

幾何学序論講義ノート

佃 修一

2013 年 4 月 10 日

凡例

- $\mathbb{N}$: 自然数全体

$\mathbb{Z}$: 整数全体

$\mathbb{Q}$: 有理数全体

$\mathbb{R}$: 実数全体

$\mathbb{C}$: 複素数全体

これらには, 必要ならば, 特にことわらないかぎり, 通常の加法, 乗法, 距離および ($\mathbb{C}$ を除いては) 順序を与えるものとする.

- $\mathbb{R}^n$ の距離あるいは位相は, 特にことわらないかぎり, ユークリッド距離により定まるものとする.

- $A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} B$ は, 左辺 A を右辺 B で定義することを意味する.

- $A \Rightarrow B$ は, A が成り立つならば B も成り立つことを意味する. (2011 年度の) 数学序論の講義での使い方とは意味が違うことに注意せよ. 数学序論でいうところの「 $A \Rightarrow B$ が真である」ことを, この講義では $A \Rightarrow B$ と表す.

目次

第 0 章	準備	1
0.1	デカルト積 (直積)	1
0.2	関係と写像	2
第 1 章	実数	5
1.1	全順序体	5
1.2	数列の収束	13
1.3	連続性の公理	22
1.4	上極限・下極限	27
第 2 章	距離空間	31
2.1	距離	31
2.2	開集合, 閉集合, 距離の定める位相	42
2.3	近傍	48
2.4	内部, 内点	51
2.5	閉包, 触点	54
2.6	集積点, 孤立点, 導集合	56
2.7	点列の収束	59
2.8	距離空間の間の連続写像	61
第 3 章	位相空間	65
3.1	位相空間	65
3.2	基本概念	68
3.3	近傍	72
3.4	内部, 閉包, 外部, 境界	74
3.5	稠密, 全疎	78
3.6	相対位相, 部分空間	81

3.7	連続写像	83
3.8	位相の基と準基	87
3.9	直積と直和	91
3.10	Hausdorff 空間	95
3.11	連結性	98
3.12	コンパクト空間	105
第 4 章	完備距離空間	113
4.1	完備性	113
4.2	Baire の定理の応用例	121
4.3	完備化	124
参考文献		131
索引		132

第 0 章

準備

0.1 デカルト積（直積）

Definition 0.1.1. 2つの対象 a, b に対し, それを順に並べて括弧でくくったもの (a, b) を a と b の じゅんじょつ順序対(ordered pair) という.

2つの順序対 $(a, b), (a', b')$ は, $a = a'$ かつ $b = b'$ であるときに等しいといって, $(a, b) = (a', b')$ と書く.

Remark . 2つの対象からなる集合 $\{a, b\}$ については, $\{a, b\} = \{b, a\}$ である. 一方, 順序対の場合, $a \neq b$ であれば, $(a, b) \neq (b, a)$ である.

Definition 0.1.2. X, Y を集合とする. 次で与えられる集合 $X \times Y$ を X と Y の デカルト積 (Cartesian product) という. デカルト積のことを直積ということも多い.

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \text{ かつ } y \in Y\}.$$

$X = Y$ のとき, $X \times X$ を X^2 と書くことが多い.

Example 0.1.3.

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3, 4\} = \{ & (1, 1), (2, 1), (3, 1), \\ & (1, 2), (2, 2), (3, 2), \\ & (1, 3), (2, 3), (3, 3), \\ & (1, 4), (2, 4), (3, 4)\} \end{aligned}$$

3つ以上の集合のデカルト積も考えることが出来る.

Definition 0.1.4. $n \in \mathbb{N}$ とし, $X_1, X_2, \dots, X_n$ を集合とする.

$(X_1 \times X_2) \times X_3$ を, $X_1 \times X_2 \times X_3$ と書く. また, $X_1 \times X_2 \times X_3$ の元は, $((x_1, x_2), x_3)$ とは書かずに, (x_1, x_2, x_3) と書く.

より一般に, 帰納的に

$$X_1 \times \cdots \times X_n := (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$$

と定める. また, $X_1 \times \cdots \times X_n$ の元は $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と書く.

$X_1 = \cdots = X_n = X$ であるとき, $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{n \text{ 個}}$ を X^n と書くことが多い.

0.2 関係と写像

Definition 0.2.1. X, Y を集合とする.

