}$ が上界をもつことを示せばよい.

$$K = \bigcup_{J \in \mathcal{T}} J$$

とおく. $K \in \mathcal{S}$ を示す.

- $\mathcal{T} \neq \emptyset$ だから $I \subset K$ である.
- $x, y \in K$ とする. ある $J, J' \in \mathcal{T}$ が存在し, $x \in J$, $y \in J'$ である. $\mathcal{T}$ は全順序集合なので $J \subset J'$ か $J' \subset J$ のいずれかが成り立つ. $J' \subset J$ としてよい. このとき $x, y \in J$ であり, J はイデアルなので $x + y \in J \subset K$. $a \in R$, $x \in K$ とする. ある $J \in \mathcal{T}$ が存在し $x \in J$ である. J はイデアルであるから $ax \in J \subset K$. よって K はイデアルである.
- 任意の $J \in \mathcal{T}$ に対し, $J \subsetneq R$ であるから $1 \notin J$ である. よって $1 \notin K$ となり $K \subsetneq R$.

以上から $K \in \mathcal{S}$ であり, あきらかに K は $\mathcal{T}$ の上界, ゆえ $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合である.

Zorn の補題より $\mathcal{S}$ には極大元 $\mathfrak{m}$ が存在するが, これが求めるものである. □

証明はしないが, 同様な議論で次が示せる.

Theorem 1.9.12. 選択公理を仮定する.
k を体とする. k 上のベクトル空間は基底をもつ.

問題集 . 59

1.9.2 整列可能定理

Ex. 1.7.4 でみたように, 任意の集合に自明な順序をいれることが出来るが, 選択公理を仮定すると整列順序をいれることが出来ることがわかる.

選択公理を仮定すると（ZF のもと）次が成り立つことが知られている. この講義では証明は省略する.

Theorem 1.9.13. 整列可能定理 (wellordering theorem)　任意の集合は, うまく順序を定義してやることで整列集合（Def. 1.7.22）にすることができる.

整列集合では数学的帰納法と同様な議論（超限帰納法 (transfinite induction) と呼ばれる）が使えるため, 選択公理を利用する場面でよく使われた. が, 現在では使いやすいので Zorn の補題の方がよく使われる.

実はこれも（ZF のもと）選択公理と同値であることが示せる. 証明は有限集合のときに用いた議論（Cor.1.8.5 等）と同様である.

Theorem 1.9.14. 整列可能定理を仮定すれば選択公理が成り立つ.

Proof. $f\colon X \to Y$ を全射とする. f が切断をもつことを示そう. X, Y ともに空でないとしてよい.

X に整列順序をいれる. f が全射なので, 任意の $y \in Y$ に対し $X \supset f^{-1}(y) \neq \emptyset$ である. よって $\min f^{-1}(y)$ が存在する. $s\colon Y \to X$ を $s(y) = \min f^{-1}(y)$ で定めればあきらかに $f \circ s = \mathrm{id}_Y$ である. □

1.9.3　選択公理と濃度

無限集合を扱う際には, 選択公理を仮定しないと成り立たないことがたくさんある.

この節では選択公理を仮定する.

集合 X から Y への単射が存在するとき $|X| \leq |Y|$ と書くのであった（Def. 1.8.24）. Prop. 1.9.5 からただちに次を得る.

Theorem 1.9.15. X, Y を空でない集合とする. 次は同値.

1. $|X| \leq |Y|$.
2. X から Y への単射が存在する.
3. Y から X への全射が存在する.

Theorem 1.9.16. 高々可算な集合の可算和は高々可算集合である. すなわち, X_i $(i \in \mathbb{N})$ が高々可算な集合であれば $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ も高々可算な集合である.

とくに可算集合の可算和は可算集合である.

Proof. $X_i \neq \emptyset$ としてよい. $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ とおく.

各 X_i は高々可算なので $\mathbb{N}$ から X_i への全射が存在する. 各 X_i に対し全射 $f_i\colon \mathbb{N} \to X_i$ をひとつ選ぶ（ここで選択公理を使う）. 写像 $f\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to X$ を $f(i,n) = f_i(n)$ により定めるとあきらかに f は全射である. よって Thm. 1.9.15 より $|X| \leq |\mathbb{N}\times\mathbb{N}| = \aleph_0$. （実

はこの部分は選択公理なしでも示せる.）したがって Thm. 1.8.41 より X は高々可算.

あきらかに $X_1 \subset X$ なので X_1 が可算集合であれば $\aleph_0 = |X_1| \leq |X|$ である．したがって $|X| = \aleph_0$. □

exercise 59. X を可算集合, Y を集合とする．全射 $f \colon X \to Y$ は切断を持つことを選択公理を使わず示せ．（Hint: Thm. 1.7.23 でみたように $\mathbb{N}$ は整列集合である．Thm. 1.9.14 の証明を真似よ.）

上でも使ったが, 可算無限濃度は極小, すなわち可算無限より小さな無限濃度は存在しないのであった（Thm. 1.8.41）．選択公理を仮定すると可算無限濃度は最小の無限濃度であることが示せる.

Theorem 1.9.17. 任意の無限集合は可算部分集合を含む．すなわち X が無限集合ならば $\aleph_0 \leq |X|$.

Proof. 素朴には, 次のようにすればよい．X から順に異なる元を $x_1, x_2, \dots$ と取り出していき, x_n まで取り出したとする．X が無限集合だから $X - \{x_1, \dots, x_n\} \neq \emptyset$ ゆえ $x_{n+1} \in X - \{x_1, \dots, x_n\}$ を取り出せる．このようにして可算無限部分集合 $\{x_1, \dots\} \subset X$ が得られる.

この論法は選択公理と数学的帰納法による写像の定義により正当化される [5, 定理 3.13] のであるが, 数学的帰納法による写像の定義についてきちんと述べておかないと, なぜ単に数学的帰納法を使うだけではだめで, 選択公理を使わないといけないのかがよくわからないのではないかと思う.

ちょっと違う方法で示してみよう．X の有限部分集合全体

$$\mathcal{P}_f(X) = \left\{ A \subset X \;\middle|\; A \text{ は有限集合} \right\}$$

と写像

$$c \colon \mathcal{P}_f(X) \to \bar{\mathbb{N}}, \quad c(A) = |A|$$

を考える．X は無限集合なので c は全射である．（つまり任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, X は n 個の相異なる元を含む.）切断 $s \colon \bar{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_f(X)$ をひとつとる．$A_n = s(n)$ とおくと, $A_n \subset X$ であり, $c(A_n) = n$ すなわち $|A_n| = n$ である．（つまり各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, X から相異なる n 個の元を選んだということ.）$A = \bigcup_n A_n \subset X$ とおけば, Thm. 1.9.16 より A は高々可算集合である．また任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $|A| \geq |A_n| = n$ であるから A は有限集合ではない．よって Thm. 1.8.41 より A は可算集合である． □

Remark . 上の証明では Thm. 1.9.16 を使ったが, 少し工夫をすると使わないでも示せる.

Cor. 1.8.29 で濃度の大小関係は順序の公理をみたすことをみた．選択公理を仮定すると，“全順序” であることが示せる．

Theorem 1.9.18 (濃度の比較可能定理, Comparability theorem for cardinalities)**.** X, Y を集合とすると $|X| \leq |Y|$ か $|Y| \leq |X|$ のいずれかが成り立つ．

Proof. X, Y ともに空でない場合を考えればよい．

$$\mathcal{S} = \left\{(X', Y', f') \;\middle|\; X' \subset X,\ Y' \subset Y,\ f' \colon X' \to Y' \text{は全単射}\right\}$$

とおくと，Thm. 1.9.10 の証明と同様に示せる．詳細は練習問題としよう． □

exercise 60.

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ であることを示せ．
2. $\mathcal{S}$ における順序関係 $\leq$ を，$(X', Y', f'), (X'', Y'', f'') \in \mathcal{S}$ に対し，$(X', Y', f') \leq (X'', Y'', f'') \Leftrightarrow X' \subset X'',\ Y' \subset Y'',\ f''|X' = f'$ と定める．（これが順序関係であることは認めてよい.）このとき，$\mathcal{S}$ は帰納的順序集合であることを示せ．
3. $\mathcal{S}$ の極大元を (X_0, Y_0, f_0) とする．このとき $X_0 = X$ または $Y_0 = Y$ であることを示せ．
4. $|X| \leq |Y|$ か $|Y| \leq |X|$ のいずれかが成り立つことを示せ．

1.9.4　選択公理

この講義では以下特にことわらない限り選択公理を仮定する．

第 2 章

距離空間と位相空間

2.1 実数

例年, 私の講義では前期の大半を使って実数論の復習をするのであるが, 今年は時間の都合でやらない. 前期の解析学序論で詳しく扱ったと思うので, 実数の性質についてはそちらを参考にせよ. なお, 昨年以前の私の講義ノートも web においてあるので, 必要があればそれを参照のこと.

この節で実数について必要なことをまとめておく. 実数とはなにか? (いろいろな考え方があるが, 現在最も標準的と思われる考え方では) 連続性の公理をみたす全順序体を実数体といい, その元を実数という.

Definition 2.1.1. 可換体 $\mathbb{K}$ に全順序が与えられており, 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ に対し以下の条件が成り立つとき, $\mathbb{K}$ を全順序体 (totally ordered field) という.

1. $a \leq b$ ならば, 任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し $a + c \leq b + c$
2. $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば, $ab \geq 0$

全順序体においては普通の数における不等式と同様な計算をすることが出来る.

Remark . 複素数体 $\mathbb{C}$ には全順序体となるような順序をいれることは出来ない. 実際, 全順序体においては $a \neq 0$ ならば $a^2 > 0$ であり, $1 = 1^2 > 0$ なので $-1 < 0$ である.

全順序体となるような順序があるとすると, $i \in \mathbb{C}$ について $i^2 = -1 < 0$ となり矛盾.

Definition 2.1.2. 次の連続性の公理 をみたす全順序体を実数体 とよび $\mathbb{R}$ であらわす. 実数体の元を実数という.

C 1 (連続性の公理). 空でない部分集合が上に有界ならば上限が存在する.

Remark . “普通の” 集合論のもと, 適当な意味でただひとつだけ, 実数体が存在すること

が示せる.

Remark . 全順序体において連続性の公理と同値である条件がいろいろと知られている.

Definition 2.1.3. $\mathbb{K}$ を全順序体とする. $\mathbb{K}$ が次の性質（アルキメデスの公理 ）をみたすとき, $\mathbb{K}$ はアルキメデス的であるという.

- 任意の $a > 0, b > 0$ に対してある自然数 n が存在して $na > b$ となる.

Lemma 2.1.4. K を全順序体とする. 次は同値である.

1. $\mathbb{K}$ はアルキメデス的である.
2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ は（$\mathbb{K}$ において）上に有界でない.
3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 n が存在して $1/n < \varepsilon$ となる.

Proof. $1 \Rightarrow 2$) アルキメデスの公理において $a = 1$ とすればよい.
$2 \Rightarrow 3$) $0 < \varepsilon \in \mathbb{K}$ とする. $\varepsilon \neq 0$ ゆえ逆元 $1/\varepsilon$ が存在する. $\mathbb{N}$ が有界ではないので $n \in \mathbb{N}$ で, $1/\varepsilon < n$ となるものが存在する. $n, \varepsilon > 0$ なので $1/n < \varepsilon$.
$3 \Rightarrow 1$) $a, b \in \mathbb{K}$, $a > 0$, $b > 0$ とする. $a/b > 0$ である. 仮定よりある自然数 n が存在して $1/n < a/b$ となる. $n, b > 0$ ゆえ $na > b$. □

Example 2.1.5. 有理数体 $\mathbb{Q}$ はアルキメデス的である. 実際, $r > 0$ とすると $r = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$ と書ける. $1 \leq p$ だから $1/2q < 1/q \leq p/q$.

Remark . アルキメデス的ではない全順序体の例が [4] にある.

Proposition 2.1.6. 実数体 $\mathbb{R}$ はアルキメデス的である.

Proof. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ が上に有界でないことを示せばよい.
　背理法で示そう. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとする. $\mathbb{N} \neq \emptyset$ なので連続性の公理より $\mathbb{N}$ には上限が存在する. $s = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$ とおく. $s - 1 < s$ だから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $s - 1 < N$ となる. よって $s < N + 1$ となるが, $N + 1 \in \mathbb{N}$ なので, これは s が $\mathbb{N}$ の上界であることに反する. □

2.2 距離

Definition 2.2.1. X を集合とする.

$X \times X$ 上定義された実数値関数

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

が次の 3 つの条件をみたすとき, d を X 上の距離関数 (metric) という.

D1 (i) 任意の $x, y \in X$ について $d(x, y) \geq 0$.

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

D2 任意の $x, y \in X$ について $d(x, y) = d(y, x)$.

D3 (三角不等式) 任意の $x, y, z \in X$ について $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Definition 2.2.2. 集合 X とその上の距離関数 d が与えられたとき, 組 (X, d) を距離空間 (metric space) という.

また $x, y \in X$ に対し実数 $d(x, y)$ を x と y の距離 (distance) という.

混乱のおそれがないときは d を省略して単に距離空間 X と書くことが多い.

Definition 2.2.3. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 距離関数 d を A に制限したもの, すなわち,

$$A \times A \ni (a, b) \mapsto d(a, b) \in \mathbb{R}$$

を考えると, これは A 上の距離関数になり, この距離により A は距離空間になる.

距離空間の部分集合をこのようにして距離空間とみたとき, 部分距離空間 (metric subspace) または単に部分空間 (subspace) という.

Definition 2.2.4. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.

写像 $f\colon X \to Y$ が距離を保つあるいは等長写像 (isometry) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x, x' \in X$ に対し, $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ である.

X から Y への全射等長写像が存在するとき, X と Y は距離空間として等長 (isometric), あるいは同型 (isomorphic) であるという.

Remark . 全射であるもののみを等長写像という場合もある.

exercise 61. 等長写像の合成は等長写像である.

exercise 62. 部分距離空間の包含写像は等長写像である.

exercise 63. 1. 等長写像は単射である.

2. $f\colon X \to Y$ が全射等長写像ならば, f の逆写像も等長写像である.
3. X と Y が距離空間として等長である $\Leftrightarrow$ 等長写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ が存在して, $g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$ が成り立つ.

exercise 64. 写像 $f\colon X \to Y$ が距離を保てば, X と $f(X)$ は距離空間として等長である.

Definition 2.2.5. X を距離空間, $x \in X$, $\varepsilon > 0$ とする.

1. X の部分集合
$$\mathrm{U}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$
を x を中心とする半径 ε の開球 (open ball) , 開円盤 (open disc) あるいは ε 近傍という.
2. X の部分集合
$$\mathrm{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$$
を点 x を中心とする半径 ε の閉球 (closed ball) または閉円盤 (closed disc) という.
3. X の部分集合
$$\mathrm{S}_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$$
を x を中心とする半径 ε の球面 (sphere) という.

問題集 . 78(1)(2), 79(1)(2), 81(1), 86, 91(1)(2)

Example 2.2.6 (n 次元ユークリッド空間, n-dimensional Euclidian space)**.** $\mathbb{R}$ の n 個の直積
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$$
の 2 点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ に対し x と y の距離 $d(x, y)$ を
$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$
で定めると d は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.

Proof. D1 明らかに $d(x, y) \geq 0$ であり, $x = y$ ならば $d(x, y) = 0$ である.

$d(x, y) = 0$ とすると,
$$0 \leq (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 0$$

であるから $x_i - y_i = 0$. よって $x = y$.

D2 明らか.

D3 $\mathbb{R}^n$ の 3 点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ に対し $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$ とおく. $x_i - z_i = x_i - y_i + y_i - z_i = a_i + b_i$ であるから

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad d(y,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}, \quad d(x,z) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2}$$

となる.

$$\begin{aligned}(d(x,y) + d(y,z))^2 - d(x,z)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} - \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \\ &= 2\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} - \sum_{i=1}^n a_i b_i\right) \geq 0.\end{aligned}$$

ここで最後の不等号は次に示す Schwartz の不等式をもちいた. $d(x,y)$, $d(y,z)$ はともに非負であるから $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ となる. □

Lemma 2.2.7 (Schwartz の不等式)**.** a_i, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ を実数とすると次の不等式が成立する.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

Proof. $\sum b_i^2 = 0$ ならば全ての i について $b_i = 0$ であるので両辺ともに 0 となり成立する.

$\sum b_i^2 \neq 0$ とする. 任意の実数 t に対して

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i + t b_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2t\sum_{i=1}^n a_i b_i + t^2(\sum_{i=1}^n b_i^2)$$

であり, $\sum b_i^2 > 0$ であるから, 判別式を考えると

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0$$

となる. □

この距離をユークリッドの距離といい, $\mathbb{R}^n$ にこの距離を与えて得られる距離空間を n 次元ユークリッド空間 という.

$n=1$ のとき

$$d(x,y)=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|$$

$$\mathrm{U}_\varepsilon(x)=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$$

$$\mathrm{S}_\varepsilon(x)=\{x-\varepsilon,x+\varepsilon\}$$

$n=2$ のとき

$$\mathrm{U}_\varepsilon((x_0,y_0))=\left\{(x,y)\;\middle|\;(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\right\}$$

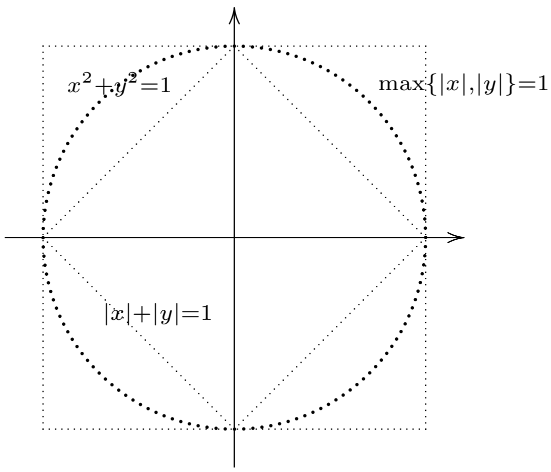


図 2.1　$\mathrm{U}_1((0,0))$, Ex 2.2.10,2.2.11 参照

exercise 65. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ からそれ自身への等長写像はどのようなものか？（まず 0, 1 の像を調べてみよ.)

Example 2.2.8. $x,y\in\mathbb{Q}$ (あるいは $\mathbb{Z}$) に対し, $d(x,y)\in\mathbb{R}$ を $d(x,y)=|x-y|$ と定めると, d は $\mathbb{Q}$ (あるいは $\mathbb{Z}$) 上の距離関数であり, この距離により $\mathbb{Q}$ (あるいは $\mathbb{Z}$) は (1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分) 距離空間である.

Example 2.2.9.

$$\mathbb{R}^\infty:=\left\{(x_1,x_2,\dots)\;\middle|\;x_i\in\mathbb{R},\ \sum_{i=1}^\infty x_i^2<\infty\right\}$$

とする. すなわち $\mathbb{R}^\infty$ の元は実数列 $\{x_i\}$ であって級数 $\sum x_i^2$ が収束するもの.

$x=(x_1,x_2,\dots),y=(y_1,y_2,\dots)\in\mathbb{R}^\infty$ に対し

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^\infty(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2}$$

で定まる関数は $\mathbb{R}^\infty$ 上の距離関数である．

($\mathbb{R}^\infty$ を l_2 と書くことも多い．また $\mathbb{R}^\infty$ という記号は別の意味で使われることもあるので注意.)

Proof. まず $d(x,y)$ が well-defined すなわち級数 $\sum(x_i-y_i)^2$ が収束することを示そう．

$s_n=\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2$ とおく．$\{s_n\}$ は単調増加である．n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の３点 $(x_1,\dots,x_n),(0,\dots,0),(y_1,\dots,y_n)$ に対する三角不等式から

$$0\le s_n=(\sqrt{s_n})^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}\right)^2\le\left(\sqrt{\sum_{i=1}^\infty x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^\infty y_i^2}\right)^2$$

であるから $\{s_n\}$ は有界である．よって収束する．

これが D1, D2 をみたすことはあきらかである．三角不等式をみたすことは上と同様に n 次元ユークリッド空間における三角不等式を考えてその極限をとることで示すことが出来る． □

exercise 66. 上の三角不等式を示せ.

Example 2.2.10. $\mathbb{R}^n$ において

$$d(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$$

を考えると $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である．(この距離はチェビシェフ距離 (Chebyshev distance) とよばれることがある.)

Proof. D1, D2 は明らか.

任意の $1\le i\le n$ について $|x_i-y_i|\le d(x,y)$ が成り立つ．よって

$$d(x,y)+d(y,z)\ge|x_i-y_i|+|y_i-z_i|\ge|x_i-z_i|.$$

したがって

$$d(x,y)+d(y,z)\ge\max_i|x_i-z_i|=d(x,z).$$

□

$n=2$ のとき $\mathrm{U}_\varepsilon((0,0))=\{(x_1,x_2)|\max|x_i|<\varepsilon\}$.

Example 2.2.11. $\mathbb{R}^n$ において

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|$$

は距離関数である．(この距離はマンハッタン距離 (Manhattan distance) とよばれることがある.)

Proof. D1, D2 は明らか.

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(y,z) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n}(|x_i-y_i|+|y_i-z_i|) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i| = d(x,z). \end{aligned}$$

□

$n=2$ のとき $\mathrm{U}_\varepsilon((0,0))=\{(x_1,x_2)||x_1|+|x_2|<\varepsilon\}$

exercise 67. $\mathbb{R}^\infty$ において 2.2.10, 2.2.11 に相当することを考察せよ.

Example 2.2.12 (離散距離空間, discrete metric space)**.** X を集合とする．関数 $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ を

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

で定めると d は X 上の距離関数になる．(問題集 81(1) 参照.)

(X,d) を離散距離空間 (discrete metric space) という．

$$\mathrm{U}_\varepsilon(x)=\begin{cases}\{x\}, & \varepsilon\leq 1\\ X, & \varepsilon>1\end{cases}$$

$$\mathrm{S}_\varepsilon(x)=\begin{cases}\emptyset, & \varepsilon\neq 1\\ X-\{x\}, & \varepsilon=1\end{cases}$$

Example 2.2.13 (p 進距離, p-adic metric)**.** p を素数とする．$l\in\mathbb{Z}$ に対し

$$v_p(l)=\begin{cases}\max\{n\in\mathbb{Z}\mid n\geq 0,\ p^n|l\}, & l\neq 0\\ \infty, & l=0\end{cases}$$

とおく．$l\neq 0$ のとき $v_p(l)$ は $p^n|l,\ p^{n+1}\not| l$ となるような $n\in\mathbb{Z}$ である．すなわち l を素因数分解したときの p の重複度.

$d_p\colon\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ を

$$d_p(l,m)=p^{-v_p(l-m)}$$

で定める．ただし $p^{-\infty}=0$ と約束する．d_p は $\mathbb{Z}$ 上の距離関数である．この距離を p 進距離という．

Proof. D1, D2 は明らか．D3 を示そう．まず

$$v_p(l+m) \geq \min\{v_p(l), v_p(m)\}$$

であることに注意する．なぜなら l が p^n で, m が p^k で割れれば $l+m$ は $p^{\min\{n,k\}}$ で割れるから．p^{-x} は x に関して単調減少であることに注意すれば

$$\begin{aligned} d_p(k,l) + d_p(l,m) &\geq \max\{d_p(k,l), d_p(l,m)\} \quad (\text{どちらも非負だから}) \\ &= \max\{p^{-v_p(k-l)}, p^{-v_p(l-m)}\} \\ &= p^{-\min\{v_p(k-l), v_p(l-m)\}} \\ &\geq p^{-v_p(k-l+l-m)} = d_p(k,m). \end{aligned}$$

□

exercise 68. 上の D1,D2 を示せ．

exercise 69. 上の例で $p=2$ の場合を考える．$n \in \mathbb{N}$ とする．

1. $l = 0, 1, 2, \ldots, 10$ に対し $d_2(l, 0)$ を求めよ．
2. $d_2(2^n, 0)$ および $d_2(2n-1, 0)$ を求めよ．
3. $\mathrm{S}_1(0)$ および $\mathrm{U}_1(0)$ を求めよ．
4. $\mathrm{S}_{1/2^n}(0)$ および $\mathrm{U}_{1/2^n}(0)$ を求めよ．

Remark ．この距離は, 三角不等式よりも強い不等式 (超距離三角不等式)

$$\max\{d(x,y), d(y,z)\} \geq d(x,z)$$

をみたしている．このような距離を非アルキメデス的距離 (non-Archimedean metric) という．

exercise 70. X を集合とする．関数 $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が非負 $(\forall x, y \in X, d(x,y) \geq 0)$ で, 超距離三角不等式をみたせば, 三角不等式をみたすことを示せ．

Remark ．この距離は $\mathbb{Q}$ に拡張できる．写像 $v_p\colon \mathbb{Q}\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$ を以下のように定義する．任意の 0 でない有理数 r は $r = p^n s/t$, $(n, s, t \in \mathbb{Z}$, s, t は p で割れない$)$ と表せ, この n は r により一意に定まる．$v_p(r) = n$ とする．また $v_p(0) = \infty$ と定める (p 進付値).

$d_p\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を

$$d_p(l,m) = p^{-v_p(l-m)}$$

で定める．ただし $p^{-\infty} = 0$ と約束する．d_p は $\mathbb{Q}$ 上の距離関数である．この距離を p 進距離という．

Proof.
$$v_p(l+m) \geq \min\{v_p(l), v_p(m)\}$$

であることを示せば, あとは $\mathbb{Z}$ のときと同様. $l = p^n s/t$, $m = p^k u/v$ で $s,t,u,v \in \mathbb{Z}$ は p で割れないとする. $n \leq k$ として一般性を失わない.

$$\begin{aligned} l+m &= p^n \frac{s}{t} + p^k \frac{u}{v} \\ &= p^n \left(\frac{s}{t} + p^{k-n}\frac{u}{v}\right) \\ &= p^n \frac{vs + p^{k-n}u}{tv} \end{aligned}$$

であるが $vs + p^{k-n}u \in \mathbb{Z}$ なので $vs + p^{k-n}u = p^e w$ と書ける, ただし $e, w \in \mathbb{Z}$, $e \geq 0$, w は p で割れない. したがって $l+m = p^{n+e}w/tv$ となり, tv は p で割れないことに注意すれば $v_p(l+m) = n+e \geq n$ であることがわかる.