R が X と Y の間の二項関係 (binary relation) である

$\Leftrightarrow R$ が $X \times Y$ の部分集合である.

def

また, $(x, y) \in R$ であるとき, xRy と書く.

特に誤解が生じなければ二項関係のことを単に関係 (relation) という.

Remark. 一般に, n 個の集合 $X_1, X_2, \dots, X_n$ に対し, $X_1 \times \cdots \times X_n$ の部分集合のことを n 項関係 (n -ary relation) という.

Example 0.2.2. $X = Y = \mathbb{R}$ とする.

1.

$$\Delta = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

とすると, $x\Delta y \Leftrightarrow x = y$.

2.

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\} \subset \mathbb{R}^2$$

とすると, $xLy \Leftrightarrow x \leq y$.

3.

$$\Gamma = \{(x, 2x + 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

とすると, $x\Gamma y \Leftrightarrow y = 2x + 1$.

例 0.2.2 の最後の Γ は, 関数 $f(x) = 2x + 1$ のグラフである. 一般に関数が与えられるとそのグラフを作れるが, 逆にグラフが分かればもとの関数も分かる. そういう意味で, グラフを考えることと関数を考えることは同じである. 実は, 集合論的には, グラフの方が関数の本体であると考え.

Definition 0.2.3. X, Y を集合とする.

f が X から Y への写像 (map) である

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1. & f \text{ は } X \text{ と } Y \text{ の間の関係である.} \\ 2. & \text{任意の } x \in X \text{ に対し, ある } y \in Y \text{ がただひとつ存在して, } (x, y) \in f \text{ となる.} \end{cases}$$

f が X から Y への写像であることを, $f: X \rightarrow Y$ と表す. また $(x, y) \in f$ であるとき, y を $f(x)$ と書き, f による x の像 (image) という.

Remark. f を X から Y への写像とする. 定義より, $(x, y), (x, y') \in f$ ならば $y = y'$ である. したがって, 例 0.2.2.2 の L は写像ではない. 残りの 2 つは写像である.

Definition 0.2.4. X, Y を集合とする. X から Y への写像全体のなす集合を Y^X と表す.

$$Y^X = \{f \mid f \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への写像}\}.$$

第 1 章

実数

この章では実数について復習する．実数とはなにか？（いろいろな考え方があるが，現在最も標準的と思われる考え方では）連続性の公理をみたす全順序体を実数体といい，その元を実数という．

1.1 全順序体

Definition 1.1.1. $\mathbb{K}$ を集合とする． $\mathbb{K}$ に加法，乗法とよばれる二つの（二項）演算，すなわち

加法 $a, b \in \mathbb{K}$ に対し，その和とよばれる元 $a + b \in \mathbb{K}$ を対応させる $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ から $\mathbb{K}$ への写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array}$$

乗法 $a, b \in \mathbb{K}$ に対しその積とよばれる元 $a \cdot b$ を対応させる $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ から $\mathbb{K}$ への写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (a, b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

($a \cdot b$ を ab と書くことが多い)

が与えられていて以下の条件をみたすとき， $\mathbb{K}$ を（正確には $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ を）可換体 (commutative field)（あるいは単に体 (field)）という．

1. (結合律, associative law) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ に対し次が成り立つ．

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(ab)c = a(bc)$$

2. (可換律, commutative law) 任意の $a, b \in \mathbb{K}$ に対し次が成り立つ.

$$a + b = b + a$$

$$ab = ba$$

3. 加法に関する単位元 の存在

ある元 $0 \in \mathbb{K}$ が存在して, 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対して, $a + 0 = a$ となる.

4. 加法に関する逆元 の存在

任意の $a \in \mathbb{K}$ に対して, ある元 $b \in \mathbb{K}$ が (a に応じて) 存在して, $a + b = 0$ となる.

この b を a の加法に関する逆元といい $-a$ と書く.

5. (分配律, distributive law) 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ に対し次が成り立つ.

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

6. 乗法に関する単位元 の存在

ある元 $1 \in \mathbb{K}$ が存在して, 任意の $a \in \mathbb{K}$ に対して, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ となる.

7. 乗法に関する逆元 の存在

$a \neq 0$ ならば, ある元 $b \in \mathbb{K}$ が (a に応じて) 存在して, $ab = ba = 1$ となる.

b を a の乗法に関する逆元といい $1/a$ あるいは a^{-1} と書く.

可換体においては普通の数と同様な記法を用いることが多い. $a + (-b)$ を $a - b$, $a \cdot a$ を a^2 , $a + a$ を $2a$ といった具合である.

Remark. 乗法に関する可換性 ($ab = ba$) をのぞいた条件をみたすものを 体 (field) (あるいは 斜体 (skew field)) という.

可換体においては普通の数と同様な四則演算が出来る.

例えば, 任意の $a, b, c \in \mathbb{K}$ について

$$a + b = c \Leftrightarrow a = c - b$$

が成り立つ, つまり移項出来ることが以下のようにわかる.

$$\begin{aligned} (a + b) + (-b) &= a + (b + (-b)) && \text{(結合律)} \\ &= a + 0 && \text{(加法に関する逆元)} \\ &= a && \text{(加法に関する単位元)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

だから $a + b = c$ ならば

$$\begin{aligned} a &= (a + b) + (-b) \quad ((1.1) \text{ より}) \\ &= c + (-b) \quad (\text{仮定 } (a + b = c) \text{ より}) \\ &= c - b \end{aligned} \tag{1.2}$$

逆も同様. これを使うと

$$\begin{aligned} a \cdot 0 + a &= a \cdot 0 + a \cdot 1 \quad (\text{乗法に関する単位元}) \\ &= a \cdot (0 + 1) \quad (\text{分配律}) \\ &= a \cdot 1 \quad (\text{加法に関する単位元}) \\ &= a \quad (\text{乗法に関する単位元}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

に注意して

$$a \cdot 0 = a - a = 0$$

であることがわかる. また

$$(-1) \cdot a + a = a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 + (-1)) \cdot a = 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$$

より

$$(-1) \cdot a = 0 + (-a) = -a$$

つまり, 乗法に関する単位元 1 の加法に関する逆元と a との積が, a の加法に関する逆元になる.

exercise 1. $\mathbb{K}$ を可換体, $a, b, c \in \mathbb{K}$ とする. 次を示せ. ただし, 式変形の過程で上記 (1.1), (1.2), (1.3) のように何を使ったかを明示すること.

1. 加法, 乗法の単位元は一意的である.
2. 加法, 乗法の逆元は一意的である.
3. $(-a)(-b) = ab$.
4. $b \neq 0$ とする. このとき $ab = c \Leftrightarrow a = cb^{-1}$.

exercise 2. $\mathbb{K}$ を可換体とする. $1 = 0$ であれば $\mathbb{K} = \{0\}$ であることを示せ.

普通, 体を考えるときは $1 \neq 0$ を仮定する. 以下これを仮定する.

Definition 1.1.2. X を集合とする.

R が X における 関係 (relation) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R \subset X \times X$ (すなわち R は $X \times X$ の部分集合) .

$x, y \in X$ について, $(x, y) \in R$ であるとき, xRy と書く.

Example 1.1.3. $\mathbb{N}$ で自然数全体をあらわす. $\mathbb{N}$ における関係 R を

$$R = \{(m, n) \mid m \leq n\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

で定めると

$$mRn \Leftrightarrow (m, n) \in R \Leftrightarrow m \leq n.$$

Definition 1.1.4. X を集合とする. X における関係 $\leq$ が次の条件をみたすとき, この関係を順序 (order) あるいは半順序 (partial order) といい, 順序の与えられた集合を順序集合 (ordered set) あるいは半順序集合 (partially ordered set, poset) という.

$x, y, z \in X$ とする.

1. (反射律, reflexive law) $x \leq x$
2. (反対称律, antisymmetric law) $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば, $x = y$
3. (推移律, transitive law) $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば, $x \leq z$

集合 X における順序 $\leq$ がさらに次もみたすとき, この順序を全順序 (total order) あるいは線型順序 (linear order) という.

4. 任意の $x, y \in X$ に対し, $x \leq y$ か $y \leq x$ の少なくとも一方が必ず成立する.

Remark. 順序関係を表す記号として必ず $\leq$ を使うというわけではない.

この記号 $\leq$ を用いる場合, しばしば以下の記法が用いられる.