□

Example 2.2.14 (ハミング距離, Hamming distance)**.** X を集合とする. $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in X^n$ に対し,

$$d(x,y) = \sharp\{i \mid x_i \neq y_i\}$$

と定めると d は X^n 上の距離関数になる. この距離をハミング距離 (Hamming distance) という.

exercise 71. これが距離関数であることを示せ.

Example 2.2.15. (X_1, d_1), (X_2, d_2) を距離空間とする. (x_1, x_2), $(x_1', x_2') \in X_1 \times X_2$ に対して

1. $\sqrt{d_1(x_1, x_1')^2 + d_2(x_2, x_2')^2}$
2. $\max\{d_1(x_1, x_1'), d_2(x_2, x_2')\}$
3. $d_1(x_1, x_1') + d_2(x_2, x_2')$

で定まる関数はいずれも $X_1 \times X_2$ 上の距離関数である.

Example 2.2.16. 上の例は有限個の距離空間の直積に拡張出来る. (X_i, d_i) $(i = 1, \ldots, n)$ を距離空間とすると $(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1', \ldots, x_n') \in X_1 \times \cdots \times X_n$ に対して

1. $\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, x_i')^2}$
2. $\max\{d_1(x_1, x_1'), \ldots, d_n(x_n, x_n')\}$
3. $\sum_{i=1}^n d_i(x_i, x_i')$

で定まる関数はいずれも $X_1 \times \cdots \times X_n$ 上の距離関数である．

exercise 72. 上の 1,2,3 が距離関数であることを示せ．

exercise 73. X を離散距離空間とする．Ex. 2.2.16.3 で与えられる X^n 上の距離関数とハミング距離 (Ex. 2.2.14) との関係を調べよ．

Definition 2.2.17. (X,d) を距離空間, $A \subset X$ をその空でない部分集合とする．このとき

$$\delta(A) := \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$$

を A の直径 (diameter) という．

(空集合については必要なら $\delta(\emptyset) = -\infty$ と考える.)

$\delta(A) < +\infty$ であるとき A は有界 (bounded) であるという．

exercise 74. $A \subset B$ ならば $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Example 2.2.18. ユークリッド空間の点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ を中心とする半径 $r(> 0)$ の開球 $\mathrm{U}_r(x)$ の直径は $2r$ である．

Proof. 任意の 2 点 $y, z \in \mathrm{U}_r(x)$ について

$$0 \leq d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < r + r = 2r.$$

したがって $0 \leq \delta(\mathrm{U}_r(x)) \leq 2r$ である．

任意の正の数 $\varepsilon \leq 2r$ に対し $\mathbb{R}^n$ の 2 点

$$x_\pm = (x_1 \pm (r - \frac{\varepsilon}{4}), x_2, \ldots, x_n)$$

を考えると $d(x_\pm, x) = r - \varepsilon/4$ だから $x_\pm \in \mathrm{U}_r(x)$. $d(x_+, x_-) = 2r - \varepsilon/2 > 2r - \varepsilon$. よって $\delta(\mathrm{U}_r(x)) = 2r$. □

Remark . 一般の距離空間において $\delta(\mathrm{U}_r(x)) \leq 2r$ であることが上の証明の前半よりわかるが, 等号は必ずしも成立するとはかぎらない．

exercise 75. 上で等号が成立しない, すなわち $\delta(\mathrm{U}_r(x)) < 2r$ となる例を挙げよ．

Lemma 2.2.19. (X,d) を距離空間, $A \subset X$ をその空でない部分集合とする．このとき A が有界 $\Leftrightarrow$ 任意の点 $x \in X$ に対し, ある $r > 0$ が存在して $A \subset \mathrm{U}_r(x)$ となる．

Proof. $\Rightarrow$) $\delta(A) = s$, $x \in X$ とする．$a \in A$ をひとつ固定する．$r = s + d(x,a) + 1$ とすると, 任意の $a' \in A$ に対し

$$d(x,a') \leq d(x,a) + d(a,a') \leq d(x,a) + s < r$$

だから $a' \in \mathrm{U}_r(x)$. よって $A \subset \mathrm{U}_r(x)$.

$\Leftarrow$) $A \subset \mathrm{U}_r(x)$ ならば $\delta(A) \leq \delta(\mathrm{U}_r(x)) \leq 2r$. $\square$

exercise 76. A が有界 $\Leftrightarrow$ ある点 $x \in X$ と, ある $r > 0$ が存在して $A \subset \mathrm{U}_r(x)$ となる.

exercise 77. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ をその空でない有限部分集合とする. このとき A は有界であることを示せ.

Definition 2.2.20. (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ をその空でない部分集合とする. このとき

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

を A と B の距離 という.

特に A が 1 点 $x \in X$ からなる集合 $A = \{x\}$ であるときは $d(\{x\}, B)$ を $d(x, B)$ と書いて, ($\{x\}$ と B の距離といわずに) x と B の距離 という.

$$d(x, B) = \inf\{d(x, b) \mid b \in B\}$$

である.

あきらかに $A \cap B \neq \emptyset$ ならば $d(A, B) = 0$ であるが, 逆は一般には正しくない.

Example 2.2.21. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A, B を次のように定義する.

$$A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \left\{\left(x, \frac{1}{x}\right) \mid x > 0\right\}$$

このとき任意の正の数 x に対し

$$d(A, B) \leq d\left((x, 0), \left(x, \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}$$

であるから $d(A, B) = 0$ であるが, $A \cap B = \emptyset$.

exercise 78.
1. $r \in \mathbb{R}$ とする. 任意の正の数 ε に対し $r \leq \varepsilon$ であれば $r \leq 0$ であることを示せ.
2. 上の最後の部分, すなわち, 任意の正の数 x に対し $d(A, B) \leq \frac{1}{x}$ となるならば, $d(A, B) = 0$ であることを示せ.

2.3 開集合, 距離の定める位相

Definition 2.3.1. (X, d) を距離空間, $O \subset X$ を部分集合とする. このとき

O が X の<u>開集合 (open set)</u> である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x \in O$ に対し, ある正の数 $\varepsilon > 0$ が存在して $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O$ となる.

Example 2.3.2. 開球 $\mathrm{U}_r(x)$ は開集合, とくに 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の開区間 (a, b) は開集合.

Proof. $y \in \mathrm{U}_r(x)$ とする. $d(x, y) < r$ であるから $\varepsilon = r - d(x, y)$ とおくと $\varepsilon > 0$ である. $\mathrm{U}_\varepsilon(y) \subset \mathrm{U}_r(x)$ を示そう.

$z \in \mathrm{U}_\varepsilon(y)$ とすると $d(y, z) < \varepsilon$ であるから

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ &< d(x, y) + \varepsilon \\ &= d(x, y) + r - d(x, y) = r \end{aligned}$$

となり $z \in \mathrm{U}_r(x)$ である. よって $\mathrm{U}_\varepsilon(y) \subset \mathrm{U}_r(x)$. したがって $\mathrm{U}_r(x)$ は開集合.

1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において開区間 (a, b) は $(a+b)/2$ を中心とする半径 $(b-a)/2$ の開球であるから開集合である. □

Definition 2.3.3. X を距離空間とする. X の開集合全体からなる $\mathcal{P}(X)$ の部分集合

$$\mathcal{O} = \{O \mid O \text{ は } X \text{ の開集合}\}$$

を考える. $\mathcal{O}$ を<u>距離dの定める位相 (topology)</u> という.

Theorem 2.3.4. (X, d) を距離空間, $\mathcal{O}$ を距離 d の定める位相とすると次が成り立つ.

O1 $X, \emptyset \in \mathcal{O}$.

O2 $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

O3 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

Proof. O1 $X \in \mathcal{O}$ はあきらか. $\emptyset$ については $x \in \emptyset$ となる点 x が存在しないので開集合である.

O2 $x \in O_1 \cap O_2$ とすると, $i = 1, 2$ について, $x \in O_i$ で, O_i は開集合だから, ある正数 ε_i が存在して $\mathrm{U}_{\varepsilon_i}(x) \subset O_i$ となる. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと, $\varepsilon > 0$ であり $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset \mathrm{U}_{\varepsilon_i}(x)$ であるから, $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O_1 \cap O_2$. よって $O_1 \cap O_2$ は開集合.

O3　$x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ とすると，ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $x \in O_{\lambda_0}$．O_{λ_0} は開集合であるから，ある正の数 ε が存在して $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O_{\lambda_0}$ となる．$O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ であるから $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ となり $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ は開集合である．

□

Remark．O2 から帰納法により，有限個の開集合の共通部分は開集合となることがわかるが，無限個では一般にはそうではない．(次の問題参照.)

問題集． 85(1)

Theorem 2.3.5. 距離空間においては，O が開集合 $\Leftrightarrow$ O は開球の和集合.

Proof. $\Leftarrow$) 上で見たように開球は開集合であるから Thm 2.3.4 O3 よりその和集合は開集合.

$\Rightarrow$) O を開集合とすると，任意の $x \in O$ についてある正数 ε_x が存在して $\mathrm{U}_{\varepsilon_x}(x) \subset O$ となる．$x \in \mathrm{U}_{\varepsilon_x}(x)$ に注意して

$$O \subset \bigcup_{x\in O} \mathrm{U}_{\varepsilon_x}(x) \subset O,$$

よって $O = \bigcup \mathrm{U}_{\varepsilon_x}(x)$. □

問題集． 81(2)

exercise 79. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \le \forall i \le n : a_i < x_i < b_i\}$$

は開集合であることを示せ．これを $\mathbb{R}^n$ の開区間という．

exercise 80. (X, d) を距離空間，$x \in X$ とする．$\mathrm{E}_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) > r\}$ は X の開集合であることを示せ．

ひとつの集合上の異なる距離関数が同じ位相を定めることもある．

Example 2.3.6. Example 2.2.6, 2.2.10, 2.2.11 で与えられた $\mathbb{R}^n$ 上の距離

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x, y) = \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

を考える. $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ をそれぞれ d, d_1, d_2 の定める位相とすると $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ である.

Proof. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ を示そう.

任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ について $d_1(x,y) \leq d(x,y) \leq \sqrt{n} d_1(x,y)$ であることに注意する. 実際任意の i について

$$|x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = d(x,y)$$

であるから $d_1(x,y) = \max |x_i - y_i| \leq d(x,y)$. また任意の i について

$$(x_i - y_i)^2 \leq (\max |x_i - y_i|)^2 = d_1(x,y)^2$$

であるから

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_1(x,y)^2} = \sqrt{n} d_1(x,y).$$

距離 d_1 に関する開球を $\mathrm{U}_\varepsilon(x)_1$ で表す.

$O \in \mathcal{O}$ とする. 任意の $x \in O$ に対しある正数 r が存在して $\mathrm{U}_r(x) \subset O$ となる. $\varepsilon = r/\sqrt{n}$ とおくと $\varepsilon > 0$. 任意の $y \in \mathrm{U}_\varepsilon(x)_1$ に対し

$$d(x,y) \leq \sqrt{n} d_1(x,y) < \sqrt{n}\varepsilon = \sqrt{n} r/\sqrt{n} = r$$

だから $y \in \mathrm{U}_r(x)$. よって $\mathrm{U}_\varepsilon(x)_1 \subset \mathrm{U}_r(x) \subset O$ であり $O \in \mathcal{O}_1$. したがって $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1$.

逆に $O \in \mathcal{O}_1$ であれば, 任意の $x \in O$ に対しある正数 ε が存在して $\mathrm{U}_\varepsilon(x)_1 \subset O$ となる. $d_1(x,y) \leq d(x,y)$ であるから $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset \mathrm{U}_\varepsilon(x)_1$ となり $O \in \mathcal{O}$ である. よって $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$. 以上から $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ が示せた.

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_2$ も $d(x,y) \leq d_2(x,y) \leq nd(x,y)$ に注意すれば同様に示せる. □

exercise 81. 上の不等式 $d(x,y) \leq d_2(x,y) \leq nd(x,y)$ を示せ.

exercise 82. 集合 X 上の 2 つの距離関数 d_1 と d_2 が条件∗「$\exists M, m > 0, \forall x, y \in X : md_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Md_1(x,y)$」をみたすとき $d_1 \sim d_2$ と書くことにする. 距離 d_i に関する開球を $\mathrm{U}_\varepsilon(x)_i$, 距離 d_i の定める位相を $\mathcal{O}_i$ と書く.

1. 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.

2. d_1 と d_2 が条件 $*$ をみたすとする．このとき任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\mathrm{U}_{m\varepsilon}(x)_2 \subset \mathrm{U}_{\varepsilon}(x)_1$$

$$\mathrm{U}_{\frac{\varepsilon}{M}}(x)_1 \subset \mathrm{U}_{\varepsilon}(x)_2$$

であることを示せ．

3. $d_1 \sim d_2$ であるときこれらの定める位相は等しい，すなわち $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ であることを示せ．

exercise 83. Example 2.2.15 における $X_1 \times X_2$ 上の 3 つの距離関数の定める位相はどれも等しいことを示せ．Example 2.2.16 についてはどうか？

exercise 84. $\mathbb{R}^n$ において，ユークリッド距離の定める位相と離散距離の定める位相は異なることを示せ．

2.4　位相空間

前節で距離の定める位相というものを導入した．その性質（Thm. 2.3.4）をもとに次の定義をあたえる．

Definition 2.4.1. X を集合とする．X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ (すなわち $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$) が次の 3 つの条件 O1, O2, O3 をみたすとき, $\mathcal{O}$ は X に位相を定めるといい, 組 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間 (topological space) という．混乱のおそれのないときは $\mathcal{O}$ を省略して, 位相空間 X と書くことが多い．また, しばしば, $\mathcal{O}$ のことを X の位相 (topology) とよぶ．

O1　$X, \emptyset \in \mathcal{O}$.

O2　$O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

O3　$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ の元を X の開集合 (open set) とよぶ．

Remark . 距離空間の場合に述べたように, O2 から帰納法により, 有限個の開集合の共通部分は開集合となることがわかるが, 無限個では一般にはそうではない．

Remark . 以下おいおい述べるかもしれないが, 集合に位相を定める方法は開集合族を定める以外にもいろいろある．そのため, X の位相を表すのに $\mathcal{O}$ とは別に記号を用意して,「$\mathcal{O}$ の定める位相 T」といった言い方をすることもある．この講義ではたいていの場合, $\mathcal{O}$ のことを位相とよぶことにする．

Example 2.4.2. Thm 2.3.4 から距離空間において「距離の定める位相」は位相であることがわかる．すなわち距離空間 X における開集合の全体は X に位相を定める．

以下, とくにことわらないかぎり距離空間 X は距離の定める位相により位相空間と考える．

Example 2.4.3. X を集合とする．冪集合 $\mathcal{P}(X)$ はあきらかに X に位相を定める．この位相を X の離散位相 (discrete topology) という．

Example 2.4.4. X を集合とする．$\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ は X に位相を定める．この位相を X の密着位相 (trivial topology, indiscrete topology) という．

Example 2.4.5. X を集合とする．

$$\mathcal{O} = \left\{ A \subset X \;\middle|\; A^c \text{ は有限集合} \right\} \cup \{\emptyset\}$$

とすると, $\mathcal{O}$ は X に位相を定める.

Proof. O1　$X^c = \emptyset$ は有限集合ゆえ $X \in \mathcal{O}$.

O2　$A_1, A_2 \in \mathcal{O}$ とする. A_1, A_2 いずれかが空集合の場合は, $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \mathcal{O}$.
どちらも空集合ではない場合, A_1^c, A_2^c どちらも有限集合. よって $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$ も有限集合. したがって $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}$.

O3　$A_\lambda \in \mathcal{O}$ とする. すべての $\lambda \in \Lambda$ に対し, $A_\lambda = \emptyset$ であれば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \emptyset \in \mathcal{O}$. ある $\lambda_0 \in \Lambda$ に対し $A_{\lambda_0} \neq \emptyset$ である場合, $A_{\lambda_0}^c$ は有限集合である.

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \subset A_{\lambda_0}^c$$

であるから, $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c$ は有限集合.

□

とくに, $X = \mathbb{R}$ の場合, この位相を $\mathbb{R}$ のザリスキー位相 (Zariski topology) という. (ザリスキー位相は通常は別の言い方で定義される. 代数幾何学の本を参照のこと.)

これらの例からもわかるように, ひとつの集合 X に入る位相はひとつだけとは限らない.

Definition 2.4.6. X を集合, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相とする. $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ であるとき, 位相 $\mathcal{O}_1$ は位相 $\mathcal{O}_2$ より弱い (weaker) または粗い (coarser) , あるいは, 位相 $\mathcal{O}_2$ は位相 $\mathcal{O}_1$ より強い (stronger) または細かい (finer) といって, $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ と書く.
つまり開集合がたくさんある方が強く細かい.

あきらかに位相の強弱は, 集合 X に入れることの出来る位相全体に順序関係を与え, 密着位相が最弱, すなわちこの順序で最小の位相であり, 離散位相が最強, すなわちこの順序で最大の位相である.

問題集 . 124, 125, 127, 130.

exercise 85. X が有限集合のとき, Ex. 2.4.5 の位相は離散位相であることを示せ. X が無限集合の場合はどうか？

2.5　閉集合

Definition 2.5.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $F \subset X$ を部分集合とする．このとき

F が X の閉集合 (closed set) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ F の補集合 F^c が X の開集合である．

Theorem 2.5.2. $\mathcal{F} = \{F \mid F$ は X の閉集合 $\}$ は次をみたす．

F1　$X, \emptyset \in \mathcal{F}$.

F2　$F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

F3　$\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

Proof. O1, O2, O3 より

F1) $X^c = \emptyset \in \mathcal{O}$, $\emptyset^c = X \in \mathcal{O}$.

F2) $(F_1 \cup F_2)^c = F_1^c \cap F_2^c \in \mathcal{O}$.

F3) $(\cap F_\lambda)^c = \cup(F_\lambda^c) \in \mathcal{O}$.

□

Remark . F2 により有限個の閉集合の和集合は閉集合であることがわかるが, 無限個の場合は一般にはそうではない．(開集合のときを参照.)

閉集合族を指定することで位相を定めることができる．

Theorem 2.5.3. X を集合とする．X の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が定理 2.5.2 の 3 つの条件 F1, F2, F3 をみたすとする．このとき, X の部分集合の族

$$\{O \subset X \mid O^c \in \mathcal{F}\}$$

は X に位相を定め, $\mathcal{F}$ はこの位相に関する閉集合全体である．

また, 位相空間の閉集合全体からこのようにして定めた位相はもとの位相と一致する．

Proof. あきらか． □

Example 2.5.4. 距離空間において 1 点のみからなる集合 $\{x\}$ は閉集合である．したがって F2 により有限部分集合も閉集合である．

Proof. $\{x\}^c = X - \{x\}$ が開集合であることをいえばよい．

$y \in X - \{x\}$ とすると $x \neq y$. よって $\varepsilon = d(x, y)$ とおくと $\varepsilon > 0$ であり, あきらかに $x \notin \mathrm{U}_\varepsilon(y)$. よって $\mathrm{U}_\varepsilon(y) \subset X - \{x\}$. □

Example 2.5.5. X を距離空間とする．$\mathrm{B}_r(x)^c = \mathrm{E}_r(x)$ であるから exercise 80 より，閉球は閉集合である．とくに 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において閉区間は閉集合である．

exercise 86. 距離空間において球面 $\mathrm{S}_r(x)$ は閉集合であることを示せ．

exercise 87. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq \forall i \leq n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

は閉集合であることを示せ．これを $\mathbb{R}^n$ の閉区間という．

Remark . $X, \emptyset$ は開かつ閉集合である．また開集合でも閉集合でもない部分集合もある．

exercise 88. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の半開区間 $(a, b]$ は $a < b$ ならば開集合でも閉集合でもない．

問題集 . 83(1)(2) 84(1)(2), 132, 133, 134, 135

2.6　近傍

Definition 2.6.1. X を位相空間とする．

1. $U \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とする．このとき
   U が x の近傍 (neighbourhood) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x \in O \subset U$ となるような (X の) 開集合 O が存在する．
   特に, 点 x を含む開集合は x の近傍である．x を含む開集合を x の開近傍 (open neighbourhood) という．
   x の近傍でかつ閉集合であるものを x の閉近傍 (closed neighbourhood) という．
2. 集合
   $$\mathcal{U}(x) = \{U \subset X \mid U \text{ は } x \text{ の近傍}\}$$
   を x の近傍系 (system of neighbourhoods) という．
3. $A, U \subset X$ を部分集合とする．このとき
   U が A の近傍 (neighbourhood) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $A \subset O \subset U$ となるような (X の) 開集合 O が存在する．

Remark . 近傍の定義は位相にもとづいている．距離の定める位相を考えるとき, 距離関数は異なっていても位相が一致すれば $\mathcal{U}(x)$ は一致する．

Example 2.6.2. 距離空間において, ε 近傍 $\mathrm{U}_\varepsilon(x)$ (ただし $\varepsilon > 0$) は x を含む開集合なので, x の近傍である．

開集合は近傍を用いて特徴づけられる．

Theorem 2.6.3. $O \subset X$ を部分集合とする．このとき次は同値である．

1. O は開集合である．
2. 任意の $x \in O$ に対し $O \in \mathcal{U}(x)$.
3. 任意の $x \in O$ に対し, ある $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在し, $U \subset O$ となる．

Proof. 1⇒2 ⇒3 はあきらか．

3⇒1 を示す．$x \in O$ とすると, 仮定より $U_x \subset O$ となる x の近傍 U_x が存在する．近傍の定義から $x \in O_x \subset U_x$ となる開集合 O_x が存在する．あきらかに $O_x \subset O$ である．各 $x \in O$ に対しこのような開集合 O_x をとると,

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} O_x \subset O$$

であるから, $O = \cup O_x$ となり, 開集合の和集合なので, O は開集合. □

exercise 89. 距離空間においては, $U \in \mathcal{U}(x) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ s.t. \ \mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset U$.

Definition 2.6.4. X を位相空間, $x \in X$ とし, $\mathcal{U}(x)$ を x の近傍系とする. このとき $\mathcal{U}^*(x)$ が x の基本近傍系 (fundamental system of neighbourhood) である

$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & \mathcal{U}^*(x) \subset \mathcal{U}(x) \\ \text{(ii)} & \text{任意の } U \in \mathcal{U}(x) \text{ に対し, ある } V \in \mathcal{U}^*(x) \text{ が存在して}, V \subset U \text{ となる.} \end{cases}$$

Remark . 基本近傍系は x に対し一意的に定まるわけではない.

Example 2.6.5. X を距離空間, $x \in X$ とする.

$$\mathcal{U}^*(x) = \{\mathrm{U}_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\}$$

は基本近傍系である (exercise 89 参照).

$$\mathcal{U}^{**}(x) = \left\{ \mathrm{U}_{\frac{1}{n}}(x) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

は可算基本近傍系である.

Proof. $\mathcal{U}^{**}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ はあきらか.

任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対し, exercise 89 からある $\varepsilon > 0$ が存在して $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset U$ となる. $1/n < \varepsilon$ となる $n \in \mathbb{N}$ をとれば $\mathrm{U}_{\frac{1}{n}}(x) \subset \mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset U$. □

$$\mathcal{U}^{***}(x) = \left\{ \mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x) \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

は可算基本閉近傍系である.

exercise 90. 上の $\mathcal{U}^{***}(x)$ が基本近傍系であることを示せ.

exercise 91. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系, $\mathcal{U}^{**}(x)$ を $\mathcal{U}^*(x)$ の部分集合とする. 任意の $U \in \mathcal{U}^*(x)$ に対し, ある $V \in \mathcal{U}^{**}(x)$ が存在して $V \subset U$ となるとする. このとき, $\mathcal{U}^{**}(x)$ は x の基本近傍系である.

Definition 2.6.6. 位相空間 X が第一可算公理 (first axiom of countability) をみたす $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x \in X$ が高々可算個の近傍からなる基本近傍系をもつ.

Proposition 2.6.7. 距離空間は第一可算公理をみたす. □

Example 2.6.8. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において,

$$\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

は点 (x, y) の基本近傍系である．実際, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \times (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ は Example 2.2.10 で与えた距離に関する点 (x, y) の ε 近傍であり, この距離の定める位相とユークリッド距離の定める位相は一致する (Example 2.3.6).

同様に n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において

$$\left\{ \prod_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \;\middle|\; \varepsilon > 0 \right\}$$

は点 $(x_1, \dots, x_n)$ の基本近傍系である．

Thm. 2.6.3 でみたように開集合は近傍を用いて特徴づけられるが, 基本近傍系を用いて特徴付けることもできる．

Proposition 2.6.9. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とする．

O が開集合である $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in O$ に対し, ある $V \in \mathcal{U}^*(x)$ が存在して, $V \subset O$ となる．

Proof. $\Rightarrow$) $x \in O$ とすると, 定理 2.6.3 より, $U \subset O$ となる $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在する．基本近傍系の定義より $V \subset U$ となる $V \in \mathcal{U}^*(x)$ が存在する．あきらかに $V \subset O$.

$\Leftarrow$) $x \in O$ とすると, 仮定より $V \subset O$ となる $V \in \mathcal{U}^*(x)$ が存在する．基本近傍系の定義より V は x の近傍なので, 定理 2.6.3 より, O は開集合. □

Remark . この証明では,

1. 任意の $x \in O$ に対し, ある $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して, $U \subset O$ となる．
2. 任意の $x \in O$ に対し, ある $V \in \mathcal{U}^*(x)$ が存在して, $V \subset O$ となる．

が同値であるということを示している．このように, x の近傍系に関する条件を基本近傍系に関する条件におきかえることが出来る場合がしばしばある．（基本近傍系とはそのように定義されている.）上の議論はそのような場合の証明の典型である．

近傍系を指定することで位相を定めることができる．

Theorem 2.6.10. X を位相空間, $\mathcal{U}(x)$ を $x \in X$ の近傍系とする．次が成り立つ．

U1　$U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$.

U2　$U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.

U3　$U_1 \in \mathcal{U}(x),\ U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2 \in \mathcal{U}(x)$.

U4　任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対し, ある $V \in \mathcal{U}(x)$ が存在して, $V \subset U$ かつ, 任意の $y \in V$ について $U \in \mathcal{U}(y)$ となる.

Remark . U4 は気分としては, 近所は, 近所の近所.

Proof. U1　あきらか.

U2　$U_i \in \mathcal{U}(x)$ とすると, 定義より $x \in O_i \subset U_i$ となる開集合 O_i が存在する．このとき $x \in O_1 \cap O_2 \subset U_1 \cap U_2$ であり, $O_1 \cap O_2$ は開集合であるから $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.

U3　$U_1 \in \mathcal{U}(x)$ とすると, ある開集合 O が存在して $x \in O \subset U_1$ となる．$U_1 \subset U_2$ であれば, $x \in O \subset U_2$ であるから $U_2 \in \mathcal{U}(x)$.

U4　$U \in \mathcal{U}(x)$ とすると, $x \in O \subset U$ となる開集合 O がある．$V := O$ とすれば, V は x を含む開集合なので $V \in \mathcal{U}(x)$ であり, $V \subset U$．また任意の $y \in V$ について, $y \in V \subset U$ かつ, V は開集合ゆえ, $U \in \mathcal{U}(y)$.

□

Theorem 2.6.11. X を集合とする．各点 $x \in X$ に対し, $\emptyset \neq \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ が与えられ, 定理 2.6.10 の U1〜U4 が成り立つとする．このとき, 部分集合 $O \subset X$ に対し,

$$O \text{ が開集合である} \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{任意の } x \in O \text{ に対し } O \in \mathcal{U}(x)$$

と定めると, 開集合全体は X に位相を定め, $\mathcal{U}(x)$ はこの位相に関する $x \in X$ の近傍系である.

また, 位相空間の近傍系からこのようにして定めた位相はもとの位相と一致する．□

問題集 . 147

2.7　内点, 内部, 外部, 境界

Definition 2.7.1. X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A に含まれる X の開集合すべての和集合を A の内部 (interior) といい, A° で表す.

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{O \subset A \\ O:\text{open}}} O$$

($\emptyset$ は A に含まれる開集合であるから, A に含まれる開集合は少なくともひとつは存在することに注意.) Thm. 2.3.4 O3 により, A° は開集合である. また A に含まれる (包含関係に関して) 最大の開集合である. (あきらかに $A^\circ \subset A$ であり, $O \subset A$ が開集合であれば $O \subset A^\circ$ である.)

exercise 92. $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$.

exercise 93. A: open $\Leftrightarrow A = A^\circ$.

Definition 2.7.2. $A \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とする.

x が A の内点 (inner point, interior point) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x のある近傍 U が存在して, $U \subset A$ (すなわち, $U \cap A^c = \emptyset$) .

あきらかに x が A の内点であることと, A が x の近傍であることは同値である.

exercise 94. x が A の内点 $\Leftrightarrow$ A が x の近傍である, すなわち, ある開集合 O が存在して, $x \in O \subset A$.

Theorem 2.7.3. A の内部 A° は A の内点全体のなす集合である.

$$A^\circ = \left\{ x \in X \;\middle|\; x \text{ は } A \text{ の内点} \right\}.$$

すなわち, $x \in A^\circ \Leftrightarrow x$ のある近傍 U が存在して, $U \cap A^c = \emptyset$.

Proof. x が A の内点ならば, $x \in O \subset A$ となる開集合 O が存在する. O は A に含まれる開集合だから $O \subset A^\circ$. よって $x \in A^\circ$.

一方 $x \in A^\circ$ とすると, $x \in A^\circ \subset A$ であり, A° は開集合なので A は x の近傍, すなわち, x は A の内点. □

Example 2.7.4. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ では閉球の内部は開球, すなわち $\mathrm{B}_r(x)^\circ = \mathrm{U}_r(x)$ である.

Proof. $\mathrm{U}_r(x)$ は開集合であり, あきらかに $\mathrm{U}_r(x) \subset \mathrm{B}_r(x)$ であるから, $\mathrm{U}_r(x) \subset \mathrm{B}_r(x)^\circ$.

$\mathrm{B}_r(x)^\circ \subset \mathrm{U}_r(x)$ を示そう．$y \in \mathrm{B}_r(x)^\circ$ とする．$y = x$ ならばあきらかに $y \in \mathrm{U}_r(x)$. $y \neq x$ とする．このとき $d(x, y) \neq 0$. $\mathrm{B}_r(x)^\circ$ は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $\mathrm{U}_\varepsilon(y) \subset \mathrm{B}_r(x)^\circ$ となる．$z = y + \dfrac{\varepsilon}{2d(x,y)}(y - x) \in \mathbb{R}^n$ とおくと,

$$d(y, z) = \|z - y\| = \left\| \frac{\varepsilon}{2d(x,y)}(y - x) \right\| = \frac{\varepsilon}{2d(x,y)} \|y - x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

だから, $z \in \mathrm{U}_\varepsilon(y) \subset \mathrm{B}_r(x)$ となり, $d(x, z) \leq r$. 作り方から $d(x, z) = d(x, y) + \dfrac{\varepsilon}{2}$ なので,

$$d(x, y) = d(x, z) - \frac{\varepsilon}{2} \leq r - \frac{\varepsilon}{2} < r$$

ゆえ $y \in \mathrm{U}_r(x)$. □

上の証明からわかるように, 一般に距離空間において $\mathrm{U}_r(x) \subset \mathrm{B}_r(x)^\circ$ が成り立つ．しかし等号は必ずしも成り立たない.

Example 2.7.5. X を 2 つ以上元を含む離散距離空間とする．$\mathrm{B}_1(x) = X$ なので, $\mathrm{B}_1(x)^\circ = X$. 一方 $\mathrm{U}_1(x) = \{x\}$ だから, $\mathrm{U}_1(x) \subsetneq \mathrm{B}_1(x)^\circ$

Example 2.7.6. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Q}$ の内部は空集合, すなわち $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ である.

Proof. 以降何度か使うので次の事実を証明しておく.

Lemma 2.7.7.
1. 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ と任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, $x < r < x + \varepsilon$ をみたす有理数 $r \in \mathbb{Q}$ が存在する．すなわち $(x, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.
2. 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ と任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, $x < y < x + \varepsilon$ をみたす無理数 $y \in \mathbb{Q}^c$ が存在する．すなわち $(x, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c \neq \emptyset$.

Proof of Lemma.
1. $\dfrac{1}{N} < \varepsilon$ となる自然数 $N \in \mathbb{N}$ をひとつとる.

$$n := \max\left\{ l \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{l}{N} \leq x \right\}$$

とおく．このとき定め方から $\frac{n}{N} \leq x < \frac{n+1}{N}$ である.

$$x + \varepsilon - \frac{n+1}{N} = x - \frac{n}{N} + \varepsilon - \frac{1}{N} > 0.$$

よって $\frac{n+1}{N} < x + \varepsilon$. あきらかに $\frac{n+1}{N} \in \mathbb{Q}$.

2. 同様にして

$$m := \left\{ l \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{\sqrt{2}l}{2N} \leq x \right\}$$

とおけば, $\frac{\sqrt{2}(m+1)}{2N} \in (x, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c$.

□

$\mathbb{Q}^\circ \neq \emptyset$ と仮定する. $x \in \mathbb{Q}^\circ$ とする. $\mathbb{Q}^\circ$ は開集合であるから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset \mathbb{Q}$, とくに $(x, x+\varepsilon) \subset \mathbb{Q}$, すなわち $(x, x+\varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c = \emptyset$ となるが, これは上の事実に反する. したがって $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. □

Theorem 2.7.8. $A, B \subset X$ を部分集合とするとき次が成り立つ.

I1　$A^\circ \subset A$.

I2　$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

I3　$(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

I4　$X^\circ = X$, $\emptyset^\circ = \emptyset$.

Proof. I1,I4 はあきらか.

I2. $(A \cap B)^\circ \subset A \cap B \subset A$ であり, $(A \cap B)^\circ$ は開集合ゆえ $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$. 同様に $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$. よって $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$. 一方 $A^\circ \subset A$ かつ $B^\circ \subset B$ ゆえ $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. $A^\circ \cap B^\circ$ は開集合なので $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

I3. A° は A° に含まれる開集合であるから $A^\circ \subset (A^\circ)^\circ$. また I1 より $(A^\circ)^\circ \subset A^\circ$. □

exercise 95. 上の I1,I4 を示せ.

和集合の内部については次がいえる.

exercise 96. $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$ が成り立つ. しかし $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ は一般には成立しない.

無限個の共通部分の内部については次の包含関係が成り立つ. しかし等号は一般には成立しない.

exercise 97. $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^\circ \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ$ を示せ.

Example 2.7.9. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間, $x \in \mathbb{R}$ とする. $n \in \mathbb{N}$ に対し $A_n = \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \subset \mathbb{R}$ とおく. $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \{x\}$ であるから, $\left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right)^\circ = \{x\}^\circ = \emptyset$. 一方 A_n は開集合なので $A_n^\circ = A_n$. よって $\bigcap_{n=1}^\infty A_n^\circ = \{x\}$.

exercise 98. 上の例の等式 $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \{x\}$ および $\{x\}^\circ = \emptyset$ を示せ.

Definition 2.7.10. $A \subset X$ を部分集合とする. A の補集合の内部を A の外部 (exterior)

といい, A^e で表す.

$$A^e = (A^c)^\circ.$$

A^e の点を A の外点という.

A の外部は, A と交わらない最大の開集合である. 実際 A^e は A^c の内部だから開集合であり, $A^e \subset A^c$ だから $A^e \cap A = \emptyset$ である. O を $O \cap A = \emptyset$ である開集合とすると, $O \subset A^c$ だから $O \subset (A^c)^\circ = A^e$.

Definition 2.7.11. $A^f := (A^\circ \cup A^e)^c$ を A の境界 (frontier) という.

A°, A^e はともに開集合であるから, その補集合である A^f は閉集合である. また $A^\circ \cap A^e = \emptyset$ であることに注意すると, X は A°, A^f, A^e の disjoint union になっている.

$$X = A^\circ \sqcup A^f \sqcup A^e.$$

Theorem 2.7.12. $\mathcal{U}^*(x)$ を $x \in X$ の基本近傍系とする. 次は同値である.

1. $x \in A^f$.
2. x の任意の近傍 U について, $U \cap A \neq \emptyset$ かつ $U \cap A^c \neq \emptyset$.
3. 任意の $U \in \mathcal{U}^*(x)$ について, $U \cap A \neq \emptyset$ かつ $U \cap A^c \neq \emptyset$.

Proof. $1 \Leftrightarrow 2$. Thm 2.7.3 より,

$$x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A^c = \emptyset.$$

同じ議論を A^c に使って

$$x \in A^e = (A^c)^\circ \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A = \emptyset.$$

したがって

$$\begin{aligned} x \in A^f &\Leftrightarrow x \notin A^\circ \text{ かつ } x \notin A^e \\ &\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } U \cap A^c \neq \emptyset. \end{aligned}$$

$2 \Leftrightarrow 3$ はやさしい. □

exercise 99. $2 \Leftrightarrow 3$ を示せ.

Corollary 2.7.13. $A^f = (A^c)^f$.

Proof.

$$x \in A^f \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } U \cap A^c \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap (A^c)^c \neq \emptyset \text{ かつ } U \cap A^c \neq \emptyset$$
$$\Leftrightarrow x \in (A^c)^f .$$

あるいは $(A^c)^e = ((A^c)^c)^\circ = A^\circ$ に注意して,

$$(A^c)^f = \big((A^c)^\circ \cup (A^c)^e\big)^c = (A^e \cup A^\circ)^c = A^f.$$

□

Theorem 2.7.14. X を集合とする. 写像 $(-)^\circ : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ が Thm. 2.7.8 の I1〜I4 をみたすとする. このとき, 部分集合 $A \subset X$ に対し,

$$A \text{ が開集合である} \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A = A^\circ$$

と定めると, 開集合全体は X に位相を定め, A° はこの位相に関する A の内部である.
　また, 位相空間の内部からこのようにして定めた位相はもとの位相と一致する.

□

問題集 **.** 80(1)-(5)（内部, 外部, 境界を求めよ.）, 157（内部を求めよ.）

2.8　閉包, 触点

Definition 2.8.1. X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A を含む X の閉集合すべての共通部分を A の閉包 (closure) といい, A^a または $\overline{A}$ で表す.

$$A^a = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F:\text{closed}}} F$$

(X は閉集合なので, A を含む閉集合は少なくともひとつは存在することに注意.) Thm. 2.5.2 F3 により, A^a は閉集合である. また A を含む (包含関係に関して) 最小の閉集合である. (あきらかに $A^a \supset A$ であり, $F \supset A$ が閉集合であれば $F \supset A^a$ である.)

exercise 100. $A \subset B \Rightarrow A^a \subset B^a$.

exercise 101. A: closed $\Leftrightarrow A = A^a$.

定義を見るとわかるように内部と閉包には関係がある.

Theorem 2.8.2. $A^{ac} = A^{c\circ}$.

Proof. $A^a \supset A$ ゆえ $A^{ac} \subset A^c$. A^{ac} は開集合で A^c に含まれるので $A^{ac} \subset A^{c\circ}$.

一方, $A^c \supset A^{c\circ}$ ゆえ $A \subset A^{c\circ c}$. $A^{c\circ c}$ は閉集合で A を含んでいるので $A^a \subset A^{c\circ c}$. よって $A^{ac} \supset A^{c\circ}$.

なお, 定義の式を直接変形してもわかる. □

Corollary 2.8.3. $A^{\circ c} = A^{ca}$.

Proof. 上の定理を A^c に適用すればよい. □

Corollary 2.8.4. $A^a = A^{ec} = A^\circ \sqcup A^f$.

Proof. $A^{ac} = A^{c\circ} = A^e$ で, $X = A^\circ \sqcup A^f \sqcup A^e$ であったから, $A^a = A^{ec} = A^\circ \sqcup A^f$. □

Definition 2.8.5. $A \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とする.

x が A の触点 (adherent point) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x の任意の近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$.

定義よりあきらかに, x が A の触点であることと, x が A^c の内点ではないことは同値である.

気分としては (距離空間の場合は次の練習問題から分かるように実際にそうであるが) , x が A の触点であるというのは, x のいくらでも近くに A の点があるということ.

exercise 102. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とする．このとき
x が A の触点 $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}^*(x) : U \cap A \neq \emptyset$.

Theorem 2.8.6. *A の閉包 A^a は A の触点全体のなす集合である．*

$$A^a = \left\{ x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の触点} \right\}.$$

すなわち, $x \in A^a \Leftrightarrow x$ の任意の近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$.

Proof.

$$\begin{aligned} x \in A^a &\Leftrightarrow x \in A^{coc} \\ &\Leftrightarrow x \notin A^{co} \\ &\Leftrightarrow x \text{ は } A^c \text{ の内点ではない} \\ &\Leftrightarrow x \text{ は } A \text{ の触点}. \end{aligned}$$

□

Corollary 2.8.7. *1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の空でない有界閉集合は最大元, 最小元をもつ．*

Proof. $A \subset \mathbb{R}$ を空でない有界閉集合とする．A は空でない有界集合だから上限が存在する．$s = \sup A$ とおく．Prop. 1.7.32 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $(s - \varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$ であるから s は A の触点ゆえ $s \in A^a$．A は閉集合だから $A^a = A$ である．よって $s \in A$ となり, $s = \max A$. 最小元についても同様. □

Corollary（講義後変更）. *X が距離空間のとき, $x \in A^a \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.*

Proof. X を距離空間とする．$\{\mathrm{U}_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon > 0}$ が x の基本近傍系であることに注意すれば, Thm. 2.8.6, exe 102 より,

$$\begin{aligned} x \in A^a &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : d(x, a) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \inf_{a \in A} d(x, a) = 0. \end{aligned}$$

□

Example 2.8.8. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ では開球の閉包は閉球であり, 境界は球面である, すなわち $\mathrm{U}_r(x)^a = \mathrm{B}_r(x)$, $\mathrm{U}_r(x)^f = \mathrm{S}_r(x)$. (ただし $r > 0$.)

Proof. 例えば上の Thm. 2.8.6 を使えば, Ex. 2.7.4 と同様にして $\mathrm{U}_r(x)^a = \mathrm{B}_r(x)$ がわ

かる．詳細は練習問題．$\mathrm{U}_r(x)^f = \mathrm{U}_r(x)^a \setminus \mathrm{U}_r(x)^\circ = \mathrm{B}_r(x) \setminus \mathrm{U}_r(x)$ より $\mathrm{U}_r(x)^f = \mathrm{S}_r(x)$. □

exercise 103. $n = 2$ のとき, 上の等式 $\mathrm{U}_r(x)^a = \mathrm{B}_r(x)$ を示せ．また, 距離空間において一般に $\mathrm{U}_r(x)^a = \mathrm{B}_r(x)$ は成り立つか?

Example 2.8.9. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Q}$ について, $\mathbb{Q}^f = \mathbb{Q}^a = \mathbb{R}$ である．実際, Lem. 2.7.7 および Thm. 2.7.12 から $\mathbb{Q}^f = \mathbb{R}$ がわかる．詳細は練習問題.

exercise 104. 上の等式 $\mathbb{Q}^f = \mathbb{Q}^a = \mathbb{R}$ を示せ.

Theorem 2.8.10. $A, B \subset X$ を部分集合とするとき次が成り立つ.

A1) $A^a \supset A$.
A2) $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$.
A3) $(A^a)^a = A^a$.
A4) $X^a = X$, $\emptyset^a = \emptyset$.

Proof. Thms. 2.7.8, 2.8.2 を使えば

$$(A \cup B)^a = (A \cup B)^{coc} = (A^c \cap B^c)^{oc} = (A^{co} \cap B^{co})^c = A^{coc} \cup B^{coc} = A^a \cup B^a$$

等として示せる．もちろん別の方法もある． □

Remark . 共通部分については, $(A \cap B)^a \subset A^a \cap B^a$ が成り立つが等号は一般には成立しない.

1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = [-1, 0)$, $B = (0, 1]$ を考えると, $A^a = [-1, 0]$, $B^a = [0, 1]$ であるから, $A^a \cap B^a = \{0\}$ だが $(A \cap B)^a = \emptyset^a = \emptyset$.

もっと極端な例としては, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ を考えると, 先にみたように $\mathbb{Q}^f = \mathbb{Q}^a = \mathbb{R}$. よって $\mathbb{Q}^{cf} = \mathbb{Q}^f = \mathbb{R}$ だから $\mathbb{Q}^{ca} = \mathbb{R}$. したがって $\mathbb{Q}^a \cap \mathbb{Q}^{ca} = \mathbb{R}$. 一方 $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c)^a = \emptyset$.

exercise 105. 上の例の $(0, 1]^a = [0, 1]$ を示せ.

exercise 106. $(A \cap B)^a \subset A^a \cap B^a$ を示せ.

Theorem 2.8.11. X を集合とする.

写像 $(-)^a \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ が Thm. 2.8.10 の A1〜A4 をみたすとする．このとき, 部分集合 $A \subset X$ に対し,

$$A \text{ が閉集合である} \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A = A^a$$

と定めることにより X に位相が入り, A^a はこの位相に関する A の閉包である.

また, 位相空間の閉包からこのようにして定めた位相はもとの位相と一致する. □

問題集． 80(1)-(5)（閉包を求めよ.）, 157（閉包を求めよ.）なお, 問題集では A の閉包を $\overline{A}$ と書いている.

2.9 集積点, 孤立点, 導集合

Definition 2.9.1. X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

$x \in X$ が A の集積点 (accumulation point) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x の任意の近傍 U に対し $(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset$.

A の集積点の全体を A の導集合 (derived set) といい, A' であらわす.

A の点 $a \in A$ が A の集積点でないとき, すなわち $a \in A \cap (A')^c$ であるとき, a を A の孤立点 (isolated point) という.

触点の定義（Def. 2.8.5）と比較するとわかるように, x が A の集積点であるということは, x が $A - \{x\}$ の触点であるということに他ならない. (Prop. 2.9.4 参照)

X が距離空間の場合, x が A の集積点であるというのは, x のいくらでも近くに x ではない A の点があるということ. （Prop. 2.9.6 参照）

Remark . $A - \{x\} = A \cap \{x\}^c$ だから, $(A - \{x\}) \cap U = (A \cap \{x\}^c) \cap U = A \cap (\{x\}^c \cap U) = A \cap U \cap \{x\}^c$ なので,

$$(A - \{x\}) \cap U = A \cap (U - \{x\}) = A \cap U - \{x\}.$$

exercise 107. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とする. このとき

x が A の集積点 $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}^*(x) : A \cap U - \{x\} \neq \emptyset$.

Remark . 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において, 数列 $\{a_n\}$ の集積値（すなわち部分列の極限値）と, $\{a_n\}$ を集合とみたときの集積点とは別の概念である.

exercise 108. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において, $a_n = 1$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の集積値と集積点を求めよ.

Example 2.9.2. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ について, $A' = \{0\}$ である. とくに A の点は全て孤立点.

Proof.

1. $0 \in A'$ であること. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ となる. よって $\frac{1}{n} \in A \cap \mathrm{U}_\varepsilon(0) - \{0\} \neq \emptyset$ ゆえ $0 \in A'$.
2. 任意の $x \neq 0$ に対し, $x \notin A'$ であること.
   (i) $x < 0$ のとき. $\varepsilon = -x$ とおけば, $\varepsilon > 0$ で, $A \cap \mathrm{U}_\varepsilon(x) = \emptyset$ ゆえ $x \notin A'$.
   (ii) $0 < x \leq 1$ のとき.
      i. $x = \frac{1}{n} \in A$ のとき. $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ とおけば, $\varepsilon > 0$ で, $A \cap \mathrm{U}_\varepsilon(x) = x$. よって $A \cap \mathrm{U}_\varepsilon(x) - \{x\} = \emptyset$ ゆえ $x \notin A'$.

ii. $x \notin A$ のとき．$N = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < x\right\}$ とおけば, $N \geq 2$ で, $\frac{1}{N} < x < \frac{1}{N-1}$ である．$\varepsilon = \min\left\{x - \frac{1}{N}, \frac{1}{N-1} - x\right\}$ とおけば, $\varepsilon > 0$ で, $A \cap \mathrm{U}_\varepsilon(x) = \emptyset$ ゆえ $x \notin A'$.

(iii) $x > 1$ のとき．$\varepsilon = x - 1$ とおけば, $\varepsilon > 0$ で, $A \cap \mathrm{U}_\varepsilon(x) = \emptyset$ ゆえ $x \notin A'$.

□

Example 2.9.3. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Q}$ について, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ である．

Proof. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ に対し, Lem. 2.7.7 より, $\mathbb{Q} \cap (\mathrm{U}_\varepsilon(x) - \{x\}) \supset \mathbb{Q} \cap (x, x+\varepsilon) \neq \emptyset$. □

exercise 109. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Z}$ について, $\mathbb{Z}' = \emptyset$ である．

Proposition 2.9.4. $x \in A' \Leftrightarrow x \in (A - \{x\})^a$.

Proof. Thm. 2.8.6 と集積点の定義から $x \in (A - \{x\})^a \Leftrightarrow x$ の任意の近傍 U について $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in A'$. □

A の閉包は, A に A の集積点を全て付け加えたものである．

Proposition 2.9.5. $A^a = A \cup A'$.

Proof. $A \subset A^a$ である．また上の Prop. 2.9.4 より $x \in A' \Rightarrow x \in (A - \{x\})^a \subset A^a$. よって $A' \subset A^a$, したがって $A \cup A' \subset A^a$.

一方 $x \in A^a$ かつ $x \notin A$ とすると, $A - \{x\} = A$ であるから, $x \in A^a = (A - \{x\})^a$ ゆえ $x \in A'$. したがって $A^a \subset A \cup A'$.

(cf. $A^a = A^a \cap (A \cup A^c) = (A^a \cap A) \cup (A^a \cap A^c) = A \cup (A^a \cap A^c)$) □

Proposition 2.9.6. X を距離空間とする．このとき, $x \in A' \Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A$ が無限集合.

Proof. $\Leftarrow$ はあきらか.

$\Rightarrow$. 対偶を示す．ある正の数 ε が存在して, $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A$ が有限集合だとする．このとき $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A - \{x\}$ も有限集合である．$\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} = \emptyset$ のときは定義より $x \notin A'$. $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ のとき, $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ とする．$\varepsilon' = \min_{1 \leq i \leq n} d(x, a_i)$ とおくと, $\varepsilon' > 0$ であり, $\mathrm{U}_{\varepsilon'}(x) \cap A - \{x\} = \emptyset$. よって $x \notin A'$. □

exercise 110.

1. 上の $\Leftarrow$ を示せ．
2. 上で $\mathrm{U}_{\varepsilon'}(x) \cap A - \{x\} = \emptyset$ であるのはなぜか説明せよ．

exercise 111. $x \in X$ が X の孤立点 $\Leftrightarrow \{x\}$ が X の開集合.

exercise 112. A:closed $\Leftrightarrow A' \subset A$.

exercise 113. $x \in A' \Rightarrow (A - \{x\})^a = A^a$. (逆はもちろん正しくない.)

問題集． 80(1)-(5)（導集合を求めよ.）

2.10　稠密, 全疎

Definition 2.10.1. X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする.
A が X で稠密 (dense) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A^a = X$.

Definition 2.10.2. ある可算部分集合が存在して, それが X で稠密であるとき, X は可分 (separable) であるという.

Proposition 2.10.3. A が X で稠密
$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ と, x の任意の近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$
$\Leftrightarrow$ 空でない任意の開集合 O に対し, $O \cap A \neq \emptyset$.

Proof. 最初の同値は Thm. 2.8.6 よりあきらか. 2 つ目の同値は,
$\Rightarrow$) O を空でない開集合とする. $x \in O$ をひとつとる. O は x を含む開集合だから x の近傍. よって仮定から $O \cap A \neq \emptyset$.
$\Leftarrow$) $x \in X$ とする. U を x の近傍とすると, $x \in O \subset U$ となる開集合 O が存在する. $x \in O$ だから $O \neq \emptyset$. よって仮定より $O \cap A \neq \emptyset$. したがって $U \cap A \neq \emptyset$. □

exercise 114.
1. 上の最初の同値を説明せよ.
2. A が X で稠密 $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ と, 任意の $U \in \mathcal{U}^*(x)$ に対し, $U \cap A \neq \emptyset$. ただし $\mathcal{U}^*(x)$ は x の基本近傍系.

exercise 115. $x \in X$ が X の集積点 $\Leftrightarrow X \setminus \{x\}$ が X で稠密. (cf. Prop. 2.9.4, exe. 111)

Corollary 2.10.4. $A, B \subset X$ を X で稠密な部分集合で, B は開集合だとする. このとき $A \cap B$ も X で稠密である.