- $x \leq y$ のとき $y \geq x$ と書く.
- $x \leq y$ かつ $x \neq y$ のとき $x < y$ と書く.
- $x < y$ のとき $y > x$ と書く.

exercise 3. $x < y$ かつ $y \leq z$ ならば, $x < z$.

Definition 1.1.5. 可換体 $\mathbb{K}$ に全順序が与えられており以下の条件をみたすとき, $\mathbb{K}$ を全順序体 (totally ordered field) という.

1. $a \leq b$ ならば, 任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し $a + c \leq b + c$
2. $a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ ならば, $ab \geq 0$

Lemma 1.1.6. 全順序体 $\mathbb{K}$ においては次が成り立つ.

1. $a < b$ ならば, 任意の $c \in \mathbb{K}$ に対し $a + c < b + c$
2. $a > 0$ かつ $b > 0$ ならば, $ab > 0$

exercise 4. 上を示せ.

全順序体においては普通の数における不等式と同様な計算をすることが出来る.

Proposition 1.1.7. 全順序体 $\mathbb{K}$ においては次が成り立つ. $a, b, c \in \mathbb{K}$ とする.

1. $a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b - a$
2. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$
3. $a \geq 0 \Leftrightarrow -a \leq 0$
4. $a \leq b$ かつ $c \geq 0 \Rightarrow ac \leq bc$
5. $a^2 \geq 0$
6. $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$

exercise 5. 1. 上の 1~3 を示せ.

2. 上の 4~6 を示せ.

Proposition 1.1.8. $\mathbb{K}$ を全順序体とする. $a < b$ であるような任意の $a, b \in \mathbb{K}$ に対し, $a < c < b$ をみたす元 $c \in \mathbb{K}$ が無数に存在する.

Proof. $1 + 1$ を 2 と書く. $1 = 1^2 \geq 0$ かつ $1 \neq 0$ であるから $1 > 0$. 従って $2 = 1 + 1 > 0 + 1 = 1 > 0$, よって $2 > 0$, 特に $2 \neq 0$.

$$c = a + \frac{b - a}{2}$$

とおく.

$$c - a = \left(a + \frac{b - a}{2} \right) - a = \frac{b - a}{2} > 0.$$

また

$$b - c = b - a - \frac{b - a}{2} = \frac{b - a}{2} \cdot 2 - \frac{b - a}{2} \cdot 1 = \frac{b - a}{2} \cdot (2 - 1) = \frac{b - a}{2} > 0.$$

よって $a < c < b$.

a, c あるいは c, b に対して上の議論を適用すると無数にあることがわかる. $\square$

Remark. 全順序体の標数 は 0 である.

以下 $\mathbb{K}$ を全順序体とし, $\mathbb{K}$ の性質を調べる.

順序集合について少し言葉を用意する.

Definition 1.1.9. X を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. $m \in X$ が A の上界 (upper bound) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対し, $a \leq m$ が成り立つ.

2. $l \in X$ が A の 下界 (lower bound) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対し, $l \leq a$ が成り立つ.

Caution! . 上界, 下界とも1つだけというわけではない.

3. A が上界をもつとき A は 上に有界 (bounded from above) であるという.

A が下界をもつとき A は 下に有界 (bounded from below) であるという.

上にも下にも有界であるとき 有界 (bounded) であるという.

定義より「 A が有界 $\Leftrightarrow X$ の元 l, m が存在して, 任意の $a \in A$ について $l \leq a \leq m$ となる」ことがわかる.

Definition 1.1.10. X を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする.

$M \in X$ が A の 最大元 (maximum element) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & M \in A \\ \text{(ii)} & M \text{ は } A \text{ の上界である.} \\ & \text{すなわち } \forall a \in A : a \leq M \end{cases}$

このとき $M = \max_{a \in A} a = \max_A a = \max A$ 等と書く.

$m \in X$ が A の 最小元 (minimum element) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & m \in A \\ \text{(ii)} & m \text{ は } A \text{ の下界である.} \\ & \text{すなわち } \forall a \in A : m \leq a \end{cases}$

このとき $m = \min_{a \in A} a = \min_A a = \min A$ 等と書く.

Remark. $A \subset X$ の最大元 (最小元) は存在すれば一意的である. 実際, M_1, M_2 をともに A の最大元とすると定義より次が成り立つ.