Proof. O を空でない開集合としたとき, $O \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ であることを示せばよい. 仮定から B は稠密なので, $O \cap B \neq \emptyset$. O, B は開集合だから $O \cap B$ は空でない開集合である. A は稠密だから $(O \cap B) \cap A \neq \emptyset$. □

帰納法で容易に次がわかる.

Corollary 2.10.5. $A \subset X$ を X で稠密な部分集合, $O_1, \ldots, O_n \subset X$ を X で稠密な開集合とする. このとき $A \cap (\bigcap_{i=1}^n O_i)$ も X で稠密である. とくに $\bigcap_{i=1}^n O_i$ も X で稠密である.

Example 2.10.6. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において $\mathbb{Q}$ は稠密ゆえ, $\mathbb{R}$ は可分.
$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c$ は $\mathbb{R}$ で稠密であるが $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \emptyset$ は稠密ではない.

Example 2.10.7. X を離散位相空間とする．このとき任意の $A \subset X$ について $A^a = A$ であるから X が可算集合でなければ X は可分ではない．とくに $\mathbb{R}$ に離散距離をいれたものは可分ではない．

Example 2.10.8. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\mathbb{Q}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q}\ (\forall i)\} \subset \mathbb{R}^n$$

は稠密だから $\mathbb{R}^n$ は可分．

Proof. 任意の $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ と，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，Lem. 2.7.7 より全ての i に対し $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$．よって

$$\left(\prod_{i=1}^{n} (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)\right) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset.$$

よって $x \in (\mathbb{Q}^n)^a$．(cf. Ex. 2.6.8.) □

Example 2.10.9. Ex. 2.2.9 の $\mathbb{R}^\infty$ の部分集合 A を次で定める．

$$A = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{Q}\ (1 \leq i \leq k),\ k \in \mathbb{N}\}$$

すなわち A の元は，はじめの有限個は有理数，残りは全て 0 であるような実数列．このとき A は可算集合であり $\mathbb{R}^\infty$ で稠密である．よって $\mathbb{R}^\infty$ は可分．

Proof. $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_k = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{Q}\ (1 \leq i \leq k)\}$$

とおくと，集合として $A_k \cong \mathbb{Q}^k$ であり，$A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ だから，A は可算集合である．

$x = (x_1, x_2, \ldots,) \in \mathbb{R}^\infty$ とする．$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ であることを示す．

$\varepsilon > 0$ とする．$k \in \mathbb{N}$ を十分大きくとると

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

となる．$y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{Q}$ を $|y_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2k}}$ となるようにとる．このとき $y = (y_1, \ldots, y_k, 0, 0, \ldots) \in A$ と x の距離は

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=k+1}^{\infty} x_i^2} < \sqrt{k\frac{\varepsilon^2}{2k} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

よって $y \in \mathrm{U}_\varepsilon(x)$ となり，$\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$．したがって $x \in A^a$． □

Definition 2.10.10. $A, B \subset X$ とする.

A が B において稠密 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A^a \supset B$.

Example 2.10.11. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とする.

1. $(0,1) \subset (0,1] \subset \mathbb{R}$ について, $(0,1)^a = [0,1] \supset (0,1]$ だから, $(0,1)$ は $(0,1]$ において稠密.
2. $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ について, $\mathbb{Q}^a = \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}^c$, $\mathbb{Q}^{ca} = \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ だから, $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}^c$ において, $\mathbb{Q}^c$ は $\mathbb{Q}$ においてそれぞれ稠密.

Definition 2.10.12. $A \subset X$ とする.

A が<u>全疎 (nowhere dense)</u> $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (A^a)^\circ = \emptyset$.

Proposition 2.10.13. A が全疎 $\Leftrightarrow A^e$ が X で稠密.

Proof.

$$(A^a)^\circ = (A^a)^{cac} = A^{acac} = (A^{ac})^{ac} = (A^e)^{ac} = (A^{ea})^c$$

だから,

$$\begin{aligned} A \text{ が全疎} &\Leftrightarrow (A^{ea})^c = (A^a)^\circ = \emptyset \\ &\Leftrightarrow A^{ea} = X \\ &\Leftrightarrow A^e \text{が稠密}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.10.14. A が全疎 $\Leftrightarrow$ 任意の空でない開集合 $O \subset X$ に対し, O に含まれる空でない開集合 $O' \subset O$ で, $O' \cap A = \emptyset$ となるものが存在する.

Proof. Prop. 2.10.13, Prop. 2.10.3 より, A が全疎 $\Leftrightarrow A^e$ が稠密 $\Leftrightarrow$ 任意の空でない開集合 $O \subset X$ に対し $O \cap A^e \neq \emptyset$ であることに注意.

$\Rightarrow$) $O' = O \cap A^e$ とおくと, 上の注意から O' は空でない. また A^e は開集合なので O' も開集合で, あきらかに O に含まれる. $O' \subset A^e \subset A^c$ だから $O' \cap A = \emptyset$.

$\Leftarrow$) O を空でない開集合とする. $O \cap A^e \neq \emptyset$ を示せばよい. 仮定より, 空でない開集合 $O' \subset O$ で $O' \cap A = \emptyset$ となるものが存在する. O' は A と交わらない開集合だから $O' \subset A^e$. よって, $O \cap A^e \supset O' \neq \emptyset$. □

2.11　点列の収束

Definition 2.11.1. X を集合とする．自然数の全体 $\mathbb{N}$ から X への写像を X の点列という．

点列 $f\colon \mathbb{N} \to X$ は $f(n) = x_n$ であるとき，しばしば，点列 $x_1, x_2, \ldots$ あるいは点列 $\{x_n\}$ と表される．

Definition 2.11.2. X を位相空間とする．X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束する $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x の任意の近傍 U に対し，ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる．

点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとき，x を点列 $\{x_n\}$ の極限点 (limit point) といい，$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ あるいは $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ 等と書く．

exercise 116. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とする．このとき次を示せ．

$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow$ 任意の $U \in \mathcal{U}^*(x)$ に対し，ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる．

Remark . X を距離空間とする．$x \in X$ に対し $\{\mathrm{U}_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ および $\left\{\mathrm{U}_{\frac{1}{k}}(x)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ は x の基本近傍系であるから，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} x_n = x \\
\Leftrightarrow &\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(x) \\
\Leftrightarrow &\forall k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, x_n \in \mathrm{U}_{\frac{1}{k}}(x)
\end{aligned}$$

である．とくに 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の点列 (実数列) の収束について，上の定義 2.11.1 と通常の実数列の収束の定義は同値である．

exercise 117. d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の点列 $\{x_n\}$, $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nd})$ が $a = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ に収束するための必要十分条件は全ての i $(1 \leq i \leq d)$ について，実数列 $\{x_{ni}\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $a_i \in \mathbb{R}$ に収束することである．

点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとき $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ と書くのであるが，一般の位相空間においては極限点が一意に定まるわけではないので，この記法には注意が必要である．

exercise 118. X を密着位相空間とする．このとき，X の任意の点列は X の任意の点に収束する．

Theorem 2.11.3. 距離空間 X においては，点列の極限点は，存在すれば，唯一つである．(X が Hausdorff 空間 (Def. 3.3.1) であればよい.)

Proof. $x \in X$ を点列 $\{x_n\}$ の極限点であるとする．$y \in X$, $x \neq y$ とする．

$\varepsilon = d(x,y)/2$ とおくと $\varepsilon > 0$.

$z \in \mathrm{U}_\varepsilon(x) \Rightarrow d(x,z) < \varepsilon \Rightarrow d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \varepsilon + d(z,y) \Rightarrow d(y,z) > d(x,y) - \varepsilon = \varepsilon \Rightarrow z \notin \mathrm{U}_\varepsilon(y)$ だから

$$\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap \mathrm{U}_\varepsilon(y) = \emptyset.$$

今 $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ であるから，ある自然数 N が存在して，$n \geq N$ ならば $x_n \in \mathrm{U}_\varepsilon(x)$ となる．従って $n \geq N$ ならば $x_n \notin \mathrm{U}_\varepsilon(y)$ となり y は $\{x_n\}$ の極限値ではない．　□

Theorem 2.11.4. $A \subset X$ とする．

1. A の点列 $\{a_n\}$（i.e. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in A$）が $x \in X$ に収束すれば $x \in A^a$ である．
2. $x \in X$ が可算基本近傍系を持てば（とくに X が距離空間ならば）逆も正しい．すなわち

$$x \in A^a \Leftrightarrow A \text{ の点列 } \{a_n\} \text{ で } \lim_{n\to\infty} a_n = x \text{ となるものが存在する．}$$

Proof.

1. $a_n \in A$, $a_n \to x$ とする．x の任意の近傍 U に対し，ある自然数 N が存在して，$n \geq N$ ならば $a_n \in U$ である．とくに $a_N \in U \cap A$ ゆえ，$U \cap A \neq \emptyset$. よって Thm. 2.8.6 より $x \in A^a$.
2. $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を x の可算基本近傍系とする．

$$V_n = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$$

とおくと $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ も x の可算基本近傍系であり $V_n \supset V_{n+1}$ が成り立つ．

Thm. 2.8.6, exe. 102 より

$$x \in A^a \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : V_n \cap A \neq \emptyset$$

である．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$a_n \in V_n \cap A$ をひとつとり，点列 $\{a_n\}$ を考えると，あきらかに $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.　(exe. 116 参照)

□

Remark . 点列ではなく，フィルターの収束という概念を使えば，一般の位相空間でも「逆」も成り立つ．

exercise 119. 上の $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が x の基本近傍系であることを示せ.

Corollary 2.11.5.

1. A : closed $\Rightarrow$ A の点列 $\{a_n\}$ が極限点 $x \in X$ をもてば $x \in A$.
2. X が第一可算公理 (Def. 2.6.6)) をみたせば（とくに距離空間においては）逆も成り立つ. すなわち

$$A : \text{closed} \Leftrightarrow A \text{ の点列 } \{a_n\} \text{ が極限点 } x \in X \text{ をもてば } x \in A.$$

Proof. A : closed$\Leftrightarrow$ $A = A^a$ であることと, Thm. 2.11.4 より従う. □

exercise 120. X を距離空間とする. このとき

$$x \in A' \Leftrightarrow A \text{ の点列 } \{a_n\} \text{ で, } a_n \neq x \ (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ かつ } \lim_{n\to\infty} a_n = x \text{ となるものが存在する.}$$

2.12　相対位相, 部分空間

Definition 2.12.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A の部分集合族 $\mathcal{O}_A$ を

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

と定めると, $\mathcal{O}_A$ は A の位相となる. この位相を X による A の相対位相 (relative topoloty) という.
位相空間の部分集合に相対位相をいれて位相空間とみたとき, 部分空間 (subspace) という.

exercise 121. $\mathcal{O}_A$ が A に位相を定めることを示せ.

部分距離空間の位相を調べてみよう.

Theorem 2.12.2. 部分距離空間の位相は相対位相である.
すなわち, X を距離空間, $A \subset X$ を部分距離空間, $B \subset A$ を部分集合とするとき次が成り立つ.
B は A の開集合である $\Leftrightarrow$ X の開集合 O が存在して, $B = O \cap A$.

Proof. $a \in A$ に対し, a を中心とする半径 r の A における開球

$$\mathrm{U}_r(a)_A = \{x \in A \mid d(a, x) < r\}$$

は, a を中心とする半径 r の X における開球

$$\mathrm{U}_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

と A との共通部分, すなわち, $\mathrm{U}_r(a)_A = \mathrm{U}_r(a) \cap A$ であることに注意する.
B が A の開集合であるとする. 距離空間の開集合は開球の和集合であった (Thm. 2.3.5) から

$$B = \bigcup_\alpha U_{A,\alpha} = \bigcup_\alpha (U_\alpha \cap A) = \left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) \cap A$$

となる. ただし $U_{A,\alpha}$, U_α はそれぞれ A, X における開球である. $O = \bigcup_\alpha U_\alpha$ とおけばよい.
逆は上の議論を逆にたどればよいが, 以下のようにしてもよい. $O \subset X$ が開集合で, $B = O \cap A$ であるとする. $x \in B$ とすると, $x \in O$ であり, O は開集合ゆえ, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O$ となる. $\mathrm{U}_\varepsilon(x)_A = \mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap A \subset O \cap A = B$ ゆえ, B は A の開集合. □

Proposition 2.12.3. X を位相空間, A をその部分空間とし, $B \subset A$ とする. このとき,

B は A の閉集合である $\Leftrightarrow$ X のある閉集合 F が存在して, $B = A \cap F$.

Proof. $B \subset A$ に対し, B の X における補集合を B^c, A における補集合を $B^{c'}$ と書くことにする.

$$B^c = \{x \in X \mid x \notin B\}$$
$$B^{c'} = \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap B^c.$$

$C \subset X$ とすると,

$$(A \cap C)^{c'} = A \cap (A \cap C)^c = A \cap (A^c \cup C^c) = A \cap C^c$$

であることに注意.

$\Rightarrow$) B が A の閉集合であるとすると, $B^{c'}$ は A の開集合. よって X の開集合 O が存在して, $B^{c'} = A \cap O$ となる. $F = O^c$ とおけば, F は X の閉集合であり,

$$B = \left(B^{c'}\right)^{c'} = (A \cap O)^{c'} = A \cap O^c = A \cap F.$$

$\Leftarrow$) F が X の閉集合で, $B = A \cap F$ であるとする. $O = F^c$ とおけば, O は X の開集合である.

$$B^{c'} = (A \cap F)^{c'} = A \cap F^c = A \cap O$$

となり, $B^{c'}$ は A の開集合, ゆえ B は A の閉集合. □

Remark . $B \subset A \subset X$ とする. $B = A \cap B$ であるので, B が X の開（閉）集合であれば, B は部分空間 A の開（閉）集合である. しかし逆は一般には成立しない. 実際, A が X の開（閉）集合ではないとき, A は部分空間 A では開（閉）集合であるが, X ではそうではない.

A が開集合あるいは閉集合のときは次が成り立つ.

Proposition 2.12.4. X を位相空間, $A \subset X$ をその開（閉）集合とし, $B \subset A$ とする. このとき,

B は部分空間 A の開（閉）集合である $\Leftrightarrow$ B は X の開（閉）集合である.

Proof. $\Leftarrow$ は上で注意した. $\Rightarrow$ を示そう.

A が X の開集合, B が A の開集合であるとする. このとき, X の開集合 O が存在して, $B = A \cap O$ となる. A, O ともに X の開集合であるから, B も X の開集合.

閉集合の方も同様. □

exercise 122. 閉集合の方を示せ.

exercise 123. X を位相空間, A をその部分空間, $x \in A$, $V \subset A$ とする. このとき
V が A における x の近傍 $\Leftrightarrow$ x の X における近傍 U が存在して, $V = U \cap A$.

exercise 124. X を位相空間, A をその部分空間とする. ここまでに扱った様々な概念について, A におけるものと X におけるものとの関係を考察せよ.

問題集. 179

Example 2.12.5. $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間

$$S^n = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

(原点を中心とする半径 1 の球面) をn次元球面 (n-dimensional sphere) という.

2.13　連続写像

Example 2.13.1. 微分積分学で学んだ, 関数の連続性を思い出そう.

1 変数関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が点 $a \in \mathbb{R}$ で連続であるとは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x\ (|x-a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つことであった.

$\mathbb{R}$ にユークリッド距離をいれると, この条件は

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathrm{U}_\delta(a) : f(x) \in \mathrm{U}_\varepsilon(f(a))$$

あるいは

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(\mathrm{U}_\delta(a)) \subset \mathrm{U}_\varepsilon(f(a))$$

と書ける. さらに, ε 近傍全体が基本近傍系をなすことに注意すれば, これは

$$\forall V \in \mathcal{U}(f(a)), \exists U \in \mathcal{U}(a) : f(U) \subset f(V)$$

と同値である.

これをふまえて位相空間の間の写像の連続性を次のように定める.

Definition 2.13.2. X, Y を位相空間とする.

写像 $f\colon X \to Y$ が点 $a \in X$ で<u>連続 (continuous)</u>

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a の近傍 U が存在して $f(U) \subset V$ となる.

$f\colon X \to Y$ が X の各点で連続であるとき f を<u>連続写像 (continuous map, continuous mapping)</u> という.

Definition 2.13.3. 連続写像 $f\colon X \to Y$ は, 全単射でありかつ逆写像 f^{-1} も連続であるとき, <u>同相写像 (homeomorphism)</u> であるという.

X から Y への同相写像が存在するとき, X と Y は<u>同相 (homeomorphic)</u> であるという.

Proposition 2.13.4. 写像 $f\colon X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続 $\Leftrightarrow$ $f(a)$ の任意の近傍 V に対し, $f^{-1}(V)$ は a の近傍である.

Proof. $f(U) \subset V \Leftrightarrow U \subset f^{-1}(V)$ であり, 近傍を含む部分集合は近傍であること (Thm. 2.6.10 U3) と, $f(f^{-1}(V)) \subset V$ であることに注意すれば明らか. □

exercise 125. 証明の詳細を.

exercise 126. X を位相空間, (Y,d) を距離空間とする．このとき, 写像 $f\colon X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続 $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 点 a のある近傍 U が存在して, $x \in U$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる.

位相空間の間の連続写像は以下のように特徴付けられる.

Theorem 2.13.5. $f\colon X \to Y$ を写像とする．次は同値.

1. f は連続.
2. 開集合の f による逆像は開集合.
   すなわち, Y の任意の開集合 O に対し, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である.
3. 閉集合の f による逆像は閉集合.
   すなわち, Y の任意の閉集合 F に対し, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である.
4. X の任意の部分集合 A に対し, $f\left(A^a\right) \subset f(A)^a$.

Proof. $1 \Rightarrow 2$) f が連続とし, $O \neq \emptyset$ を Y の開集合とする．任意の $x \in f^{-1}(O)$ に対し, $f(x) \in O$ であり, O は開集合だから, O は $f(x)$ の近傍である．f は点 x で連続なので, Prop. 2.13.4 より $f^{-1}(O)$ は x の近傍である．よって Thm. 2.6.3 より $f^{-1}(O)$ は開集合である.

$2 \Rightarrow 1$) 任意の開集合の逆像は開集合であるとする．$x \in X$ とし, V を $f(x)$ の近傍とする．近傍の定義から, $f(x) \in O \subset V$ となる開集合 O が存在する．$U = f^{-1}(O)$ とおけば, 仮定より U は開集合であり, $x \in U$ であるから, U は x の近傍である．$f(U) \subset O \subset V$ であるから, f は点 x で連続．x は任意にとったので f は連続.

$2 \Leftrightarrow 3$ はやさしい.

$3 \Rightarrow 4$) 任意の閉集合の逆像が閉集合であるとする．$f(A) \subset f(A)^a$ であるから $A \subset f^{-1}\left(f(A)^a\right)$．$f(A)^a$ は閉集合であるから仮定より $f^{-1}\left(f(A)^a\right)$ も閉集合．よって, $A^a \subset f^{-1}\left(f(A)^a\right)$, すなわち, $f(A^a) \subset f(A)^a$.

$4 \Rightarrow 3$) 任意の A に対し, $f(A^a) \subset f(A)^a$ であるとする．$F \subset Y$ を閉集合とする．$f\left(f^{-1}(F)\right) \subset F$ に注意すると, 仮定より $f\left(f^{-1}(F)^a\right) \subset f\left(f^{-1}(F)\right)^a \subset F^a = F$．よって $f^{-1}(F)^a \subset f^{-1}(F)$ となり, $f^{-1}(F)^a = f^{-1}(F)$．したがって $f^{-1}(F)$ は閉集合．□

exercise 127. 上の $2 \Leftrightarrow 3$ を示せ.

Proposition 2.13.6. $f\colon X \to Y$ が $a \in X$ で連続 $\Leftrightarrow \forall A \subset X (a \in A^a) : f(a) \in f(A)^a$.

Proof. $\Rightarrow$. $\forall V \in \mathcal{U}(f(a)), \exists U \in \mathcal{U}(a) : f(U) \subset V$．$a \in A^a$ とすると, $U \cap A \neq \emptyset$ ゆえ $f(U \cap A) \neq \emptyset$．$V \cap f(A) \supset f(U) \cap f(A) \supset f(U \cap A)$ ゆえ $V \cap f(A) \neq \emptyset$．よって

$f(a) \in f(A)^a$.

$\Leftarrow$. 対偶を示す．f が a で連続でないとする．$\exists V \in \mathcal{U}(f(a)), \forall U \in \mathcal{U}(a) : f(U) \not\subset V$. $A = f^{-1}(V^c) = f^{-1}(V)^c$ とおく．$f(U) \not\subset V \Leftrightarrow U \not\subset f^{-1}(V) \Leftrightarrow U \cap A \neq \emptyset$ に注意すると，$a \in A^a$ である．一方，あきらかに $f(A) \subset V^c$ ゆえ $f(A) \cap V = \emptyset$ だから $f(a) \notin f(A)^a$.

□

Example 2.13.7. X を位相空間, A をその部分空間とするとき, 包含写像 $i\colon A \to X$ は連続である.

exercise 128. なぜか.

さらに次が成り立つ.

Theorem 2.13.8. X を位相空間, A をその部分集合とする．A の相対位相は, 包含写像 $i\colon A \to X$ が連続になるような A の位相のうち最も弱いものである.

Proof. 上の例 2.13.7 でみたように, A に相対位相をいれると i は連続である.

また, $i\colon (A, \mathcal{O}) \to X$ が連続であれば, X の任意の開集合 O に対し $i^{-1}(O) = A \cap O$ は開集合だから $A \cap O \in \mathcal{O}$. すなわち, 相対位相は $\mathcal{O}$ より弱い. □

Example 2.13.9. X, Y を位相空間とする.

1. X が離散位相空間のとき, 任意の写像 $f\colon X \to Y$ は連続である.
2. Y が密着位相空間のとき, 任意の写像 $f\colon X \to Y$ は連続である.

exercise 129. なぜか.

Example 2.13.10. X を集合, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相とする．このとき恒等写像 $1_X\colon (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ が連続であることと, $\mathcal{O}_2 \leq \mathcal{O}_1$ であることとは同値である.

exercise 130. なぜか.

Theorem 2.13.11. X, Y, Z を位相空間とする.

1. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ がともに連続ならば, 合成 $g \circ f\colon X \to Z$ も連続である.
2. 恒等写像 $1_X\colon X \to X$ は連続である.

Proof. 2 は Ex. 2.13.10 でみた．1 は練習問題. □

exercise 131. 1 を示せ.

もちろん, より強く, 次が成り立つ.

exercise 132. X, Y, Z を位相空間, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする. f が点 $a \in X$ で連続であり, g が点 $f(a) \in Y$ で連続であれば, 合成 $g \circ f\colon X \to Z$ は点 $a \in X$ で連続である.

部分空間への写像の連続性を調べる際, 次は有用である.

Proposition 2.13.12. X, Y を位相空間, $B \subset Y$ を部分空間, $i\colon B \to Y$ を包含写像とする. このとき,

写像 $f\colon X \to B$ が連続 $\Leftrightarrow$ 合成 $i \circ f\colon X \to Y$ が連続.

exercise 133. 証明せよ.

連続写像と関連して次の概念もしばしば使われる.

Definition 2.13.13. X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. f が<u>開写像 (open mapping)</u> である $\Leftrightarrow$ X の任意の開集合の像が Y の開集合である.
2. f が<u>閉写像 (closed mapping)</u> である $\Leftrightarrow$ X の任意の閉集合の像が Y の閉集合である.

定義から f が開（閉）写像であれば $f(X)$ は Y の開（閉）集合である.
写像が連続, 開写像, 閉写像であるというのはそれぞれ独立した概念である.

Example 2.13.14. X の部分空間 A の包含写像 $i\colon A \to X$ は連続である (Ex. 2.13.7) が, A が開（閉）集合でなければ開（閉）写像ではない.

exercise 134. A が開集合のとき, 包含写像は開写像か？　閉集合の場合はどうか？

Example 2.13.15.

1. Y が離散位相空間のとき, 任意の写像 $f\colon X \to Y$ は開かつ閉写像である.
2. X が密着位相空間のとき, 写像 $f\colon X \to Y$ が開（閉）写像であることと $f(X)$ が開（閉）集合であることは同値である.

(Ex. 2.13.9 と比較せよ.)

Example 2.13.16. X を集合, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相とする. このとき恒等写像 $1_X\colon (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ が開（閉）写像であることと, $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ であることとは同値である. (Ex. 2.13.10 と比較せよ.)

Example 2.13.17. 位相空間 X の恒等写像は連続かつ開かつ閉写像である.

exercise 135. 開写像の合成は開写像か？

同相写像について考える.

Theorem 2.13.18. X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を連続写像とする. 次は同値.

1. f は同相写像.
2. 連続写像 $g\colon Y \to X$ で, $g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$ をみたすものが存在する.
3. f は全単射かつ開写像.
4. f は全単射かつ閉写像.

Proof. 1⇒2 はあきらか（$g = f^{-1}$ とおけばよい）. 2⇒1 もあきらか. 実際このような写像 g があれば, f は全単射であり $g = f^{-1}$ である. 1⇔3,4 もあきらか. 実際, f が全単射であるとき, f が開写像（閉写像）であることと f^{-1} が連続であることは同値である. □

Remark . 連続な全単射は必ずしも同相写像とは限らない. 実際 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相で $\mathcal{O}_2 < \mathcal{O}_1$ であるものとすると, 例 2.13.10 でみたように, 恒等写像 $1_X\colon (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ は連続な全単射であるが, 逆 $1_X\colon (X, \mathcal{O}_2) \to (X, \mathcal{O}_1)$ は連続ではない.

exercise 136. 写像 $f\colon [0,1) \to S^1$ を $f(\theta) = e^{2\pi i\theta}$ で定めると, f は連続な全単射であるが, 同相写像ではない. ここで, $[0,1)$ にはユークリッド距離から定まる位相をいれている. また $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ を自然に同一視して $S^1 \subset \mathbb{C}$ とみている.

Example 2.13.19. 1 次元ユークリッド空間の部分空間 $(-1,1)$ から 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ への写像 $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \tan \frac{\pi}{2}x$ で定めると, f は同相写像である.