(i1) $M_1 \in A$

(ii1) $\forall a \in A : a \leq M_1$

(i2) $M_2 \in A$

(ii2) $\forall a \in A : a \leq M_2$

(i1) と (ii2) より $M_1 \leq M_2$. 同様に $M_2 \leq M_1$. よって順序の性質より $M_1 = M_2$.

exercise 6. 1. B が有界で, $A \subset B$ ならば, A も有界.

2. X を全順序集合とする. A, B が有界ならば, $A \cup B$ も有界.

exercise 7. X を全順序集合, $A \subset X$ を有限部分集合とする. $A \neq \emptyset$ ならば, $\max A$, $\min A$ が存在することを, 帰納法を用いて示せ. また A が有限部分集合であるならば, A は有界であることを示せ.

exercise 8. $A \subset \mathbb{K}$ とする. $\max A = -\min\{-a \mid a \in A\}$ を示せ. (右辺または左辺が存在するとき, 他方も存在して互いに等しい.)

Definition 1.1.11. $a \in \mathbb{K}$ に対し

$$|a| := \max\{a, -a\} \in \mathbb{K}$$

を a の絶対値 (absolute value) という.

exercise 9. 次を示せ.

1. $|-a| = |a|$
2. $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$
 $a \leq 0 \Rightarrow |a| = -a$
3. $|a|^2 = a^2$
4. 任意の $a \in \mathbb{K}$ について $|a| \geq 0$ であり
 $|a| = 0$ となるのは $a = 0$ のときかつこれに限る.
5. $|ab| = |a| \cdot |b|$
6. $|a + b| \leq |a| + |b|$

exercise 10. $\mathbb{K}$ を全順序体, $A \subset \mathbb{K}$ とする. A が有界 $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{K}, \forall a \in A : |a| \leq M$.

Definition 1.1.12. $a, b \in \mathbb{K}, a \leq b$ に対し

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{K} \mid a \leq x \leq b\}$$

を a, b を端点とする閉区間 (closed interval) という.

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{K} \mid a < x < b\}$$

を a, b を端点とする开区間 (open interval) という.

Caution! . 开区間の記号 (a, b) は直積集合 $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ の元を表す記号と同じなので注意が必要であるが, 通常文脈からどちらの意味かは判断出来る.

exercise 11. $\max[a, b] = b, \min[a, b] = a$ を示せ.

Example 1.1.13. $\max(a, b), \min(a, b)$ はともに存在しない.

Proof. 実際, 任意の $x \in (a, b)$ について, x が最大元ではないことが以下のようにしてわかる. $x \in (a, b)$ ゆえ $a < x < b$. Prop. 1.1.8 より $x < c < b$ となるような元 $c \in \mathbb{K}$ が存

在する. $a < x$ なので $a < c$. よって $c \in (a, b)$ かつ $x < c$. よって x は最大元ではない.
最小元についても同様. $\square$

exercise 12. 最小元について示せ.

Definition 1.1.14. X を順序集合, $A \subset X$ とする.

1. A が上に有界であるとする. A の上界全体の集合に最小元が存在するときそれを A の 上限 (supremum) とよび

$$\sup_{a \in A} a \text{ または } \sup A$$

で表す. すなわち A の上界全体を

$$U_A := \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の上界}\}$$

とおくと, $\sup A = \min U_A$.

A が上に有界でないとき $\sup A = \infty$ と書く.

2. A が下に有界であるとする. A の下界全体の集合に最大元が存在するときそれを A の 下限 (infimum) とよび

$$\inf_{a \in A} a \text{ または } \inf A$$

で表す. すなわち A の下界全体を

$$L_A := \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の下界}\}$$

とおくと, $\inf A = \max L_A$.

A が下に有界でないとき $\inf A = -\infty$ と書く.

Remark. 上限, 下限ともに存在すれば一意的である.

Proposition 1.1.15. $\max A$ が存在すれば $\sup A = \max A$.

Proof. $M = \max A$ とする. A の上界全体のなす集合を U_A とかく.

最大元の定義 (ii) より M は A の上界である, すなわち $M \in U_A$.

また最大元の定義 (i) より $M \in A$. 従って, A の任意の上界 $m \in U_A$ に対し $M \leq m$.

よって $M = \min U_A$, すなわち A の上限である. $\square$

Proposition 1.1.16. X を全順序集合, $A \subset X$ とする.

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \text{任意の } a \in A \text{ に対し } a \leq s \\ \text{(ii)} & b < s \text{ ならば, ある } a \in A \text{ が存在して, } b < a \text{ となる.} \end{cases}$$

Caution! . この特徴づけは全順序集合でなければ一般には正しくない.

Proof. 条件 (i) は s が A の上界であることをいっている.

一方対偶を考えると条件 (ii) は「 b が A の上界ならば, $s \leq b$ 」と同値.

すなわち (i),(ii) は s が A の上界の最小元であることをいっている. $\square$

- exercise 13.** 1. 上の証明のどこで X が全順序集合であることを用いているか?
 2. * 一般の順序集合で Prop. 1.1.16 の $\Rightarrow$ か $\Leftarrow$ のどちらかは成り立つだろうか? 成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例を挙げよ.

Corollary 1.1.17. $A \subset \mathbb{K}$ とする.

$$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \text{任意の } a \in A \text{ に対し } a \leq s \\ \text{(ii)} & \text{任意の } \varepsilon > 0 \text{ に対し, ある } a \in A \text{ が存在して, } s - \varepsilon < a \text{ となる.} \end{cases}$$

exercise 14. Prop. 1.1.16 から Cor. 1.1.17 を導け.

exercise 15. 下限について Prop. 1.1.16, 1.1.15 に相当することを示せ.

Example 1.1.18. $a, b \in \mathbb{K}$, $a < b$, $A = (a, b) \subset \mathbb{K}$ とすると $\sup A = b$, $\inf A = a$ である.

Proof. $b = \sup A$ であることを, Prop. 1.1.16 を使って示そう.

$x \in A$ ならば $a < x < b$ であるから b は A の上界である. すなわち b は Prop. 1.1.16 の条件 (i) をみたす.

条件 (ii) を調べよう. $c < b$ とする. $d = \max\{a, c\}$ とおくと, $d < b$. よって Prop. 1.1.8 より $d < y < b$ となる $y \in \mathbb{K}$ が存在する. $a \leq d$ に注意すると $a < y < b$, すなわち $y \in A$ である. また $c \leq d$ であるから $c < y$. よって条件 (ii) も成り立っている. 従って $b = \sup A$.

$\inf A = a$ も同様. $\square$

exercise 16. $\inf(a, b) = a$ を示せ.

問題集 . 60(1)(2), 61(1)~(4), 62(1)(2) (実数全体 $\mathbb{R}$ は数の大小関係と四則演算により全順序体である.)

1.2 数列の収束

$\mathbb{K}$ を全順序体とする.

Definition 1.2.1. $a, b \in \mathbb{K}$ に対し $d(a, b) \in \mathbb{K}$ を

$$d(a, b) = |a - b|$$

で定める.

絶対値の性質 (exercise 9) より上で定めた $d: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ は次の 1~3 をみたすことがわかる.

1. (i) $d(a, b) \geq 0$ である.
(ii) $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.
2. $d(a, b) = d(b, a)$.
3. $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$.

exercise 17. これを示せ.

Definition 1.2.2. $a, \varepsilon \in \mathbb{K}$, $\varepsilon > 0$ ^{*1} に対して $\mathbb{K}$ の部分集合

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{K} \mid d(a, x) < \varepsilon\}$$

を a の ε 近傍 という.

exercise 18. $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ であることを示せ. ただし右辺は开区間である.

exercise 19. $A \subset \mathbb{K}$ とする. このとき A が有界 $\Leftrightarrow$ 『 $\forall x \in \mathbb{K}, \exists r > 0 : A \subset U_r(x)$ 』

Definition 1.2.3. 自然数全体 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{K}$ への写像

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$$

を 数列 という.

普通 $a(n)$ を a_n と書いて, 数列を $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とか $\{a_n\}$ と表す.

Caution! . 数列 $\{a_n\}$ と書いたときは記号 $\{\}$ は集合を表しているのではないことに注意する. 記号の濫用であるが, 通常文脈からどちらの意味であるかはわかる. わかりにくい場合はどちらであるか明記する.

例えば集合としては $\{(-1)^n\} = \{1, -1\} = \{(-1)^{n-1}\}$ であるが数列としては $\{(-1)^n\} \neq \{(-1)^{n-1}\}$ である.