Example 2.13.20. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対し, $\mathbb{R}^{n+1}$ において S^n の北極 $N = (0, \ldots, 0, 1)$ と点 $(x_1, \ldots, x_n, 0)$ を結ぶ直線が S^n と交わる（N 以外の）点を $\varphi(x)$ とする. これにより写像 $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to S^n - \{N\}$ が定まり, これは同相写像である. この写像を N からの立体射影 (stereographic projection) という.

exercise 137.

1. $\varphi(x)$ を具体的に（$x_1, \ldots, x_n$ を用いて）あらわし, φ が連続であることを示せ.
2. φ の逆写像を求め, φ の逆写像が連続であることを示せ.

Definition 2.13.21. 同相写像によって保たれる性質を位相的性質 (topological property) という.

2.14　距離空間の間の連続写像

距離空間の間の写像は, 距離の定める位相に関して連続であるとき, 連続であるという. すなわち,

Definition 2.14.1. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.
写像 $f\colon X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続 (continuous)
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a の近傍 U が存在して $f(U) \subset V$ となる.
$f\colon X \to Y$ が X の各点で連続であるとき f を連続写像 (continuous map) という.

距離空間においては ε 近傍が基本近傍系をなすことに注意すると, (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とするとき,
写像 $f\colon X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続
$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して $f\left(\mathrm{U}_\delta(a)\right) \subset \mathrm{U}_\varepsilon(f(a))$
$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$
であることがわかる.

exercise 138. これを示せ.

Example 2.14.2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めると, f は連続である.

Proof. $a \in \mathbb{R}$ とする. f が a で連続であることを示す.
$\varepsilon > 0$ とする. $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|a|+1)\}$ とおくと $\delta > 0$ であり, $|x - a| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}|f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2| = |2a(x-a) + (x-a)^2| = |x-a||2a + x - a| \\ &\leq |x-a|(2|a| + |x-a|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2|a|+1}(2|a|+1) = \varepsilon.\end{aligned}$$

Remark . 上の式変形について.
$x^2 - a^2$ の大きさを $x - a$ の大きさで評価したい. f が連続であることを示すのに, f のテーラー展開を使うというのは相当本末転倒ではあるけれど, $f(x) = x^2$ を $x = a$ のまわりでテーラー展開すると, $x^2 = a^2 + 2a(x-a) + (x-a)^2$.
別の考え方としては, $x^2 = (x - a + a)^2 = (x-a)^2 + 2a(x-a) + a^2$. なお, 多項式の場合, 例えばこのような変形を使えば, テーラーの定理によらずにテーラー展開が出来ることを示せる.

□

Example 2.14.3. (X,d) を距離空間, $x_0 \in X$ とする．x_0 からの距離をはかる関数, すなわち, $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$ で定まる写像 $d_{x_0} \colon X \to \mathbb{R}$ は連続である．

Proof. 三角不等式より, 任意の $a, x \in X$ に対し

$$-d(x,a) \leq d(x_0,x) - d(x_0,a) \leq d(x,a) \tag{2.1}$$

すなわち $|d(x_0,x) - d(x_0,a)| \leq d(x,a)$ であることがわかる．よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \varepsilon$ とおくと, $d(x,a) < \delta$ ならば,

$$|d_{x_0}(x) - d_{x_0}(a)| = |d(x_0,x) - d(x_0,a)| \leq d(x,a) < \delta = \varepsilon.$$

□

exercise 139. 不等式 (2.1) を示せ．

Theorem 2.14.4. X, Y を距離空間とする．このとき
$f \colon X \to Y$ が $a \in X$ で連続 $\Leftrightarrow$ 点 $a \in X$ に収束する任意の点列 $\{x_n\}$ に対し $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

つまり, f が連続であるということは, $\lim_{n\to\infty}$ を中にいれることが出来る, すなわち $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$ となるということである．

Proof. $\Rightarrow$) f が $a \in X$ で連続であり, 点列 $\{x_n\}$ が a に収束するとする．$f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a の近傍 U で $f(U) \subset V$ となるものが存在する．この U に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる．したがって $n \geq N$ ならば $f(x_n) \in f(U) \subset V$ である．よって $f(x_n) \to f(a)$.

$\Leftarrow$) Proposition 2.13.6 より $\forall A \subset X : a \in A^a \Rightarrow f(a) \in f(A)^a$ を示せばよい．$A \subset X$, $a \in A^a$ とする．X は距離空間だから, Theorem. 2.11.4.2 より, A の点列 $\{a_n\}$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ となるものがある．仮定より, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ である．$\{f(a_n)\}$ は $f(A)$ の点列だから, Theorem. 2.11.4.1 より, $f(a) \in f(A)^a$. □

Remark . 証明を見るとわかるように, $\Rightarrow$ は任意の位相空間でよい．$\Leftarrow$ は, 点 $a \in X$ が可算基本近傍系をもてばよい．

exercise 140. $f(x,y) = x + y$, $g(x,y) = xy$ で与えられるユークリッド空間の間の写像 $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は連続である．

exercise 141. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ をユークリッド空間, X を位相空間とし, $p_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を第 i 成分への射影, すなわち $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ で与えられる写像とする．次を示せ．

1. p_i は連続である．

2. $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ が連続 $\Leftrightarrow$ すべての i に対し $p_i \circ f\colon X \to \mathbb{R}$ が連続.
3. $m \geq n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq m$ とする. $p(x_1, \ldots, x_m) = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ で与えられる写像 $p\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ は連続.
4. $B \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間, $f\colon X \to B$ を写像とする. f が $\mathbb{R}^n$ の座標を使って $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ と表されるとき, f が連続 $\Leftrightarrow$ 各 $f_i\colon X \to \mathbb{R}$ が連続.

問題集． 85(2) 99 106

Example 2.14.5. (X, d_X) を距離空間, (Y, d_Y) を有界, すなわち $\delta(Y) < \infty$, である距離空間とする. X から Y への写像全体を $F(X,Y)$, 連続写像全体を $C(X,Y)$ で表す. $f, g \in F(X,Y)$ に対し, 実数 $d(f,g)$ を

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

により定める (Y は有界だから $d(f,g) < \infty$) と, d は $F(X,Y)$ 上の距離関数である.

$\{f_n\}$ を $F(X,Y)$ の点列, すなわち X から Y への写像の列とする. $\{f_n\}$ が上で定めた距離に関して $f \in F(X,Y)$ に収束するとき, $\{f_n\}$ は f に一様収束 (uniformly convergent) するという.

連続写像の列 $\{f_n\}$ が写像 f に一様収束するならば, f は連続である. よって Cor 2.11.5 より, この距離の定める位相に関して $C(X,Y)$ は $F(X,Y)$ の閉集合である.

Proof. 連続写像の列 $\{f_n\}$ が写像 f に一様収束するとき, f は連続であることを示す.

$a \in X$ を任意の点とする. $a \in X$ で f が連続であること, すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, a のある近傍 U が存在して, $x \in U$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となることを示せばよい.

$\varepsilon > 0$ とする. $\{f_n\}$ は f に一様収束するので, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $d(f_n, f) < \varepsilon/3$ となる. よって, 任意の $x \in X$ に対し $d_Y(f_N(x), f(x)) < \varepsilon/3$ である. f_N は連続であるから a のある近傍 U が存在して, $x \in U$ ならば $d_Y(f_N(x), f_N(a)) < \varepsilon/3$ となる. この U について, $x \in U$ ならば

$$d_Y(f(x), f(a)) \leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(a)) + d_Y(f_N(a), f(a)) < \varepsilon.$$

$\square$

exercise 142. 上の d が $F(X,Y)$ 上の距離関数であることを示せ.

Definition 2.14.6. (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.

写像 $f\colon X \to Y$ が一様連続 (uniformly continuous) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x, x') < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となる.

Remark . ε に対し δ が X の点によらずにとれる.

明かに一様連続ならば連続である.

exercise 143. 一様連続ならば連続であることを示せ.

Example 2.14.7. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めると, f は一様連続ではない. (Ex 2.14.2 参照.)

Proof. 任意の $\delta > 0$ に対し, $x = 1/\delta$ とすると, $|(x+\delta/2)) - x| = \delta/2 < \delta$ であるが,

$$\begin{aligned} |f(x+\delta/2) - f(x)| &= \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2 \\ &= \delta x + \frac{\delta^2}{4} \\ &> \delta x = 1. \end{aligned}$$

□

Example 2.14.8. $X \supset A \neq \emptyset$ とする. $d_A(x) = d(x, A)$ で定まる関数 $d_A\colon X \to \mathbb{R}$ は一様連続である. とくに Ex. 2.14.3 の関数 d_{x_0} は一様連続である.

Proof. 任意の $x, y \in X$ と, 任意の $a \in A$ に対し $d(x,y) + d(y,a) \geq d(x,a) \geq d(x,A)$, すなわち $d(x,y) + d(y,a) \geq d(x,A)$ だから, $d(x,y) + d(y,A) \geq d(x,A)$ が成り立つ. よって $d(x,y) \geq d(x,A) - d(y,A)$. x と y を入れ換えて $d(x,A) - d(y,A) \geq -d(x,y)$. よって

$$|d_A(x) - d_A(y)| = |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y).$$

□

問題集 . 97 103(1)(2)

第 3 章

位相空間

3.1 位相の基と準基

Thm. 2.3.5 でみたように, 距離空間の開集合は開球の和集合として特徴付けることができる. 一般の位相空間においても, わかりやすい集合で開集合を特徴付けることができると便利である.

Definition 3.1.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の基 (base) あるいは開基 (open base) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の開集合 O が $\mathcal{B}$ に属する開集合の和集合として表せる: $O = \bigcup_{\lambda} O_\lambda$ $(O_\lambda \in \mathcal{B})$.
ただし, 0 個の集合の和集合は空集合である, あるいはそう約束する.

Example 3.1.2. Thm. 2.3.5 から, 距離空間 X において ε 近傍全体

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{U}_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$$

は開基である.

開集合の族が開基となるための必要十分条件をひとつあたえよう.

Theorem 3.1.3. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の開基である $\Leftrightarrow$ 任意の開集合 O と任意の $x \in O$ に対し, ある $O' \in \mathcal{B}$ が存在して, $x \in O' \subset O$ となる.

Proof. $\Rightarrow$ はあきらか.

$\Leftarrow$) O を開集合とする. 仮定より, 各 $x \in O$ に対し $x \in O_x \subset O$ となるような $O_x \in \mathcal{B}$ が存在する. 各 $x \in O$ に対しこのような $O_x \in \mathcal{B}$ をひとつ選べば,

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} O_x \subset O$$

ゆえ, $O = \cup_{x \in O} O_x$ となる. □

exercise 144. ⇒ を示せ.

Definition 3.1.4. 位相空間は, 高々可算な基をもつとき, 第二可算公理 (second axiom of countability) をみたすという.

Example 3.1.5. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において,

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{U}_r(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

とおくと $\mathcal{B}$ は可算基である. よって $\mathbb{R}^n$ は第二可算公理をみたす.

Proof. O を開集合, $x \in O$ とする. このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O$ となる. $0 < r < \frac{\varepsilon}{2}$ となるような $r \in \mathbb{Q}$ をひとつとる（Lem. 2.7.7 参照）. $\mathbb{Q}^n$ は $\mathbb{R}^n$ で稠密であった（Ex. 2.10.8）から, $\mathrm{U}_r(x) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. $x' \in \mathrm{U}_r(x) \cap \mathbb{Q}^n$ をひとつとると $\mathrm{U}_r(x') \in \mathcal{B}$ である. 任意の $y \in \mathrm{U}_r(x')$ に対し,

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) < r + r = 2r < \varepsilon$$

だから $y \in \mathrm{U}_\varepsilon(x)$, すなわち $\mathrm{U}_r(x') \subset \mathrm{U}_\varepsilon(x)$. また $x' \in \mathrm{U}_r(x)$ だから $x \in \mathrm{U}_r(x')$. よって $x \in \mathrm{U}_r(x') \subset O$ となり, Thm. 3.1.3 から, $\mathcal{B}$ は開基である. □

Theorem 3.1.6. 位相空間が第二可算公理をみたせば, 第一可算公理をみたす.

Proof. $\mathcal{B}$ を位相空間 X の可算開基とする. $x \in X$ に対し, $\mathcal{U}^*(x) = \{V \in \mathcal{B} \mid x \in V\}$ とおく. $\mathcal{U}^*(x)$ は $\mathcal{B}$ の部分集合だから高々可算集合で, $\mathcal{U}^*(x)$ の元は, x を含む開集合だから, x の近傍である. U を x の近傍とすると, $x \in O \subset U$ となる開集合 O が存在する. $\mathcal{B}$ は開基であるから, $O = \cup V_i$, $V_i \in \mathcal{B}$ とあらわせる. $x \in O$ だから, ある i が存在して $x \in V_i$ となる. $V_i \in \mathcal{U}^*(x)$ であり, $V_i \subset U$ であるから, $\mathcal{U}^*(x)$ は x の（可算）基本近傍系である. □

集合 X に位相を定める際, 次の Lemma は基本的である.

Lemma 3.1.7. X を集合とし, $\mathcal{O}_\lambda$ を X の位相とする. このとき $\mathcal{O} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ も X の位相となる

Proof. $\mathcal{O}$ が位相の条件をみたすことをチェックすればよい. □

exercise 145. 証明せよ.

Remark . X にいれることの出来る位相全体のなす順序集合において, $\mathcal{O} = \inf\{\mathcal{O}_\lambda\}$ である.

集合 X と, その部分集合がいくつか与えられたとき, これらの部分集合が開集合となるような位相を考えたい場合がある．もちろん離散位相はそのような位相であるが, 最初に与えられた部分集合の情報をもっと反映したものを考えたい．Lem. 3.1.7 により次の定義は意味がある．

Definition 3.1.8. X を集合とする．$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{B}$ を含む位相全ての共通部分, すなわち $\mathcal{B}$ の元が開集合となるような最弱の位相を $\mathcal{B}$ が生成 (generate) する位相 といい $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ で表す．

$\mathcal{O}(B)$ の元を陽に表したい場合がある．

Definition 3.1.9. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の準基 (subbase) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{B}$ の有限個の元の共通部分として表される集合全体が $\mathcal{O}$ の基となる．

ただし, 0 個の集合の共通部分は全体 X である, あるいはそう約束する．

つまり $\mathcal{B}$ が準基であるとは, 任意の開集合が, $\mathcal{B}$ の元の有限個の共通部分たちの和集合でかけるということである．

あきらかに $\mathcal{B}$ が開基であれば準基である．

Theorem 3.1.10. X を集合, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ とする．このとき, $\mathcal{B}$ は, $\mathcal{B}$ の生成する位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の準基である．すなわち, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の元（開集合）は, $\mathcal{B}$ の元の有限個の共通部分たちの和集合でかけるものたちである．

Proof. あきらかに $B \subset \mathcal{O}(B)$ である．

$\mathcal{B}$ の元有限個の共通部分としてかける X の部分集合全体のなす集合を $\hat{\mathcal{B}}$ とかく:

$$\hat{\mathcal{B}} := \left\{ U \subset X \;\middle|\; U = \bigcap_{i \in F} B_i, F\text{:有限集合}, B_i \in \mathcal{B} \right\}$$

$\hat{\mathcal{B}}$ の有限個の元の共通部分は $\hat{\mathcal{B}}$ の元であることに注意する．また, $\hat{\mathcal{B}}$ の元の和集合でかける X の部分集合全体のなす集合を $\mathcal{O}$ とかく:

$$\mathcal{O} := \left\{ O \subset X \;\middle|\; O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, U_\lambda \in \hat{\mathcal{B}} \right\}$$

$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$ であることを示そう．

$B \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ だから（O2 より）$\hat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ であり,（O3 より）$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ である．

$\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}$ を示すには, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ に注意すれば, $\mathcal{O}$ が位相であることを示せばよい．($\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は $\mathcal{B}$ を含む最弱の位相であった.)

O1. $\emptyset$ は 0 個の集合の和集合ゆえ $\emptyset \in \mathcal{O}$, X は 0 個の元の共通部分であるから $X \in \mathcal{O}$.

O2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ とする. $O_1 = \bigcup_\lambda U_\lambda$, $O_2 = \bigcup_\mu V_\mu$, $U_\lambda, V_\mu \in \hat{\mathcal{B}}$ とかける. よって,

$$O_1 \cap O_2 = \left(\bigcup_\lambda U_\lambda\right) \cap \left(\bigcup_\mu V_\mu\right) = \bigcup_{\lambda,\mu} U_\lambda \cap V_\mu$$

であり, $U_\lambda \cap V_\mu \in \hat{\mathcal{B}}$ だから $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

O3. $\hat{\mathcal{B}}$ の元の和集合の和集合はもちろん $\hat{\mathcal{B}}$ の元の和集合.

□

Remark . この定理から, 任意の $B \subset \mathcal{P}(X)$ は適当な位相の準基となることがわかるが, 必ずしも開基とはならない. 問題集 190 参照.

3.2　直積と直和

Definition 3.2.1. $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．直積集合 $X \times Y$ に, 部分集合の族 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ が生成する位相をいれた位相空間を X と Y の直積空間 (product space), あるいはデカルト積 (Cartesian product) といい, この位相を直積位相 (product topology) という．

普通, とくにことわらなければ, 直積集合には直積位相をいれる．

Proposition 3.2.2. $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ は直積位相の開基である．すなわち, 直積位相の開集合は X の開集合と Y の開集合の直積の和集合でかけるもの全体である．

Proof. 直積位相は $\mathcal{B}$ の生成する位相であるから, Thm. 3.1.10 より $\mathcal{B}$ は準基である, すなわち,

$$\hat{\mathcal{B}} := \left\{ U \subset X \times Y \;\middle|\; U = \bigcap_{i \in F} B_i, F\text{:有限集合}, B_i \in \mathcal{B} \right\}$$

が開基である．$\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ であることを示そう．$\hat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ を示せばよい．$X \in \mathcal{O}_X$, $Y \in \mathcal{O}_Y$ であるから $X \times Y \in \mathcal{B}$ である（0 個の元の共通部分）．$U_i \times V_i \in \mathcal{B}$ $(1 \leq i \leq n)$ に対し, 有限個の開集合の共通部分は開集合であるから,

$$\bigcap_{i=1}^{n} (U_i \times V_i) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i \right) \in \mathcal{B}.$$

□

Remark . 問題集 190 を使って $\mathcal{B}$ が開基の条件をみたすことをチェックしてもよい．

Theorem 3.2.3. X, Y, Z を位相空間, $p_X \colon X \times Y \to X$, $p_Y \colon X \times Y \to Y$ を射影とする．

1. $X \times Y$ の直積位相は, p_X と p_Y がどちらも連続になるような最弱の位相である．
2. p_X, p_Y は開写像である．
3. 写像 $f \colon Z \to X \times Y$ が連続である $\Leftrightarrow$ $p_X \circ f, p_Y \circ f$ がどちらも連続.

Proof. $X \times Y$ の直積位相を $\mathcal{O}$ とする．

1. $p_X \colon (X \times Y, \mathcal{O}) \to X$, $p_Y \colon (X \times Y, \mathcal{O}) \to Y$ が連続であることはあきらか.

$\mathcal{O}'$ を $X \times Y$ の位相で $p_X \colon (X \times Y, \mathcal{O}') \to X$, $p_Y \colon (X \times Y, \mathcal{O}') \to Y$ がどちらも連続であるものとする．$\mathcal{O} \leq \mathcal{O}'$ であることを示そう．$\mathcal{O}$ は $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ が生成する位相, すなわち, $\mathcal{B}$ を含む最弱の位相であったから, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}'$ であることを示せばよい. $U \in \mathcal{O}_X$, $V \in \mathcal{O}_Y$ とすると, 仮定から $p_X^{-1}(U), p_Y^{-1}(V) \in \mathcal{O}'$ である．よって

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) = p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) \in \mathcal{O}'.$$

2. 一般に和集合の像は像の和集合であることに注意すれば, 開基の元の像が開集合であることを示せばよいが, $p_X(U \times V) = U$, $p_Y(U \times V) = V$ であるからあきらか.
3. 連続写像の合成は連続なので $\Rightarrow$ はあきらか.

   $p_X \circ f$, $p_Y \circ f$ がどちらも連続であるとする．$X \times Y$ の開集合の f による逆像が Z の開集合であることを示せばよいが, 一般に和集合の逆像は逆像の和集合であり, 共通部分の逆像は逆像の共通部分であることに注意すれば, 準基の元の逆像が開集合であることを示せばよい．$U \in \mathcal{O}_X$, $V \in \mathcal{O}_Y$ とすると, 仮定から $(p_X \circ f)^{-1}(U), (p_Y \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{O}_Z$ である．よって

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}((U \times Y) \cap (X \times V)) \\ &= f^{-1}(U \times Y) \cap f^{-1}(X \times V) \\ &= f^{-1}\left(p_X^{-1}(U)\right) \cap f^{-1}\left(p_Y^{-1}(V)\right) \\ &= (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_Y \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{O}_Z. \end{aligned}$$

□

exercise 146. 対角線写像 $\Delta \colon X \to X \times X$ は連続である.

exercise 147. $p_X \colon X \times Y \to X$ が閉写像とはならない例を挙げよ.

exercise 148. $y_0 \in Y$ とする. 写像 $i_{y_0} \colon X \to X \times \{y_0\}$ を $i_{y_0}(x) = (x, y_0)$ により定める．i_{y_0} は同相写像であることを示せ. ただし, $X \times \{y_0\}$ には $X \times Y$ からの相対位相をいれる.

exercise 149. X_1, X_2, Y_1, Y_2 を位相空間とする.

1. $f_i \colon X_i \to Y_i$ を連続写像とする．このとき, $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ で与えられる直積空間の間の写像

$$f_1 \times f_2 \colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$$

   は連続である.

2. X_1 と Y_1, X_2 と Y_2 が同相であれば $X_1 \times X_2$ と $Y_1 \times Y_2$ は同相である.

exercise 150. $(0,1) \times [0,1)$ と $[0,1] \times [0,1)$ は同相であることを示せ. ただし $(0,1), [0,1), [0,1] \subset \mathbb{R}$ は 1 次元ユークリッド空間の部分空間.

Remark . $(0,1)$ と $[0,1]$ は同相ではない (後の節参照). $X \times Z$ と $Y \times Z$ が同相であっても, X と Y が同相になるわけではない. 別の言い方をすれば, X と Y は同相ではないが, $X \times Z$ と $Y \times Z$ が同相となることもある.

問題集 . 196, 197, 198, 199

Definition 3.2.4. $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする. 直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に, 部分集合の族

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{p_\lambda^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_\lambda\}$$

が生成する位相 (この位相を<u>直積位相</u> という) をいれた位相空間を, 族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の<u>直積空間</u>または<u>弱位相による直積空間</u>という. ただし $p_\lambda \colon \prod X_\lambda \to X_\lambda$ は標準的射影.

直積集合には普通とくにことわらなければ直積位相をいれる.

Proposition 3.2.5.

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある有限集合 } L \subset \Lambda \text{ が存在して, } \lambda \in L \text{ ならば } A_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda, \\ \lambda \notin L \text{ ならば } A_\lambda = X_\lambda \end{array} \right\}$$

は直積位相の開基である.

Proof. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{p_\lambda^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_\lambda\}$ の元の有限個の共通部分としてあらわされる部分集合全体が $\mathcal{B}$ である. □

問題集 . 193, 194

Remark . 直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ には,

$$\mathcal{B}^{box} := \left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \;\middle|\; \forall \lambda \in \Lambda : O_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \right\}$$

が生成する位相（これを<u>箱位相 (box topology)</u> という）をいれることもできる. Λ が有限集合の場合は箱位相と直積位相は一致するが, 一般には箱位相の方が直積位相よりも強い. 一般には箱位相では問題集 194(4),(5) に相当することが成立しない.

Definition 3.2.6. $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする. 非交和 $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に, 位相

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \{O \subset X \mid \forall\lambda \in \Lambda : O \cap X_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda\} \\ &= \left\{ O = \coprod_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \;\middle|\; O_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \right\}\end{aligned}$$

をあたえた位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の<u>位相和</u>という．

Theorem 3.2.7. $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を位相和, $i_\lambda\colon X_\lambda \to X$ を標準的包含写像とする．位相和の位相は, 全ての i_λ が連続となるような最強の位相である．

Proof. $\mathcal{O}$ を位相和の位相とする．あきらかに $i_\lambda\colon (X, \mathcal{O}_\lambda) \to (X, \mathcal{O})$ は連続である．実際, $O \in \mathcal{O}$ とすると, $i_\lambda^{-1}(O) = O \cap X_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$.

$\mathcal{O}'$ を X の位相で, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $i_\lambda\colon (X, \mathcal{O}_\lambda) \to (X, \mathcal{O}')$ が連続であるものとする．$\mathcal{O}' \leq \mathcal{O}$ であることを示そう．$O \in \mathcal{O}'$ とする．各 $\lambda \in \Lambda$ に対し, $O \cap X_\lambda = i_\lambda^{-1}(O) \in \mathcal{O}_\lambda$ であるから, $O \in \mathcal{O}$ である． □

exercise 151. i_λ は開写像かつ閉写像である．

exercise 152. 各 X_λ は $X = \coprod X_\lambda$ の開かつ閉集合である．

exercise 153. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とし, $\mathbb{R}$ の部分空間 A, B を $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ により定める． このとき, 恒等写像 $\mathrm{id}\colon A \coprod B \to \mathbb{R}$ は連続であるが, 同相写像ではない． (実は位相和 $A \coprod B$ と $\mathbb{R}$ は同相ではないこともわかる.)

exercise 154. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．集合として $X = \coprod X_\lambda$ と非交和に分かれているとし, 各 X_λ に $\mathcal{O}$ からいれた相対位相を $\mathcal{O}_\lambda$ とする．このとき,

$\mathcal{O}$ が族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}$ の位相和の位相である $\Leftrightarrow$ 任意の λ に対し X_λ が $(X, \mathcal{O})$ の開集合である．

問題集． 195

3.3 Hausdorff 空間

§2.11 で注意したように，一般の位相空間において点列の極限は必ずしも一意に定まるわけではない．一意に定まるためのひとつの条件を与える．

Definition 3.3.1. 位相空間 X が Hausdorff（ハウスドルフ）空間 である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し，x の近傍 U と y の近傍 V で，$U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する．

exercise 155. 位相空間 X が Hausdorff 空間である $\Leftrightarrow$ 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し，x を含む開集合 O と y を含む開集合 O' で，$O \cap O' = \emptyset$ となるものが存在する．

Remark . Hausdorff であるというのは位相的性質である．すなわち

exercise 156. X, Y を同相な位相空間とする．X が Hausdorff であれば Y もそうである．

Example 3.3.2. 距離空間は Hausdorff 空間である．実際 X を距離空間，$x, y \in X$, $x \neq y$ とすると，$\varepsilon = d(x, y)/2 > 0$ で，$\mathrm{U}_\varepsilon(x) \cap \mathrm{U}_\varepsilon(y) = \emptyset$.

Example 3.3.3. 離散空間は Hausdorff 空間である．実際 X を離散空間，$x, y \in X$, $x \neq y$ とすると，$\{x\}, \{y\}$ は開集合で，$\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$．（もちろん離散距離空間と思ってもよい.）

Example 3.3.4. 元をふたつ以上含む密着空間は Hausdorff でない．

Theorem 3.3.5. Hausdorff 空間においては，点列の極限は，存在すれば，一意的である．

Proof. 証明は Thm. 2.11.3 のものと同じ．（実際，証明のポイントは距離空間が Hausdorff であることを示すことであった．というより，もちろん，Hausdorff 空間というのはこの証明がうまくいくような空間として考えられたもの.） □

Theorem 3.3.6. Hausdorff 空間において，1 点は閉集合である．

Proof. X を Hausdorff 空間，$x \in X$ とする．任意の $y \in X \setminus \{x\}$ に対し，$x \neq y$ であるから，x の近傍 U と，y の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがある．とくに $x \notin V$ であるから $V \subset X \setminus \{x\}$ となり，y は $X \setminus \{x\}$ の内点． □

Theorem 3.3.7. Hausdorff 空間の部分空間も Hausdorff.

Proof. X を Hausdorff 空間, $A \subset X$ を部分空間とする．$a, b \in A$, $a \neq b$ とすると, a の X における近傍 U と, b の X における近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがある．$U' := U \cap A$, $V' = V \cap A$ とおけば, U', V' はそれぞれ a, b の A における近傍で (exe 123) $U' \cap V' = \emptyset$. □

Theorem 3.3.8. X, Y を位相空間とする．このとき $X \times Y$ が Hausdorff $\Leftrightarrow$ X, Y ともに Hausdorff.

Proof. $\Rightarrow$) exe.148 より, X, Y は $X \times Y$ の部分空間と同相であるから, Thm. 3.3.7 よりどちらも Hausdorff.

$\Leftarrow$) $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$ とする．$x_1 \neq x_2$ としてよい．X は Hausdorff だから x_i の近傍 U_i で $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものが存在する．$U_i \times Y$ は (x_i, y_i) の近傍で, $(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = \emptyset$ である． □

Remark . 無限個の直積に対しても同様なことが成り立つ．証明もほぼ同じ．

Theorem 3.3.9. X を位相空間とする．このとき, X が Hausdorff $\Leftrightarrow$ 対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ が $X \times X$ の閉集合.

Proof. $x, y \in X$ に対し, $x \neq y \Leftrightarrow (x, y) \notin \Delta \Leftrightarrow (x, y) \in \Delta^c$ である．より一般に, $A, B \subset X$ に対し, $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \times B) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow A \times B \subset \Delta^c$ である．よって

$$\begin{aligned} X \text{ が Hausdorff} &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Delta^c, \exists U \in \mathcal{U}(x), \exists V \in \mathcal{U}(y) : U \times V \subset \Delta^c \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Delta^c : (x, y) \text{ は } \Delta^c \text{ の内点} \\ &\Leftrightarrow \Delta^c \text{は開集合}. \end{aligned}$$

□

exercise 157. (この exerceise は位相とは直接は関係ない.) X, Y, Z を集合, $f\colon Z \to X$, $g\colon Z \to Y$ を写像とする．写像 $(f, g)\colon Z \to X \times Y$ を $(f, g)(z) = (f(z), g(z))$ により定める．また $A \subset X$, $B \subset Y$ を部分集合とする．このとき, $(A \times B) \cap \mathrm{Im}(f, g) = \emptyset \Leftrightarrow f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) = \emptyset$ であることを示せ.

Corollary 3.3.10. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間, $A \subset X$ とし, $f, g\colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき次が成り立つ.

1. X の部分集合

$$C := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

は閉集合である.

2. f と g が部分集合 A 上一致すれば, A^a 上一致する.

Proof. 1. Y が Hausdorff なので対角線集合 Δ_Y は $Y \times Y$ は閉集合である. 写像 $(f,g)\colon X \to Y \times Y$ は連続だから $C = (f,g)^{-1}(\Delta_Y)$ は閉集合.

2. f と g が A 上一致すれば $A \subset C$ である. C は閉集合だから $A^a \subset C$.

$\square$

Example 3.3.11. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とする. 連続関数 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 上一致するならば $f = g$ である.

Corollary 3.3.12. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする. 写像 $f\colon X \to Y$ が連続ならばグラフ

$$\Gamma_f := \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

は $X \times Y$ の閉集合. (cf. 問題集 84)

Proof. $f \times 1_Y\colon X \times Y \to Y \times Y$ は連続であり (exe. 149), Y が Hausdorff のとき $\Delta = \{(y,y) \mid y \in Y\}$ は $Y \times Y$ の閉集合である. よって $\Gamma_f = (f \times 1_Y)^{-1}(\Delta)$ は閉集合.

$\square$

exercise 158. 上の Corollary はもう少し精密化できる. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする. 写像 $f\colon X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続ならば, 任意の $b \in Y$ $(b \neq f(a))$ に対し, (a,b) は Γ_f の外点である.

exercise 159. Y が密着空間のとき, $f\colon X \to Y$ は連続だが Γ_f は閉ではない例を挙げよ. (ちなみにこのとき, 任意の f は連続.) Γ_f が閉集合になることはあるか?

exercise 160. $(X, \mathcal{O})$ をHausdorff 空間とし, $\mathcal{O}'$ を $\mathcal{O}$ より強い X の位相とする. このとき, $(X, \mathcal{O}')$ も Hausdorff.

exercise 161. $\mathbb{R}$ にザリスキ位相をいれると Hausdorff ではない.

3.4　連結性

Definition 3.4.1. 1. 位相空間 X が非連結 (disconnected) あるいは不連結である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X は, 空でない 2 つの開集合の非交和に表すことができる, すなわち, ある空でない開集合 O_1, O_2 が存在して,

$$X = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

となる.

また, このような開集合 O_1, O_2 を X の分割という.

2. 位相空間 X が連結 (connected) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X は非連結でない.
3. 位相空間 X の部分集合 A が連結である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 部分空間 A が連結である.

Remark . この定義によれば, 空集合 $\emptyset$ は連結である. が, 空集合は連結ではないと考えた方が都合がよいことが多い. (cf. 1 は素数ではない.) 空集合が連結とはならないように定義を適切に修正する (あるいは空集合は連結ではないと約束する) ことも可能であるが, この講義では空集合の連結性については知らん顔をすることにする.

Proposition 3.4.2. X を位相空間とする. 次は同値である.

1. X は連結である.
2. X は空でない 2 つの閉集合の非交和に表すことができない.
3. X の部分集合で開かつ閉であるものは $\emptyset, X$ のみ.
4. X を空でない 2 つの開集合の和集合として表せば, その 2 つの開集合の共通部分は空ではない:
   $X = O_1 \cup O_2$, $O_i \neq \emptyset$, O_i :open $\Rightarrow O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.
5. X を空でない 2 つの閉集合の和集合として表せば, その 2 つの閉集合の共通部分は空ではない:
   $X = F_1 \cup F_2$, $F_i \neq \emptyset$, F_i :closed $\Rightarrow F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.
6. X から $\{0, 1\}$ への連続な全射は存在しない. ただし, $\{0, 1\}$ には離散位相をいれる.

Proof. 1$\Leftrightarrow$2 $\Leftrightarrow$3 $\Leftrightarrow$4 $\Leftrightarrow$5 はあきらか.

1$\Leftrightarrow$6 を示すには次が同値であることを示せばよい.

1' X は非連結.

6' X から $\{0, 1\}$ への連続な全射が存在する.

6' ⇒ 1') $f\colon X \to \{0,1\}$ を連続な全射とする．$O_i = f^{-1}(i)$, $i = 0, 1$ とおけば，f は全射なので $O_i \neq \emptyset$ であり，f が連続で $\{i\}$ は $\{0,1\}$ の開集合だから O_i は開集合である．あきらかに，$O_0 \cap O_1 = \emptyset$ かつ $X = O_0 \cup O_1$ であるから，X は非連結．

1' ⇒ 6') X を非連結とし，O_0, O_1 を X の分割とする．写像 $f\colon X \to \{0,1\}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O_0 \\ 1, & x \in O_1 \end{cases}$$

により定める．$O_i \neq \emptyset$ であるから f は全射である．また $\{0,1\}$ の開集合は $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ で，それぞれの逆像は $\emptyset, O_0, O_1, X$ だから開集合である．よって f は連続．□

exercise 162. 上の 1⇔2 ⇔3 ⇔4 ⇔5 を示せ．

exercise 163. $A \subset X$ とする．次は同値．

1. A は非連結．
2. $A \subset O_1 \cup O_2$, $A \cap O_i \neq \emptyset$, $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ となるような X の開集合 O_i が存在する．
3. $A \subset F_1 \cup F_2$, $A \cap F_i \neq \emptyset$, $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ となるような X の閉集合 F_i が存在する．

exercise 164. $A \subset X$ とする．次は同値．

1. A は連結．
2. X の開集合 O_i が $A \subset O_1 \cup O_2$, $A \cap O_i \neq \emptyset$ をみたせば $A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ となる．
3. X の閉集合 F_i が $A \subset F_1 \cup F_2$, $A \cap F_i \neq \emptyset$ をみたせば $A \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ となる．

Theorem 3.4.3. 連結空間の連続写像による像は連結．

Proof. $f\colon X \to Y$ を連続写像とする．対偶，すなわち $f(X)$ が非連結ならば X は非連結であることを示そう．$f(X)$ が非連結だとする．f を X から $f(X)$ への写像とみると全射かつ連続である (Prop. 2.13.12)．$f(X)$ は非連結だから $f(X)$ から $\{0,1\}$ への連続な全射が存在する．これと f との合成を考えると，X から $\{0,1\}$ への連続な全射が得られる．よって X は非連結である．

あるいは，次のように示してもよい．Y の開集合 U_i で，$f(X) \subset U_1 \cup U_2$, $f(X) \cap U_i \neq \emptyset$ $f(X) \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものがある．

- U_i は Y の開集合で f は連続だから $f^{-1}(U_i)$ は X の開集合．
- $f(X) \cap U_i \neq \emptyset$ だから $f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$．

- $f(X) \subset U_1 \cup U_2$ だから $X = f^{-1}(U_1 \cup U_2) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$.
- $f(X) \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ だから $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cap U_2) = \emptyset$.

よって $f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(U_2)$ は X の分割をあたえ, X は非連結である. □

Corollary 3.4.4. 連結性は位相的性質である. □

Theorem 3.4.5. *X を位相空間, A, B を X の部分集合で $\emptyset \neq A \subset B \subset A^a$ であるものとする. このとき A が連結ならば B も連結.*

Proof. $f\colon B \to \{0,1\}$ を連続写像とする. f が全射ではないことを示そう. A が連結なので $f|_A$ は全射ではない, すなわち f は A 上定数である. $f(A) = 0$ としてよい. 写像 $g\colon B \to \{0,1\}$ を $g(b) = 0$ により定めるとあきらかに g は連続であり, $f|_A = g|_A$ である. $\{0,1\}$ は Hausdorff 空間であり, A は B で稠密なので Cor. 3.3.10 より $f = g$, すなわち f は全射ではない.

あるいは

O が X の開集合であるとき, $A \cap O = \emptyset \Leftrightarrow A^a \cap O = \emptyset$ であることに注意する. 実際, O^c が閉集合であることに注意すれば

$$A \cap O = \emptyset \Leftrightarrow A \subset O^c \Leftrightarrow A^a \subset O^c \Leftrightarrow A^a \cap O = \emptyset.$$

O_i を X の開集合で $B \subset O_1 \cup O_2$, $B \cap O_i \neq \emptyset$ となるものとする. $B \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ であることを示せばよい.

- $A \subset B$ かつ $B \subset O_1 \cup O_2$ だから $A \subset O_1 \cup O_2$ である.
- $B \subset A^a$ かつ $B \cap O_i \neq \emptyset$ だから $A^a \cap O_i \neq \emptyset$ であり, 上の注意から $A \cap O_i \neq \emptyset$ となる.

A は連結なので $A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ となり, $A \subset B$ なので $B \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. □

exercise 165. $A \subset B \subset A^a$ であるとき, 部分空間 B の部分集合 A は B において稠密であることを示せ.

1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の連結部分集合について調べよう.

Definition 3.4.6. $\mathbb{R}$ の部分集合 C は, 任意の $a, b \in C$ $(a \leq b)$ に対し, $[a,b] \subset C$ となるとき凸集合 (convex set) であるという.

($\mathbb{R}^n$ の部分集合 C は, その任意の 2 点に対し, それらを結ぶ線分も C に含まれるとき凸集合であるという.)

Theorem 3.4.7. *1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の有界閉区間は連結.*

Proof. $a < b$ に対し, 閉区間 $A = [a, b]$ は連結であることを示そう.

$F_1, F_2 \subset A$ が A の空でない閉集合で $A = F_1 \cup F_2$ であるとする. $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ であることを示せばよい. A は $\mathbb{R}$ の閉集合だから, F_i は $\mathbb{R}$ の（空でない有界）閉集合である.

$b \in F_1 \cap F_2$ のときは $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

$b \notin F_1 \cap F_2$ とする. $b \in F_2$, $b \notin F_1$ としてよい. F_1 は空でない有界集合なので上限が存在する. $c := \sup F_1$ とおく. $c \in F_1^a = F_1$. (cf. Cor. 2.8.7.) $c \in F_1 \subset A$ ゆえ $c \leq b$. $b \notin F_1$ だから $c \neq b$ ゆえ $c < b$. $(c, b] \subset F_2$ であることを示す. 実際, $c < x \leq b$ ならば（$x > c = \sup F_1$ なので）$x \notin F_1$ かつ（A は区間なので）$x \in A = F_1 \cup F_2$ ゆえ $x \in F_2$. よって $c \in [c, b] = (c, b]^a \subset F_2^a = F_2$. よって $c \in F_1 \cap F_2$ となり, $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

□

Corollary 3.4.8. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の凸集合は連結.

Proof. $C \subset \mathbb{R}$ を（空でない）凸集合, $f\colon C \to \{0, 1\}$ を連続写像とする. f が全射でないこと, すなわち定値写像であることを示せばよい. 任意の $a, b \in C(a \leq b)$ に対し, C は凸なので, $[a, b] \subset C$ である. $[a, b]$ は連結だから $f|_{[a,b]}$ は定値写像ゆえ $f(a) = f(b)$.

あるいは

非連結な部分集合は凸ではないことを示せばよい. $A \subset \mathbb{R}$ を（空でない）非連結な部分集合とする.

$$A \subset F_1 \cup F_2, A \cap F_i \neq \emptyset, A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$$

となる $\mathbb{R}$ の閉集合 F_1, F_2 が存在する. $a_i \in A \cap F_i$ をとる. $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ゆえ $a_1 \neq a_2$. $a_1 < a_2$ としてよい. $[a_1, a_2] \not\subset A$ であることを示そう.

$[a_1, a_2] \not\subset F_1 \cup F_2$ のときは（$A \subset F_1 \cup F_2$ だから）$[a_1, a_2] \not\subset A$ である.

$[a_1, a_2] \subset F_1 \cup F_2$ とする. $[a_1, a_2]$ は連結で, $a_i \in [a_1, a_2] \cap F_i \neq \emptyset$ だから, $[a_1, a_2] \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ より $[a_1, a_2] \cap A^c \supset [a_1, a_2] \cap F_1 \cap F_2$ だから, $[a_1, a_2] \cap A^c \neq \emptyset$. すなわち, $[a_1, a_2] \not\subset A$. □

Proposition 3.4.9. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の連結部分集合は凸集合である.

Proof. 凸でない部分集合は非連結であることを示せばよい. $A \subset \mathbb{R}$ を凸でない部分集合とする. $[a, b] \not\subset A$ となるような $a, b \in A$ が存在する. $x \in [a, b] \cap A^c$ をひとつとる. $x \notin A$, $a, b \in A$ ゆえ $a < x < b$. よって $A \cap (-\infty, x)$, $A \cap (x, \infty)$ は A の分割を与える. □

Proposition 3.4.10. $\mathbb{R}$ の凸集合とは区間である.

Proof. 区間が凸であるのはあきらか.

$A \subset \mathbb{R}$ を空でない凸集合とする．A が有界である場合を考えよう．（A が有界でない場合も同様だが少しやさしい.）A は空でない有界集合だから上限, 下限が存在する．$m := \inf A$, $M := \sup A$ とおく．$(m, M) \subset A$ であることを示す．$m < x < M$ とする．$m = \inf A$ だから $m < a < x$ となる $a \in A$ が存在する．同様に, $x < b < M$ となる $b \in A$ が存在する．A は凸だから $[a, b] \subset A$ ゆえ $x \in A$. したがって A が空でない有界凸集合ならば, $(m, M) \subset A \subset [m, M]$ となり A は (m, M), $(m, M]$, $[m, M)$, $[m, M]$ のいずれか, つまり区間である． $\square$

以上をまとめて次をえる．

Theorem 3.4.11. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の（空でない）部分集合 A に対し次は同値である．

1. A は連結.
2. A は凸集合.
3. A は区間. $\square$

Corollary 3.4.12 (中間値の定理)**.** X 連結．$f\colon X \to \mathbb{R}$ 連続．$x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) < f(x_2)$ とする．このとき, $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(X)$.

Proof. $f(X) \subset \mathbb{R}$ は連結だから凸. $\square$

Remark . この中間値の定理の証明には連結なら凸（Prop. 3.4.9）だということは使うが, 区間の連結性（Thm. 3.4.7, Cor. 3.4.8）は不要である．

この中間値の定理から, 微積分での中間値の定理を導くためには, 定義域である閉区間の連結性が必要になる．

Example 3.4.13. 半開区間 $[0, 1)$ と開区間 $(0, 1)$ は同相ではない．より強く, $[0, 1)$ から $(0, 1)$ への連続な全単射は存在しない．（連続な全射はある $x \sin \frac{1}{1-x}$ とか使えば...）実際, $f\colon [0, 1) \to (0, 1)$ を連続な単射だとすると, f を $(0, 1) = [0, 1) \setminus \{0\}$ に制限したものは連続（単射）写像 $f\colon (0, 1) \to (0, 1) \setminus \{f(0)\}$ をあたえる．$(0, 1)$ は連結だからその像も連結である．$(0, 1) \setminus \{f(0)\}$ は非連結なので $f((0, 1)) \neq (0, 1) \setminus \{f(0)\}$. よって $f([0, 1)) \neq (0, 1)$ となり, f は全射ではない．

Definition 3.4.14. X を位相空間, $a, b \in X$ とする．1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の閉区間 $[0, 1]$ から X への連続写像 $\varphi\colon [0, 1] \to X$ で $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ となるものを a と b を結ぶ<u>道 (path)</u> という．a を道の始点, b を道の終点という．

Remark . 道とは写像 φ のことであり, その像 $\varphi([0, 1]) \subset X$ のことではない．

Definition 3.4.15. 位相空間 X が<u>弧状連結 (path-connected)</u> である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a, b \in X$ に対し，a と b を結ぶ道が存在する．

Remark . arcwise connected というときもある．path-connected と arcwise connected を別の意味で使うこともある．

Theorem 3.4.16. 弧状連結ならば連結である．

Proof. 証明は Cor. 3.4.8 と同様である．X を（空でない）弧状連結空間，$f\colon X \to \{0,1\}$ を連続写像とする．f が全射ではないことを示せばよい．$a \in X$ をひとつ固定する．任意の $x \in X$ に対し $f(x) = f(a)$ であることを示そう．X は弧状連結だから a と x を結ぶ道 φ，すなわち連続写像 $\varphi\colon [0,1] \to X$ で $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = x$ となるもの，が存在する．$f \circ \varphi\colon [0,1] \to \{0,1\}$ は連続であり $[0,1]$ は連結なので，$f \circ \varphi(1) = f \circ \varphi(0)$ である．よって $f(x) = f(\varphi(1)) = f \circ \varphi(1) = f \circ \varphi(0) = f(\varphi(0)) = f(a)$. □

Example 3.4.17. 連結だが弧状連結ではない例．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 < x \le 1, y = \sin(1/x)\right\} \\
B &= \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \le y \le 1\right\} \\
X &= A \cup B
\end{aligned}$$

を考えると，X は連結であるが弧状連結ではない．

exercise 166. これを（自分で頑張って考えるか，証明が載っている本を探して）示せ．

Theorem 3.4.18. X を位相空間，$\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の連結部分集合の族，すなわち，任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \subset X$ は連結であるとする．このとき，任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ ならば $A = \bigcup_\lambda A_\lambda$ も連結．

Proof. $f\colon A \to \{0,1\}$ を連続写像とする．f が全射でないこと，すなわち，任意の $a, b \in A$ に対し $f(a) = f(b)$ であることを示せばよい．$a, b \in A$ とする．ある $\lambda, \mu \in \Lambda$ が存在し，$a \in A_\lambda, b \in A_\mu$ となる．仮定から $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ である．$c \in A_\lambda \cap A_\mu$ をひとつとる．f の制限 $f\colon A_\lambda \to \{0,1\}$ は連続で，A_λ は連結だから $f(a) = f(c)$．同様に $f(b) = f(c)$．よって $f(a) = f(b)$. □

Definition 3.4.19. X を位相空間，$x \in X$ とする．x を含む連結部分集合すべての和集合

$$C_x = \bigcup_{\substack{x \in C \\ C \subset X:\text{連結}}} C$$

を x を含む X の連結成分 (connected component) という．

Proposition 3.4.20. 連結成分は x を含む最大の連結集合である.

Proof. Thm. 3.4.18 より連結成分は連結である. 最大性は定義よりあきらか. □

Proposition 3.4.21. 連結成分は閉集合である.

Proof. C_x を x を含む連結成分とする. $C_x \subset C_x^a$ で, C_x は連結だから Thm. 3.4.5 より C_x^a も連結. $x \in C_x^a$ で C_x^a は連結だから連結成分の定義より $C_x^a \subset C_x$. よって $C_x = C_x^a$ となり C_x は閉集合. □

Proposition 3.4.22. X を位相空間とする. X における関係 $\sim$ を,

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in C \text{ となる連結部分集合 } C \subset X \text{ が存在する}$$

と定めると, これは同値関係であり, $x \in X$ を含む同値類は x を含む連結成分である.
　この同値関係による X の類別を連結成分への分解という.

Proof. 証明は次の exercise による. □

exercise 167. X を位相空間とし, $x \in X$ を含む連結成分を C_x で表す.

1. $\{x\}$ は連結である.
2. Prop. 3.4.22 の $\sim$ は同値関係である.
3. $x \sim y \Leftrightarrow y \in C_x$.

Example 3.4.23. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ の連結成分は $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ と $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ のふたつ. 実際, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ は $\mathbb{R}$ の区間だから連結. $\mathbb{R}_+ \subsetneq A \subset \mathbb{R}^\times$ は $A = \mathbb{R}_+ \cup (A \cap \mathbb{R}_-)$ と分割されるので連結ではない.

Definition 3.4.24. 位相空間 X が<u>完全不連結 (totally disconnected)</u> である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 連結成分が全て 1 点からなる.

Example 3.4.25. 離散空間は完全不連結.
　勘違いしやすいが, 離散であるということと完全不連結であるということは違う. 例えば, 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{Q}$ は完全不連結であるが, 離散空間ではない.

Proof. $A \subset \mathbb{Q}$, $\sharp A \geq 2$ とする. $r, s \in A, r < s$ をとると, $r < x < s$ となる無理数 x が存在する. $\{q \in A \mid q < x\}$ と $\{q \in A \mid q > x\}$ は A の分割をあたえるので A は連結ではない. よって各 $r \in \mathbb{Q}$ に対し, r を含む連結成分は $\{r\}$.
　また任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \not\subset \mathbb{Q}$ であるから, $\{r\}$ は $\mathbb{Q}$ の開集合ではない. □

Remark . この例から連結成分は必ずしも開集合とは限らないし, 位相空間が連結成分の位相和となるわけではないということがわかる.

exercise 168. X の連結成分が有限個であるとき, 各連結成分は開集合であることを示せ.

exercise 169. Z を $\mathbb{R}$ に Zariski 位相をいれた位相空間とする.

1. Z は連結であることを示せ.
2. Z の連結部分集合はどのようなものか？

3.5 コンパクト空間

Definition 3.5.1. X を集合, A を部分集合, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の部分集合の族とする.

1. $A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda$ であるとき, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の被覆 (covering) という.
2. $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が A の被覆であり, Λ が有限集合のとき有限被覆 (finite covering) という.
3. $\Lambda' \subset \Lambda$ とする. 族 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ が A の被覆であるとき, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda'}$ を, (A の被覆) $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の部分被覆 (subcovering) という.
   とくに Λ' が有限集合のとき有限部分被覆という.
4. A の被覆 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限部分被覆をもつ $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して, $\{E_i\}_{i\in I}$ が A の被覆となる.
5. X が位相空間, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が A の被覆で, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し E_λ が X の開集合であるとき, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の開被覆 (open covering) という.
6. 任意の有限部分集合 $I \subset \Lambda$ に対し, $\bigcap_{i\in I} E_i \neq \emptyset$ であるとき, 族 $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は有限交叉性 (finite intersection property) をもつという.

Definition 3.5.2.

1. 位相空間 X がコンパクト (compact) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X の任意の開被覆が有限部分被覆をもつ.
2. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトである $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 部分空間 A がコンパクトである.

Remark . この定義の内容の意味（するところは最初は理解しにくいかと思うがそれ）はともかく, 定義の文の意味を正確に理解せよ.

Remark . コンパクト Hausdorff 空間のことをコンパクトといい, この定義 3.5.2 の条件をみたす空間を準コンパクト (quassi-compact) ということもある.

Proposition 3.5.3. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトである $\Leftrightarrow$ 部分集合 A の（X における）任意の開被覆が有限部分被覆をもつ.