Definition 1.2.4. 数列 $\{a_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき $a \in \mathbb{K}$ に収束する

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n \in U_\varepsilon(a)$ となる.

*1 以下このように書くときは ε が $\mathbb{K}$ の元であることを特に明示しない.

このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

あるいは

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty)$$

と書く.

a を数列 $\{a_n\}$ の極限值という.

数列 $\{a_n\}$ がある $a \in \mathbb{K}$ に収束するとき収束列という. 収束列でないときその数列は発散するという.

絶対値を使って書きかえると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : a_n \in U_\varepsilon(a) \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : d(a_n, a) < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon \end{aligned}$$

となる.

Definition 1.2.5. 数列 $\{a_n\}$ は, 任意の $L \in \mathbb{K}$ に対しある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n > L$ となるとき, 正の無限大に発散するといって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ と書く.

数列 $\{a_n\}$ は, 任意の $L \in \mathbb{K}$ に対しある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n < L$ となるとき, 負の無限大に発散するといって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ と書く.

exercise 20. 数列 $\{a_n\}$ が正または負の無限大に発散するとき, この数列は発散する (すなわち収束列ではない) ことを示せ.

exercise 21. 数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するとき $\{a_n\}$ は (集合として) 下に有界であり, 上には有界でない. また負の無限大に発散するときは, 上に有界であり, 下には有界ではない.

exercise 22. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = +\infty$.

Proposition 1.2.6. 数列 $\{a_n\}$ の極限值は, 存在すれば, 唯一つである.

Proof. $a \in \mathbb{K}$ を $\{a_n\}$ の極限值であるとする. $b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$ とする.

$$\varepsilon = d(a, b)/2 \text{ とおくと } \varepsilon > 0.$$

$$x \in U_\varepsilon(a) \Rightarrow d(x, a) < \varepsilon \Rightarrow d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \varepsilon + d(x, b) \Rightarrow$$

$d(x, b) > d(a, b) - \varepsilon = \varepsilon \Rightarrow x \notin U_\varepsilon(b)$ だから

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset.$$

今 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ であるから, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n \in U_\varepsilon(a)$ となる. 従って $n \geq N$ ならば $a_n \notin U_\varepsilon(b)$ となり b は $\{a_n\}$ の極限值ではない. $\square$

Definition 1.2.7. 数列 $\{a_n\}$ が コーシー (Cauchy) 列 である

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在して, $m, n \geq N$ ならば $d(a_m, a_n) < \varepsilon$ となる.

コーシー列のことを 基本列 ということもある.

Lemma 1.2.8. 収束列はコーシー列である.

Proof. $\{a_n\}$ を収束列とし, $a \in \mathbb{R}$ をその極限值とする.

任意の $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $d(a_n, a) < \varepsilon/2$ となる. よって $m, n \geq N$ ならば

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, a) + d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

となり $\{a_n\}$ はコーシー列である. $\square$

Remark. 実は $\mathbb{R}$ においてはコーシー列は収束列となっている. このことは次節で述べる.

Lemma 1.2.9. コーシー列は有界 (すなわち集合として $\{a_n\}$ が有界) である.

Proof. $\{a_n\}$ をコーシー列とする. このとき, ある自然数 N が存在して, $m, n \geq N$ ならば $d(a_m, a_n) < 1$ となる. (コーシー列の定義において $\varepsilon = 1$ とする. $1 > 0$ であることに注意.) 特に $n \geq N$ ならば $d(a_n, a_N) < 1$ すなわち $\{a_n\}_{n \geq N} \subset U_1(a_N)$ となり $\{a_n\}_{n \geq N}$ は有界 (exe.19). 集合として

$$\{a_n\} = \{a_1, \dots, a_{N-1}\} \cup \{a_n\}_{n \geq N}$$

であり $\{a_1, \dots, a_{N-1}\}$ は有限集合だから有界 (exe.7), よって $\{a_n\}$ も有界 (exe.6). $\square$

Corollary 1.2.10. 収束列は有界である.

Definition 1.2.11. 自然数列 $\{i_k\}$ すなわち写像 $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $i(k) = i_k$ は, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $i_k < i_{k+1}$ となっているとき 狭義単調増加自然数列 とよばれる.