Proof. A の部分集合族 $\{E_\lambda\}$ が部分空間 A の開被覆である $\Leftrightarrow$ 部分集合 A の開被覆 $\{O_\lambda\}$ で $E_\lambda = A \cap O_\lambda$ となるものがある. □

Theorem 3.5.4. X がコンパクト $\Leftrightarrow$ X の閉集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性をもつならば $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.

Proof. X の部分集合族 $\{E_\lambda\}$ に対し, $\{E_\lambda\}$ が被覆であることと $\bigcap_\lambda E_\lambda^c = \emptyset$ であることは同値である. また, $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限部分被覆をもつ $\Leftrightarrow$ ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在

し, $\bigcap_{i\in I} E_i^c = \emptyset \Leftrightarrow$ 族 $\{E_\lambda^c\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性をもたない.

X の部分集合 E が開集合であることと E^c が閉集合であることは同値であることに注意すればよい. □

Example 3.5.5. 密着位相空間はコンパクトである. 開集合は X と $\emptyset$ だけだから.

Example 3.5.6. X を離散位相空間とすると, X がコンパクト $\Leftrightarrow$ X が有限集合.

Example 3.5.7. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ はコンパクトではない. 実際, $\{\mathrm{U}_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^n$ の開被覆であるが有限部分被覆をもたない. ただし $0 \in \mathbb{R}^n$ は原点.

同様にして次がわかる.

Proposition 3.5.8. 距離空間のコンパクト部分集合は有界閉集合である.

Proof. X を距離空間, $A \subset X$ をコンパクトとする.

まず A が有界であることを示す. $x \in X$ をひとつとる. $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{U}_n(x)$ だから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $A \subset \mathrm{U}_N(x)$ となり A は有界.

A が閉集合, すなわち, A^c が開集合であることを示そう. $x \in A^c$, つまり $x \notin A$ とする.

$$\bigcup_{r>0} \mathrm{E}_r(x) = \bigcup_{r>0} \{y \in X \mid d(x,y) > r\} = X - \{x\} \supset A$$

だから $\{\mathrm{E}_r(x)\}_{r>0}$ は A の開被覆. A はコンパクトだから有限個の $\mathrm{E}_{r_i}(x), i = 1, \ldots n$ で覆われる. $\varepsilon = \min r_i$ とおけば $\varepsilon > 0$ で

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{E}_{r_i}(x) = \mathrm{E}_\varepsilon(x)$$

となり

$$\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset \mathrm{E}_\varepsilon(x)^c \subset A^c.$$

□

より一般に Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合であることを後で示す.

ユークリッド空間では逆も成り立つ. まず 1 次元の場合を示そう. 後でコンパクト空間の性質を用いて n 次元の場合を示す.

Theorem 3.5.9 (Heine-Borel)**.** 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の有界閉集合はコンパクトである. とくに有界閉区間はコンパクトである.

Proof. $A \subset \mathbb{R}$ を有界閉集合とし, A の閉集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が有限交叉性をもつとする ($\Lambda \neq \emptyset$ のときを考えればよい) と,

$$a := \inf\left\{\max\bigcap_{i\in I} F_i \,\middle|\, \emptyset \neq I \subset \Lambda, \sharp I < \infty\right\}$$

とおけば, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$a = \inf\left\{\max\bigcap_{i\in I} F_i \,\middle|\, \lambda \in I \subset \Lambda, \sharp I < \infty\right\} \in F_\lambda$$

ゆえ $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ となり, A はコンパクトである. □

もう少し丁寧に書いてみよう. $\mathbb{R}$ の空でない有界閉集合は最大元, 最小元をもつことに注意する (Cor. 2.8.7).

$P = \{I \subset \Lambda \mid I \neq \emptyset, \sharp I < \infty\}$ とおき, $\lambda \in \Lambda$ に対し $P_\lambda = \{I \in P \mid \lambda \in I\}$ とおく.

また $I \in P$ に対し

$$F_I = \bigcap_{i\in I} F_i, \qquad a_I = \max F_I \in F_I$$

とおく. (A が $\mathbb{R}$ の有界閉集合なので F_I も $\mathbb{R}$ の有界閉集合で, 仮定より I が有限集合のときは $F_I \neq \emptyset$ であるから F_I には最大元が存在する.) $I \subset J$ のとき $F_I \supset F_J$ だから $a_I \geq a_J$ であることに注意する. さらに

$$a = \inf_{I\in P} a_I, \qquad a_\lambda = \inf_{I\in P_\lambda} a_I$$

とおく. ($\Lambda \neq \emptyset$ だから $P \neq \emptyset$ であり, $a_I \in A$ で A は有界だからこの下限は存在する.)

$I \in P_\lambda$ のとき, $\lambda \in I$ だから $F_I \subset F_\lambda$ ゆえ $a_I \in F_\lambda$ である. よって

$$a_\lambda = \inf\{a_I \mid I \in P_\lambda\} \in \{a_I \mid I \in P_\lambda\}^a \subset F_\lambda^a = F_\lambda.$$

したがって, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $a = a_\lambda$ であることを示せば, $a \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ が分かる.

$P_\lambda \subset P$ だから $a_\lambda \geq a$ である.

一方, 任意の $I \in P$ に対し, $I \subset I \cup \{\lambda\} \in P_\lambda$ であるから, $a_\lambda \leq a_{I\cup\{\lambda\}} \leq a_I$ となり, $a_\lambda \leq \inf_{I\in P} a_I = a$. □

本質的には上の議論と同じであるが, $a \in F_\lambda$ を示すのは以下のようにしてもよい. (２０１２年度の講義では以下の議論を用いた.)

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $[a, a+\varepsilon) \cap F_\lambda \neq \emptyset$ であることを示せばよい. (このとき $a \in F_\lambda^a = F_\lambda$ となるから.) a は下限だから, ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在し, $a_I < a + \varepsilon$ となる. $I \cup \{\lambda\}$ は有限集合で I を含むので

$$a \leq a_{I\cup\{\lambda\}} \leq a_I < a + \varepsilon$$

となり $a_{I\cup\{\lambda\}} \in [a, a+\varepsilon)$. また

$$a_{I\cup\{\lambda\}} \in F_{I\cup\lambda} \subset F_\lambda$$

ゆえ $a_{I\cup\{\lambda\}} \in [a, a+\varepsilon) \cap F_\lambda \neq \emptyset$. □

Remark . 一般の距離空間では有界閉ならコンパクトなんてことはない. $(0,1)$ とか離散距離空間とか. . .

exercise 170. Z を $\mathbb{R}$ に Zariski 位相をいれた位相空間とする.

1. Z はコンパクトであることを示せ.
2. Z のコンパクト部分集合はどのようなものか?

コンパクト空間の性質を調べよう.

Proposition 3.5.10. $A_1, A_2 \subset X$ がコンパクトならば $A_1 \cup A_2$ もコンパクトである.

Proof. $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を部分集合 $A_1 \cup A_2$ の開被覆, すなわち, O_λ は X の開集合で, $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup O_\lambda$ であるとする. あきらかに $\{O_\lambda\}$ は A_i の開被覆であり, 仮定より A_i はコンパクトなのである有限部分集合 $J_i \subset \Lambda$ が存在して $A_i \subset \bigcup_{j\in J_i} O_j$ となる. $J = J_1 \cup J_2 \subset \Lambda$ は有限集合であり $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{j\in J} O_j$ となる, つまり, $\{O_j\}_{j\in J}$ は $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の有限部分被覆である. よって $A_1 \cup A_2$ はコンパクトである. □

Theorem 3.5.11. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである.

Proof. X をコンパクト空間とし, $A \subset X$ を閉部分集合とする. $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の開被覆, すなわち O_λ は X の開集合で, $A \subset \bigcup O_\lambda$ であるとする. このとき $\{O_\lambda\} \cup \{A^c\}$ は X の開被覆である. X はコンパクトなので, ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ で, $X = \bigcup_{i\in I} O_i \cup A^c$ となるものがある. あきらかに $A \subset \bigcup_{i\in I} O_i$ である. □

Theorem 3.5.12. コンパクト空間の連続写像による像はコンパクトである.

Proof. X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を連続写像とし, X はコンパクトであるとする. $f(X)$ がコンパクトであることを示そう. $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $f(X)$ の開被覆, すなわち O_λ は Y の開集合で, $f(X) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ であるとする. X の部分集合族 $\{f^{-1}(O_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を

考える． f は連続だから $f^{-1}(O_\lambda)$ は X の開集合である．また， $f(X) \subset \bigcup O_\lambda$ だから $X \subset f^{-1}\left(\bigcup O_\lambda\right) = \bigcup f^{-1}(O_\lambda)$． よって $\{f^{-1}(O_\lambda)\}$ は X の開被覆である． X はコンパクトだから，ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ で， $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$ となるものがある． $f(X) = f\left(\bigcup_{i\in I} f^{-1}(O_i)\right) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$． □

Remark . コンパクト集合の連続写像による逆像はコンパクトとは限らない．例えば $\mathbb{R}$ 上の定数関数を考えてみよ．

Corollary 3.5.13. コンパクト性は位相的性質である．

Corollary 3.5.14. コンパクト空間上の実数値連続関数は最大値と最小値をとる．

Proof. X をコンパクト， $f\colon X \to \mathbb{R}$ を連続関数とすると，像 $f(X)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合だから有界閉集合．よって $f(X)$ には最大元，最小元が存在する． □

Corollary 3.5.15. 有界閉区間上の連続関数は最大値と最小値をとる． □

Theorem 3.5.16. X, Y ともにコンパクトなら $X \times Y$ もコンパクト．

Proof. $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $X \times Y$ の開被覆とする．

$$\mathcal{U} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y, \exists\lambda \in \Lambda : U \times V \subset O_\lambda\}$$

とすると $\mathcal{U}$ も $X \times Y$ の開被覆である．（$X \times Y$ の開集合は， X の開集合と Y の開集合の直積の和集合として表されるのであった．） $\mathcal{U}$ が有限部分被覆をもつことを示そう． $x \in X$ をひとつとる． $\{x\} \times Y$ は Y と同相だからコンパクト．よって $\mathcal{U}$ の有限個の元 $U_{x1} \times V_{x1}, \ldots, U_{xn_x} \times V_{xn_x}$ が存在し， $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} U_{xi} \times V_{xi}$ となる． $\{x\} \times Y \cap U_{xi} \times V_{xi} \neq \emptyset$ としてよい． $W_x = \bigcap_{i=1}^{n_x} U_{xi}$ とおくと（有限個の開集合の共通部分なので） W_x は X の開集合であり $x \in W_x$ である．また

$$Y = p_2(\{x\} \times Y) \subset p_2\left(\bigcup_{i=1}^{n_x} U_{xi} \times V_{xi}\right) = \bigcup_{i=1}^{n_x} p_2\left(U_{xi} \times V_{xi}\right) = \bigcup_{i=1}^{n_x} V_{xi}$$

だから

$$W_x \times Y = W_x \times \bigcup_{i=1}^{n_x} V_{xi} = \bigcup_{i=1}^{n_x} W_x \times V_{xi} \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} U_{xi} \times V_{xi}$$

である（絵を描いてみよ）．各 $x \in X$ に対しこのようにして W_x をとれば X の開被覆 $\{W_x\}_{x\in X}$ がえられる． X はコンパクトだからある有限個の点 $x_1, \ldots, x_m \in X$ が存在し， $X = \bigcup_{i=1}^m W_{x_i}$ となる．よって

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^m W_{x_i} \times Y \subset \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{n_{x_i}} U_{x_ij} \times V_{x_ij}$$

となり $\mathcal{U}$ の有限部分被覆がえられた．各 i,j に対し $U_{x_ij} \times V_{x_ij} \subset O_{\lambda_{ij}}$ となる $\lambda_{ij} \in \Lambda$ を選べば $X \times Y \subset \bigcup_{ij} O_{\lambda_{ij}}$ となり $\{O_\lambda\}$ の有限部分被覆がえられる． □

Remark． 上の証明では選択公理をこっそり使っているが，うまく工夫すれば選択公理を使わないように出来る．無限個の直積の場合も同様なことが成り立つ（チコノフ (Tikhonov) の定理）が，こちらは選択公理が必要（選択公理と同値）であり証明はもう少し面倒．

exercise 171. $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \times Y$ コンパクトとする．このとき，X, Y ともにコンパクトであることを示せ．

これから次が示せる．

Theorem 3.5.17 (Heine-Borel)**.** ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は有界閉集合であること．

Proof. コンパクトなら有界閉集合であることは既に示した．

$A \subset \mathbb{R}^n$ が有界閉集合であるとする． 有界であるからある $K \in \mathbb{R}$ が存在して，$A \subset [-K,K]^n$ となる．Thm. 3.5.9 より $[-K,K]$ はコンパクトであるから，Thm. 3.5.16 より $[-K,K]^n$ もコンパクトである．（$\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ は同相，問題集 196 参照.）A はコンパクト空間 $[-K,K]^n$ の閉集合であるから Thm. 3.5.11 よりコンパクトである． □

Example 3.5.18 (cf. exe 136)**.** S^1 から $[0,1)$ への連続な全射は存在しない．とくに S^1 と $[0,1)$ は同相ではない．S^1 は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合だからコンパクトであり，$[0,1)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合ではないのでコンパクトではないから．

コンパクト Hausdorff 空間について調べよう．

Theorem 3.5.19. Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合である．

Proof. X を Hausdorff 空間，$A \subset X$ をコンパクト部分集合，$x \in A^c$ とする．x が A^c の内点であることを示そう．

$a \in A$ とすると，$x \neq a$ であり，X が Hausdorff なので，x の開近傍 U_a と a の開近傍 V_a で $U_a \cap V_a = \emptyset$ となるものが存在する．各 $a \in A$ に対しこのような組 U_a, V_a をひとつ選ぶ．（あるいはこのような組全てを考える等すれば選択公理はいらない，例えば

$$\Lambda = \{(a,V) \mid a \in A, V\colon \text{open}, a \in V, x \in V^e\}$$

）$\{V_a\}_{a \in A}$ は A の開被覆であり，A はコンパクトなので，ある $a_1, \ldots a_n \in A$ が存在し，$A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$ となる．$U := \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$ とおけば，U は x の開近傍であり，$U \cap V_{a_i} \subset$

$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$ なので

$$U \cap A \subset U \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i} = \bigcup_{i=1}^{n} U \cap V_{a_i} = \emptyset$$

となり（絵を描いてみよ）$U \subset A^c$ だから x は A^c の内点. □

Corollary 3.5.20. コンパクト Hausdorff 空間の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は閉集合であること.

Proof. Thm. 3.5.11, 3.5.19 よりあきらか. □

Corollary 3.5.21. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像である.

Proof. Thm. 3.5.11, 3.5.12, 3.5.19 よりあきらか. □

Corollary 3.5.22. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射は同相写像である. □

第 4 章

完備距離空間

4.1　完備性

Definition 4.1.1. (X, d) を距離空間とする．X の点列 $\{x_n\}$ が基本列 (fundamental sequence) あるいはコーシー列 (Cauchy sequence) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ $(m, n \geq N)$ に対し, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ となる.

数列の場合 (§**??**) と同様に, 距離空間における収束列は基本列であること, 基本列は有界であることがわかる.

実数体 $\mathbb{R}$ においては基本列は収束列であったが, 一般の距離空間においては必ずしもそうではない.

Example 4.1.2. 開区間 $(0, 2) \subset \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間として距離空間とみると, $(0, 2)$ の点列 $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は基本列だが収束しない.

exercise 172. なぜか?

Definition 4.1.3. 距離空間 X は, すべての基本列が収束するとき, 完備 (complete) であるという.

exercise 173. 離散距離空間は完備である.

Theorem 4.1.4. X が完備 $\Leftrightarrow$「X の空でない閉集合の減少列 $X \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ が $\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0$ をみたせば, $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.」

Proof. $\Rightarrow$) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し点 $x_n \in F_n$ をひとつえらぶ．このとき点列 $\{x_n\}$ は基本列である．実際, $\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $\delta(F_n) < \varepsilon$ となる．この N に対し, $m, n \geq N$ ならば $F_m, F_n \subset F_N$ だから

$x_m, x_n \in F_N$ であり, $d(x_m, x_n) \leq \delta(F_N) < \varepsilon$.

仮定より X は完備であるから $\{x_n\}$ はある点 $x \in X$ に収束する. $n \in \mathbb{N}$ とする. $i \geq n$ ならば $F_i \subset F_n$ ゆえ $x_i \in F_n$. F_n の点列 $\{x_i\}_{i \geq n}$ は x に収束し, F_n は閉集合だから $x \in F_n$. よって $x \in \bigcap_n F_n$. とくに $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) $\{x_n\}$ を X の基本列とする. $A_n = \{x_i\}_{i \geq n} \subset X$, $F_n = A_n^a$ とする. あきらかに F_n は空でない閉集合であり, $F_n \supset F_{n+1}$.

$\{x_n\}$ は基本列であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $i, j \geq N$ ならば $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ となる. $n \geq N$ ならば $A_n \subset A_N$ であるから

$$\delta(F_n) = \delta(A_n^a) = \delta(A_n) \leq \delta(A_N) = \sup_{i,j \geq N} d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$$

となり, $\lim_{n \to \infty} \delta(F_n) = 0$ である.

よって仮定より $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$ である. $x \in \bigcap_n F_n$ とする. $x, x_n \in F_n$ ゆえ $d(x_n, x) \leq \delta(F_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ となり $\{x_n\}$ は x に収束する. □

問題集． 95, 100(1),(2),(3), 101(2),(3), 104(1),(2),(3), 111(2),(3)

Definition 4.1.5. 位相空間 X の部分集合 A が第 1 類集合 (set of the first category, meager set) である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A は可算個の全疎な集合の和集合:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad (A_i \text{ は } X \text{ で全疎}).$$

Theorem 4.1.6 (ベール (Baire) の稠密性定理)**.** 完備距離空間 X において, 第 1 類集合の補集合は X で稠密である.

Corollary 4.1.7. 空でない完備距離空間は第 1 類集合ではない.

定理の証明のため補題をひとつ用意する.

Lemma 4.1.8. X を距離空間, $A \subset X$ を全疎な部分集合, $O \subset X$ を空でない開集合とする. このとき $U^a \subset O \cap A^e$ となるような, 空でない開集合 U が存在する.

Proof. A は全疎だから Prop. 2.10.13 より A^e は稠密である. よって Prop. 2.10.3 より $O \cap A^e \neq \emptyset$ であり, O, A^e は開集合だから $O \cap A^e$ も開集合. $x \in O \cap A^e$ をひとつとる. $O \cap A^e$ は開集合だからある $\varepsilon > 0$ が存在して $\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O \cap A^e$ となる. $U = \mathrm{U}_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ とすればよい. □

Proof of Thm. 4.1.6. $X \supset A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (A_k:全疎) を第 1 類集合とする. A^c が稠密であることを示そう. Prop. 2.10.3 より, 空でない任意の開集合 O に対し, $O \cap A^c \neq \emptyset$ であ

ることを示せばよい.

$O \subset X$ を空でない開集合とする. $U_0 = O$ とする. $k \geq 1$ に対し, 帰納的に, 空でない開集合 U_k を $U_k^a \subset U_{k-1} \cap A_k^e$, $\delta(U_k) < 1/k$ となるようにとる. (Lem. 4.1.8 参照.) X は完備であるから, Thm. 4.1.4 より, $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^a \neq \emptyset$ である. U_k のとりかたより, $U_k^a \subset A_k^e \subset A_k^c$ であるから, $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^a \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c = A^c$. また $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^a \subset U_1^a \subset U_0 = O$. よって $O \cap A^c \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^a \neq \emptyset$. □

Cor. 2.10.5 でみたように, 有限個の稠密な開集合の共通部分は稠密であった. 完備距離空間においては可算無限個でもよい.

Corollary 4.1.9. X を完備距離空間, O_k を X で稠密な開集合とすると, $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$ は X で稠密である.

Proof. $A_k = O_k^c$ とおくと, A_k は閉集合で, O_k が稠密だから, $(A_k^a)^\circ = A_k^\circ = O_k^{c\circ} = O_k^{ac} = X^c = \emptyset$ となり, A_k は全疎である. $E = \bigcap O_k = \bigcap A_k^c = \left(\bigcup A_k\right)^c$ だから, ベールの定理より, E は稠密. □

Remark . 上の Corollary において完備という仮定は必要である. $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間として, 距離空間とみる. $\mathbb{Q}$ では 1 点は閉集合だから任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対し $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$ は開集合であり, また 1 点は開集合ではないので $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$ は閉集合ではないから $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$ は稠密である. が, これらすべての (可算) 共通部分 $\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \setminus \{r\}) = \emptyset$ は稠密ではない.

Definition 4.1.10. 距離空間 X の部分集合 A が$\underline{\text{完備}}$ $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$(部分) 距離空間 A が完備.

Theorem 4.1.11. 距離空間 X の部分集合 A が完備ならば, A は閉集合である.

Proof. $\{a_n\}$ を A の点列とし, $\lim_{n \to \infty} a_n = x \in X$ とする. $\{a_n\}$ は X の収束列であるから, X の基本列である. よって距離空間 A の点列とみたとき基本列である. A は完備なので, $\{a_n\}$ は A の点に収束する. よって $x = \lim_{n \to \infty} a_n \in A$ となり, Cor. 2.11.5 より A は閉集合である. □

exercise 174. X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合, $\{a_n\}$ を A の点列とする. $\{a_n\}$ が X の基本列であることと, 部分距離空間 A の点列として基本列であることは同値である.

Corollary 4.1.12. $A \subsetneq X$ が稠密ならば A は完備ではない.

Proof. $A^a = X \neq A$ ゆえ A は閉集合ではない. □

Example 4.1.13. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とし, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間として距離空間とみる. すなわち $d(q, r) = |q - r|$ で $\mathbb{Q}$ に距離をいれる. このとき $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密

なので完備ではない.

Theorem 4.1.14. X を完備距離空間とする. $A \subset X$ が閉集合ならば A は完備である.

Proof. $\{a_n\}$ を A の基本列とする. あきらかに $\{a_n\}$ は X の点列とみても基本列である. X は完備だから $\{a_n\}$ は X の点 $x \in X$ に収束する. A は閉集合だから $x \in A$. よって A は完備である. □

Corollary 4.1.15. X を完備距離空間, $A \subset X$ とする. このとき, A が完備 $\Leftrightarrow$ A は閉集合.

Example 4.1.16. (Y, d_Y) が有界完備距離空間ならば, Ex. 2.14.5 の距離空間 $F(X, Y)$ も完備である. よってこのとき $C(X, Y)$ も ($F(X, Y)$ の閉集合なので) 完備である.

Proof. $\{f_n\}$ を $F(X, Y)$ の基本列とする. 任意の $x \in X$ に対し,

$$d_Y(f_m(x), f_n(x)) \leq \sup_{x \in X} d_Y(f_m(x), f_n(x)) = d(f_n, f_m)$$

であるから, $\{f_n(x)\}$ は Y の基本列である. Y は完備であるから $\{f_n(x)\}$ は収束する. 写像 $f\colon X \to Y$ を $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x) \in Y$ により定める.

$\{f_n\}$ が f に（一様）収束することを示そう. $\{f_n\}$ は基本列であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N$ ならば $d(f_m, f_n) < \varepsilon/2$ となる. 任意の $x \in X$ に対し, $n \geq N$ ならば

$$d_Y(f_N(x), f(x)) \leq d_Y(f_N(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + d_Y(f_n(x), f(x))$$

であり, $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ であるから,

$$d_Y(f_N(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

したがって

$$d(f_N, f) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

よって, $n \geq N$ ならば

$$d(f_n, f) \leq d(f_n, f_N) + d(f_N, f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Theorem 4.1.17. X を距離空間, Y を完備距離空間, $A \subset X$ を部分集合, $f\colon A \to Y$ を一様連続な写像とする. このとき, f は A^a まで連続に拡張され, その拡張は一意的であ

る．すなわち，連続写像 $\bar{f}\colon A^a \to Y$ で，$\bar{f}|_A = f$ となるものがただひとつ存在する．さらに $\bar{f}$ は一様連続である．

Proof. 1. 連続な拡張は一意的であること．（これを示すのには一様連続性も完備性も使わない.）

$g, h\colon A^a \to Y$ を連続写像で，任意の $a \in A$ に対し $g(a) = f(a) = h(a)$ をみたすものとする．

$x \in A^a$ とする．A の点列 $\{a_n\}$ で $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ となるものが存在する．g, h ともに連続なので

$$g(x) = g(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} g(a_n) = \lim_{n\to\infty} h(a_n) = h(\lim_{n\to\infty} a_n) = h(x),$$

よって $g = h$.

2. 連続な拡張は一様連続であること．（これを示すのに完備性は使わない.）

写像 $g\colon A^a \to Y$ を $g|_A = f$ となる連続写像とする．g が一様連続であることを示そう．

$\varepsilon > 0$ とする．

$f\colon A \to Y$ は一様連続なので，ある $\delta > 0$ が存在して，任意の $a, b \in A$ に対し，$d(a, b) < 3\delta$ ならば $d(f(a), f(b)) < \varepsilon/3$ となる．

この δ に対し，$x, y \in A^a$ が $d(x, y) < \delta$ をみたすとする．

g は連続なので，ある $\delta_x > 0$ が存在して，$g(\mathrm{U}_{\delta_x}(x)) \subset \mathrm{U}_{\varepsilon/3}(g(x))$ となる．$\delta_x < \delta$ としてよい．同様に，ある $0 < \delta_y < \delta$ が存在して，$g(\mathrm{U}_{\delta_y}(y)) \subset \mathrm{U}_{\varepsilon/3}(g(y))$ となる．$x \in A^a$ だから $\mathrm{U}_{\delta_x}(x) \cap A \neq \emptyset$ である．よって $a \in A$ で $d(a, x) < \delta_x$ となるものがある．同様に $b \in A$ で $d(y, b) < \delta_y$ となるものがある．

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, x) + d(x, y) + d(y, b) \\ &< \delta_x + \delta + \delta_y < 3\delta \end{aligned}$$

であり，g は f の拡張なので

$$d(g(a), g(b)) = d(f(a), f(b)) < \varepsilon/3$$

である．よって

$$\begin{aligned} d(g(x), g(y)) &\leq d(g(x), g(a)) + d(g(a), g(b)) + d(g(b), g(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. 連続な拡張が存在すること．

(i) A の点列 $\{a_n\}$ が収束列であれば, Y の点列 $\{f(a_n)\}$ も収束列であることを示す. (一様連続性, 完備性どちらも必要.)
Y が完備なので $\{f(a_n)\}$ が基本列であることを示せばよい. $\varepsilon > 0$ とする. f は一様連続であるからある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $a, b \in A$ に対し, $d(a,b) < \delta$ ならば $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$ となる. $\{a_n\}$ は収束列なので基本列である. よって, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $m, n \geq N$ ならば $d(a_m, a_n) < \delta$ となる. よって, $m, n \geq N$ ならば $d(f(a_m), f(a_n)) < \varepsilon$.

(ii) A の収束列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ をみたせば, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$ であることを示す.
A の点列 $\{c_n\}$ を $c_{2k-1} = a_k$, $c_{2k} = b_k$ で定める. （つまり $\{c_n\}$ は $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ という点列である.）あきらかに $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ であり $\{c_n\}$ は収束列である. よって (i) より Y の点列 $\{f(c_n)\}$ も収束列である. $\{f(a_n)\}$, $\{f(b_n)\}$ はどちらも $\{f(c_n)\}$ の部分列であるからその極限点は $\lim_{n\to\infty} f(c_n)$ である（Lem. **??** 参照）.

(iii) 写像 $\bar{f}\colon A^a \to Y$ を次のように定める. $x \in A^a$ に対し, A の点列 $\{a_n\}$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ となるもの（が Thm. 2.11.4 により存在するのでそれ）をとり, $\bar{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ と定める. (i) よりこの極限は存在し, (ii) より x に収束する A の点列のとり方によらない.
$\bar{f}$ は（一様）連続であることを示そう.
$\varepsilon > 0$ とする. $f\colon A \to Y$ は一様連続であるからある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $a, b \in A$ に対し, $d(a,b) < 2\delta$ ならば $d(f(a), f(b)) < \varepsilon/2$ となる. $x, y \in A^a$, $d(x,y) < \delta$ とする. x に収束する A の点列 $\{a_n\}$ と y に収束する A の点列 $\{b_n\}$ をとる. $\bar{f}$ の定義より $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \bar{f}(x)$, $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \bar{f}(y)$ である. よってある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq N$ に対し, $d(a_n, x) < \delta/2$, $d(b_n, y) < \delta/2$, $d(f(a_n), \bar{f}(x)) < \varepsilon/4$, $d(f(b_n), \bar{f}(y)) < \varepsilon/4$ となる. $d(a_N, b_N) \leq d(a_N, x) + d(x,y) + d(y, b_N) < \delta/2 + \delta + \delta/2 = 2\delta$ であるから $d(f(a_N), f(b_N)) < \varepsilon/2$. よって $d(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leq d(\bar{f}(x), f(a_N)) + d(f(a_N), f(b_N)) + d(f(b_N), \bar{f}(y)) < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon$.

□

この定理の連続な拡張の一意性はもっと一般的な状況で成立する.

exercise 175. X, Y を位相空間, $A \subset X$ を稠密な部分集合, $f, g\colon X \to Y$ を連続写像で A 上一致する（すなわち任意の $a \in A$ に対し $f(a) = g(a)$ となる）ものとする.

1. Y が Hausdorff 空間であれば $f = g$ であることを示せ.

2. $f = g$ とはならないような（X, A, Y, f, g の）例を挙げよ．

連続な拡張の存在には一様連続性が必要である．

exercise 176. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とし, 写像 $f\colon \mathbb{R}^\times \to \mathbb{R}$ を $f(x) = 1/x$ で定める．

1. f は連続であることを示せ．
2. f を $\mathbb{R}$ まで連続に拡張することはできない, すなわち写像 $\bar{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\bar{f}|_{\mathbb{R}^\times} = f$ をみたせば f は連続ではないことを示せ．

また連続な拡張の存在には Y が完備であることも必要である．

exercise 177. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間, $A \subsetneq \mathbb{R}$ を稠密な部分集合とする．

1. A は連結ではないことを示せ．
2. 恒等写像 $1_A\colon A \to A$ を $\mathbb{R}$ まで連続に拡張することはできない, すなわち連続写像 $f\colon \mathbb{R} \to A$ で $f|_A = 1_A$ をみたすものは存在しないことを示せ．

集合 X からそれ自身への写像 $f\colon X \to X$ に対し, $f(x) = x$ となる点 $x \in X$ を f の不動点 (fixed point) または固定点という．不動点の存在に関するいろいろな定理が知られているが, 次はその一番簡単なもののひとつである．

Theorem 4.1.18 (縮小写像の原理 (contraction principle))**.** X を完備距離空間, $f\colon X \to X$ を縮小写像 (contraction map) , すなわち, ある $0 \leq \alpha < 1$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対し, $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ をみたす写像であるとする．このとき f はただひとつの不動点 $a \in X$ をもつ．さらに, 任意の $x \in X$ に対し $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = a$ である．

Proof. $x \in X$ をひとつとる．$x_n = f^n(x)$ により X の点列 $\{x_n\}$ を定める．$\{x_n\}$ は基本列であることを示そう．

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}, f(x_n))) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

だから $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x, x_1)$ である．$0 \leq \alpha < 1$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, N を十分大きくとれば $\alpha^N d(x, x_1)/(1-\alpha) < \varepsilon$ となる．$n > m \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \alpha^i d(x, x_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha^m - \alpha^n}{1-\alpha} d(x, x_1) \\
&\leq \frac{\alpha^N}{1-\alpha} d(x, x_1) < \varepsilon
\end{aligned}
$$

となり $\{x_n\}$ は基本列である．

X は完備ゆえ $\{x_n\}$ は収束する．f は縮小写像だから（一様）連続である．よって

$$
f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n
$$

となり $\lim_{n\to\infty} x_n$ は不動点である．すなわち，任意の $x \in X$ に対し，$\lim_{n\to\infty} f^n(x)$ が存在し，それは f の不動点である．

$a, b \in X$ を f の不動点とすると，

$$
d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq \alpha d(a, b)
$$

ゆえ $(1-\alpha)d(a, b) \leq 0$．$\alpha < 1$ に注意すると $d(a, b) = 0$．よって $a = b$． □

4.2　Baire の定理の応用例

この講義で証明をつけた定理のうち名前をつけて紹介した定理は, 中間値の定理（3.4.12）, Heine-Borel の定理（3.5.9,3.5.17）, Baire の稠密性定理（4.1.6）, 縮小写像の原理（4.1.18）の 4 つだけである. 名前がついているくらいだからどれも様々な応用をもつ重要な定理なのであるが, Baire の稠密性定理（Baire のカテゴリー定理とよばれることの方が多いかもしれない）をはじめて見たときはおそらく何がありがたいのやらさっぱり分からないのではないかと思う. よく知られた応用として関数解析学における開写像定理, 閉グラフ定理があるがこれらはこの講義で扱うには（準備もたくさん必要だし）ふさわしくない. ここでは以下の例を挙げよう. （おそらく Baire 本人による. [2] 参照.）

4.2.1　$\mathbb{R}$ が非可算集合であること

Proposition 4.2.1. $X \neq \emptyset$ を孤立点をもたない（すなわち, 1 点からなる部分集合は開集合ではない）完備距離空間とすると, X は集合として非可算集合である.

Proof. 仮定より 1 点からなる部分集合は全疎である. よって X の可算部分集合は第 1 類集合である. したがって Baire の定理より X は可算集合ではない. □

Corollary 4.2.2. $\mathbb{R}$ は非可算集合である. □

4.2.2　関数の連続点と不連続点

よく知られているように関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{p} & x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z},\ x - [x] = \frac{q}{p},\ p, q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ は互いに素} \end{cases}$$

(ただし $[x]$ は x を越えない最大の整数, すなわち $[x] \leq x < [x] + 1$ をみたすような整数) と定めると, f は全ての有理点で不連続, 全ての無理点で連続である.

では, 全ての有理点で連続, 全ての無理点で不連続な関数はあるのか？ というのは自然な疑問であろう.

Proposition 4.2.3. $\mathbb{R}$ 上定義された実数値関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が全ての有理点で連続であれば, f は稠密な無理点上で連続である. とくに, $\mathbb{R}$ 上定義された実数値関数で, 全ての有理点で連続であり, 全ての無理点で不連続であるようなものは存在しない.

Proof. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意の $r \in \mathbb{Q}$ で連続であるとする．

$\mathbb{Q}$ は可算集合であるから $\mathbb{N}$ との間に全単射が存在する．$\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ （ただし $i \neq j$ なら $r_i \neq r_j$）とする．

$n \in \mathbb{N}$ とする．f は $r_n \in \mathbb{R}$ で連続なので, ある正数 $\delta_n > 0$ が存在して次をみたす．

$$|x - r_n| < 2\delta_n \Rightarrow |f(x) - f(r_n)| < \frac{1}{2n} \tag{4.1}$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{R}$ の部分集合 U_n, O_n を以下で定める．

$$U_n = (r_n - \delta_n, r_n + \delta_n) \subset \mathbb{R}$$
$$O_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j - \{r_n\}$$

このとき O_n は $\mathbb{R}$ で稠密な開集合である．実際, 各 U_j は開区間であることから, O_n が開集合であることは明らか．また $O_n \supset \{r_j\}_{j>n}$ である．任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q}$ は無限集合であるから, $U_\varepsilon(x) \cap \{r_j\}_{j>n} \neq \emptyset$ である．したがって $\{r_j\}_{j>n}$ は $\mathbb{R}$ で稠密, よってそれを含む O_n も稠密である．

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \subset \mathbb{R}$$

とする．

$\mathbb{R}$ は完備であるから, Baire の定理より, C は $\mathbb{R}$ で稠密, 特に空ではない．

$a \in C$ とすると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a \in O_n$．よって $a \neq r_n$, $(\forall n \in \mathbb{N})$．すなわち $a \notin \mathbb{Q}$ である．よって $C \subset \mathbb{Q}^c$．

$a \in C$ とする．f は点 a で連続であることを示そう．$\varepsilon > 0$ とする．$\frac{1}{n} < \varepsilon$ となるような自然数 $n \in \mathbb{N}$ をひとつとる．$a \in C = \bigcap_{j=1}^{\infty} O_j$ だから

$$a \in O_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j - \{r_n\} \subset \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j$$

よって $N \geq n$ であるような自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$a \in U_N = (r_N - \delta_N, r_N + \delta_N)$$

このとき $|a - r_N| < \delta_N < 2\delta_N$ であるから, δ_N のとり方 (4.1) より

$$|f(a) - f(r_N)| < \frac{1}{2N} \tag{4.2}$$

$|x - a| < \delta_N$ とすると

$$|x - r_N| \leq |x - a| + |a - r_N| < \delta_N + \delta_N = 2\delta_N$$

であるから

$$|f(x) - f(r_N)| < \frac{1}{2N} \tag{4.3}$$

したがって

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f(r_N)| + |f(r_N) - f(a)| \\ &< \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

となり f は点 a で連続である．よって f は（$\mathbb{R}$ で稠密な, 無理数からなる集合）C 上連続である． □

4.3　完備化

Definition 4.3.1. X を距離空間とする．完備距離空間 $\hat{X}$ と, 距離を保つ写像 $i\colon X \to \hat{X}$ で, $i(X)$ が $\hat{X}$ で稠密であるようなものの組 $(\hat{X}, i)$ を距離空間 X の完備化 (completion) という．

しばしば i により X と $i(X) \subset \hat{X}$ を同一視して $X \subset \hat{X}$ とみなし, i を省略して $\hat{X}$ を X の完備化とよぶ.

この節で, 任意の距離空間に対し, その完備化が存在することの証明を 2 通り与えるが, その前に完備化の普遍性による特徴付けを与えておく.

Theorem 4.3.2. X を距離空間, Y を完備距離空間, $c\colon X \to Y$ を距離を保つ写像とする．このとき次は同値である.

1. (Y, c) は X の完備化である.
2. $c\colon X \to Y$ は次の普遍性をもつ：
   任意の完備距離空間 Z と, 任意の距離を保つ写像 $f\colon X \to Z$ に対し, 距離を保つ写像 $\hat{f}\colon Y \to Z$ で $\hat{f} \circ c = f$ をみたすものがただひとつ存在する.
3. $c\colon X \to Y$ は次の普遍性をもつ：
   任意の完備距離空間 Z と, 任意の一様連続写像 $f\colon X \to Z$ に対し, 一様連続写像 $\hat{f}\colon Y \to Z$ で $\hat{f} \circ c = f$ をみたすものがただひとつ存在する.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "f"] & \\
Y \arrow[r, dotted, "\hat{f}"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

Remark . 上記 3 については次の形で述べるべきかもしれない:

X を距離空間, Y を完備距離空間, $c\colon X \to Y$ を一様連続写像とする．このとき次は同値である.

1. Y に同じ（一様）位相を定める適当な距離をいれると (Y, c) は X の完備化となる.
2. $c\colon X \to Y$ は次の普遍性をもつ：
   任意の完備距離空間 Z と, 任意の一様連続写像 $f\colon X \to Z$ に対し, 一様連続写像 $\hat{f}\colon Y \to Z$ で $\hat{f} \circ c = f$ をみたすものがただひとつ存在する.

定理の証明の前に普遍性の帰結として一意性を示しておこう.

Corollary 4.3.3. 距離空間 X の完備化は次の意味で一意的である．$(\hat{X}, i)$, $(\bar{X}, j)$ をともに X の完備化とすると，距離空間としての同型写像（距離を保つ全単射）$f\colon \hat{X} \to \bar{X}$ で $f \circ i = j$ となるものがただひとつ存在する．

Proof. $i\colon X \to \hat{X}$, $j\colon X \to \bar{X}$ の普遍性より距離を保つ写像 $f\colon \hat{X} \to \bar{X}$, $g\colon \bar{X} \to \hat{X}$ で $f \circ i = j$, $g \circ j = i$ をみたすものがそれぞれただひとつ存在する．

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "j"'] \arrow[d, "i"] \arrow[dr, "j"] & \\
\bar{X} \arrow[r, dotted, "g"] \arrow[rr, bend right, "1_{\bar{X}}"'] & \hat{X} \arrow[r, dotted, "f"] & \bar{X}
\end{tikzcd}$$

$f \circ g, 1_{\bar{X}}\colon \bar{X} \to \bar{X}$ はどちらも距離を保つ写像であり，

$$\begin{aligned}(f \circ g) \circ j = f \circ (g \circ j) = f \circ i &= j, \\ 1_{\bar{X}} \circ j &= j\end{aligned}$$

となる．よって j の普遍性（このような写像はただひとつ）より $f \circ g = 1_{\bar{X}}$．同様にして $g \circ f = 1_{\hat{X}}$ が示せ，f は全単射（で，g がその逆写像）である． □

Proof of Thm. 4.3.2. 1⇒3) これは本質的には Thm. 4.1.17 である．$c\colon X \to Y$ を X の完備化とする．$j\colon c(X) \to Y$ を包含写像とし，c を

$$c = j \circ c'\colon X \xrightarrow{c'} c(X) \xrightarrow{j} Y$$

と分解する．c は距離を保つので $c'\colon X \to c(X)$ は距離空間としての同型写像である．その逆写像を $s\colon c(X) \to X$ とおく．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "c'"'] \arrow[dd, bend right=60, "c"'] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
c(X) \arrow[u, bend right, "s"'] \arrow[d, hook, "j"'] & \\
Y \arrow[r, dotted, "\hat{f}"'] & Z
\end{tikzcd}$$

Z を完備距離空間，$f\colon X \to Z$ を一様連続写像とする．s は距離を保つので $f \circ s\colon c(X) \to Z$ も一様連続である．$c(X)^a = Y$ であるから，Thm. 4.1.17 より，一様連続写像 $\hat{f}\colon Y \to Z$ で $\hat{f} \circ j = f \circ s$ となるものがただひとつ存在する．$\hat{f}$ は

$$\hat{f} \circ c = \hat{f} \circ j \circ c' = f \circ s \circ c' = f$$

をみたす．また, 一様連続写像 $g\colon Y \to Z$ が $g \circ c = f$ をみたせば,

$$g \circ j = g \circ j \circ c' \circ s = g \circ c \circ s = f \circ s$$

となり g は $f \circ s$ の連続な拡張である．よって拡張の一意性から $g = \hat{f}$.

3⇒2) Y が完備で, 距離を保つ写像 $c\colon X \to Y$ が 3 の普遍性をもつとする．

1. $c(X)^a = Y$ を示す．$j\colon c(X)^a \to Y$ を包含写像とし, c を

   $$c = j \circ c'\colon X \xrightarrow{c'} c(X)^a \xrightarrow{j} Y$$

   と分解する．Y が完備であるからその閉集合である $c(X)^a$ も完備であり, c が距離を保つので c' も距離を保ち, とくに一様連続である．よって c の普遍性から, 一様連続写像 $r\colon Y \to c(X)^a$ で $r \circ c = c'$ となるものが（ただひとつ）存在する．

   $$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "c"'] \arrow[d, "c'"] \arrow[dr, "c"] & \\ Y \arrow[r, dotted, "r"'] & c(X)^a \arrow[r, "j"'] & Y \end{tikzcd}$$

   $j\colon c(X)^a \to Y$ は包含写像だから距離を保ち一様連続である．よって Cor. 4.3.3 の議論と同様にして c の普遍性から $j \circ r = 1_Y$ がわかる．とくに包含写像 j が全射となるので $c(X)^a = Y$.

2. Z を完備距離空間, $f\colon X \to Z$ を距離を保つ写像とする．f は距離を保つので一様連続である．c の普遍性 3 から, 一様連続写像 $\hat{f}\colon Y \to Z$ で $\hat{i} \circ c = i$ となるものが（ただひとつ）存在する．

   $$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, dotted, "\hat{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

   $\hat{f}$ は連続であり, c,f が距離を保つので $\hat{f}|_{c(X)}$ は距離を保ち, $c(X)$ は Y で稠密であるから $\hat{f}$ は距離を保つ．

2⇒1) 上の証明の 1 と同様にして $c(X)^a = Y$ であることがわかる．　□

exercise 178. X, Y を距離空間, $A \subset X$, $f\colon A^a \to Y$ を連続写像, $f|_A$ は距離を保つとする．このとき f も距離を保つことを示せ．

以下, 完備化が存在することの証明を 2 通り与える．

Theorem 4.3.4. 任意の距離空間は完備距離空間に等長にうめこめる．すなわち，任意の距離空間 X に対し，完備距離空間 Z と等長写像 $i\colon X \to Z$ が存在する．

Proof. $X \neq \emptyset$ としてよい．$x_0 \in X$ をひとつ固定する．

$$F_0(X,\mathbb{R}) = \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{x\in X} |d_{x_0}(x) - f(x)| < \infty \right\}$$

とおくと，Ex. 2.14.5 と同様に

$$d_F(f,g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$

により $F_0(X,\mathbb{R})$ に距離 d_F を定めることができ（問題集 87(2) 参照），Ex. 4.1.16 と同様にして完備距離空間となることがわかる．ただし $d_{x_0}\colon X \to \mathbb{R}$ は $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$ で与えられる（一様連続）写像である．

任意の $x, y, z \in X$ に対し，Ex. 2.14.3 でみたように，

$$|d_x(z) - d_y(z)| = |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$$

であり，

$$|d_x(y) - d_y(y)| = |d(x,y) - d(y,y)| = d(x,y)$$

であるから

$$\sup_{z\in X} |d_x(z) - d_y(z)| = d(x,y)$$

となる．とくに任意の $x \in X$ に対し $\sup_{z\in X} |d_{x_0}(z) - d_x(z)| = d(x_0,x) < \infty$ だから $d_x \in F_0(X,\mathbb{R})$ であり，写像 $\delta\colon X \to F_0(X,\mathbb{R})$ を $\delta(x) = d_x$ で定めると，

$$d_F(\delta(x), \delta(y)) = d_F(d_x, d_y) = \sup_{z\in X} |d_x(z) - d_y(z)| = d(x,y)$$

となり δ は距離を保つ．$Z = F_0(X,\mathbb{R})$, $i = \delta$ とおけばよい． □

Corollary 4.3.5. 任意の距離空間 X に対し，その完備化が存在する．

Proof. $i\colon X \to Z$ を完備距離空間 Z への等長写像とする．$\hat{X} = i(X)^a \subset Z$ とおけば，$\hat{X}$ は完備距離空間の閉集合であるから完備であり，あきらかに $i(X)$ は $\hat{X}$ で稠密である．よって $(\hat{X}, i)$ は X の完備化である． □

exercise 179. X を位相空間，$A \subset B \subset X$ とする．このとき A が B で稠密であることと，A が部分空間 B で稠密であることは同値である（すなわち，A の X における閉包を A^a, B における閉包を $\bar{A}$ としたとき，$A^a \supset B \Leftrightarrow \bar{A} = B$）ことを示せ．

Cor. 4.3.5 の別の証明を与えよう．この証明のアイディアは, 基本列そのものをその列の極限だとみなすというものである．この構成法は確かめなくてはならないことが多いという欠点があるが, もとの距離空間がベクトル空間等の構造を持っている場合にその完備化に自然にその構造を拡張できるという利点がある．また同じ考え方により有理数体から実数体を構成できる．

Proof of Cor. 4.3.5 その２．X を距離空間とし, X の基本列全体のなす集合

$$\mathcal{X} = \left\{ \{x_n\} \in X^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \{x_n\} \text{ は } X \text{ の基本列} \right\}$$

を考える．$\mathcal{X}$ における関係 $\sim$ を

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0 \tag{4.4}$$

により定め, この同値関係による商集合を $\hat{X} = \mathcal{X}/\sim$, 基本列 $\{x_n\}$ の同値類を $[x_n]$ とかく．

$\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{X}$ に対し, 問題集 91(2) より

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$$

であるから, 実数列 $\{d(x_n, y_n)\}$ は基本列であり収束する．

$$\delta(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

と定める．$\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ ならば $\delta(\{x_n\}, \{y_n\}) = \delta(\{x'_n\}, \{y'_n\})$ であることが容易に確かめられる．よって $[x_n], [y_n] \in \hat{X}$ に対し, 実数 $\hat{d}([x_n], [y_h])$ を

$$\hat{d}([x_n], [y_h]) = \delta(\{x_n\}, \{y_n\})$$

により定めることができる．このようにして定めた

$$\hat{d}\colon \hat{X} \times \hat{X} \to \mathbb{R}$$

は $\hat{X}$ 上の距離関数となる．

写像 $i\colon X \to \hat{X}$ を, $x \in X$ を $x_n = x$ という定点列に移す写像とすると, あきらかに i は距離を保つ．

$i(X)$ が $\hat{X}$ で稠密であることを示す．$[x_n] \in \hat{X}$ とする．$\{x_n\}$ は X の基本列であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $m, n \geq N$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ となる．よって $m \geq N$ ならば

$$\hat{d}([x_n], i(x_m)) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

となり $i(x_m) \in \mathrm{U}_\varepsilon([x_n])$ である．よって $\lim_{m\to\infty} i(x_m) = [x_n]$，とくに $[x_n] \in i(X)^a$．したがって $i(X)$ は $\hat{X}$ において稠密である．

最後に $\hat{X}$ が完備であることを示す．$\{[x]_n\}$ を $\hat{X}$ の基本列，$\{x_{k,n}\}_{k\in\mathbb{N}}$ を $[x]_n$ をあらわす X の基本列とする．$i(X)$ は $\hat{X}$ で稠密なので，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$x_n \in X$ で $\hat{d}([x]_n, i(x_n)) < 1/n$ となるものをえらぶことができる．この点列 $\{x_n\}$ は X の基本列である．実際，$\varepsilon > 0$ とすると，$\{[x]_n\}$ は $\hat{X}$ の基本列であったから，ある自然数 $N \geq 3/\varepsilon$ が存在して，任意の $m, n \geq N$ に対し $\hat{d}([x]_m, [x]_n) < \varepsilon/3$ となる．任意の $k, m, n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{k,m}) + d(x_{k,m}, x_{k,n}) + d(x_{k,n}, x_n)$$

であるから，任意の $m, n \geq N$ に対し

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \lim_{k\to\infty} \left(d(x_m, x_{k,m}) + d(x_{k,m}, x_{k,n}) + d(x_{k,n}, x_n)\right) \\ &= \hat{d}(i(x_m), [x]_m) + \hat{d}([x]_m, [x]_n) + \hat{d}([x]_n, i(x_n)) \\ &< \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

この X の基本列 $\{x_n\}$ のあらわす $\hat{X}$ の点 $[x_n]$ を考える．x_n の選び方から $\lim_{k\to\infty} \hat{d}([x]_k, i(x_k)) = 0$ であり，また上でみたように $\lim_{k\to\infty} \hat{d}(i(x_k), [x_n]) = 0$ であるから

$$\lim_{k\to\infty} \hat{d}([x]_k, [x_n]) \leq \lim_{k\to\infty} \left(\hat{d}([x]_k, i(x_k)) + \hat{d}(i(x_k), [x_n])\right) = 0,$$

すなわち，$\{[x]_n\}$ は $[x_n]$ に収束する．よって $\hat{X}$ は完備である．　$\square$

exercise 180. 上の証明の詳細を練習問題としておく．

1. 関係 (4.4) は同値関係である．
2. $\{x_n\}, \{x'_n\}, \{y_n\}, \{y'_n\} \in \mathcal{X}$ に対し，$\{x_n\} \sim \{x'_n\}$，$\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ ならば $\delta(\{x_n\}, \{y_n\}) = \delta(\{x'_n\}, \{y'_n\})$ である．
3. $\hat{d}$ は $\hat{X}$ 上の距離関数である．

参考文献

[1] F. William Lawvere and Robert Rosebrugh. *Sets for mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[2] ウイリアムダンハム. 微積分名作ギャラリー - ニュートンからルベーグまで. 日本評論社, 2009.

[3] 高橋渉. 距離空間と位相空間 (数理解析入門シリーズ). 横浜図書, 10 2001.

[4] 齋藤正彦. 数学の基礎―集合・数・位相. 東京大学出版会, 2002.

[5] 小林貞一, 逸見豊. 集合と位相空間の基礎・基本 (理工系数学の基礎・基本). 牧野書店, 12 2010.

[6] 内田伏一. 集合と位相 (数学シリーズ). 裳華房, 1986.

[7] 琉球大学理学部数理科学科編. 位相空間問題集. http://math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/.

[8] 静間良次. 位相. サイエンス社, 1998.