$\{a_n\}$ を数列とする. a と狭義単調増加自然数列 i との合成によって得られる数列

$$a \circ i: \mathbb{N} \xrightarrow{i} \mathbb{N} \xrightarrow{a} \mathbb{K}$$

を $\{a_n\}$ の部分列といって $\{a_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{a_{i_k}\}$ 等と表す.

Lemma 1.2.12. 収束列の部分列は収束列であり, もとの数列と同じ値に収束する.

またコーシー列の部分列はコーシー列である.

Proof. $\{i_k\}$ が狭義増加自然数列であるとき, 任意の $k \in \mathbb{N}$ について $i_k \geq k$ であることが帰納法によりわかる.

$\{a_n\}$ を収束列, その極限値を a , $\{a_{i_k}\}$ を部分列とする. $a_n \rightarrow a$ であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $d(a_n, a) < \varepsilon$ となる. この N について, $k \geq N$ ならば $i_k \geq k \geq N$ であるから, $d(a_{i_k}, a) < \varepsilon$. すなわち $a_{i_k} \rightarrow a$ ($k \rightarrow \infty$).

コーシー列の方も同様. $\square$

exercise 23. $\{i_k\}$ が狭義増加自然数列であるとき, 任意の $k \in \mathbb{N}$ について $i_k \geq k$ であることを示せ.

exercise 24. コーシー列の場合について示せ.

数列の収束と全順序体の性質の関係を調べよう.

まず四則演算と極限値の関係.

Proposition 1.2.13. 二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束列ならば, $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ も収束列で,

$$\begin{aligned} 1. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ 2. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \end{aligned}$$

さらに $b_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ならば $\{a_n/b_n\}$ も収束列で

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

exercise 25. これを示せ.

次に順序と極限値の関係.

Proposition 1.2.14. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を収束列, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ とする. $\{c_n\}$ を数列とする.

1. 任意の自然数 N に対して $n_N \geq N$ となる自然数 n_N が存在して $a_{n_N} \leq b_{n_N}$ となるならば, $a \leq b$ である.

特に, ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $a_n \leq b_n$ であるとする, $a \leq b$ で

ある.

2. $a = b$ とする. ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $a_n \leq c_n \leq b_n$ であるとする, $\{c_n\}$ も収束して $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ である.

Proof. 1. 対偶, すなわち『 $a > b$ ならば, ある自然数 N が存在して, 任意の $n \geq N$ に対し $a_n > b_n$ となる』ことを示そう. $a > b$ とする. $\varepsilon = a - b$ とおけば $\varepsilon > 0$. Prop. 1.2.13.1 より数列 $\{a_n - b_n\}$ は収束列で $a - b$ に収束するので, ある自然数 N が存在して, 任意の $n \geq N$ に対し $a_n - b_n \in U_\varepsilon(a - b) = (0, 2a - 2b)$, 特に $a_n - b_n > 0$ となる.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ であるから, 任意の正の数 ε に対してある自然数 N_0 が存在して $n \geq N_0$ ならば $a_n, b_n \in U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ となる. 特に $a - \varepsilon < a_n, b_n < a + \varepsilon$. ゆえに $n \geq \max\{N, N_0\}$ ならば $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$ すなわち $c_n \in U_\varepsilon(a)$.

□

exercise 26. 『任意の自然数 M に対して $n_M \geq M$ となる自然数 n_M が存在して $a_{n_M} \leq b_{n_M}$ である』 $\Leftrightarrow$ 『無限個の n に対して $a_n \leq b_n$ である』.

exercise 27. 『ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n \leq b_n$ である』 $\Leftrightarrow$ 『有限個の n を除いて $a_n \leq b_n$ である』.

Remark. 『有限個を除いて』という表現は数学でときおり使われる. 『有限個の n を除いて $a_n \leq b_n$ である』というのは, 『 $a_n \leq b_n$ でない n は有限個である』, つまり『 $a_n > b_n$ となる n は有限個である』ということ.

また, 『有限個』といったときは普通, 0 個も含む.

exercise 28. 1. 『ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n \leq b_n$ である』 $\Rightarrow$ 『任意の自然数 M に対して $n_M \geq M$ となる自然数 n_M が存在して $a_{n_M} \leq b_{n_M}$ である』.

2. 上で, 逆は一般には成立しない. 逆が成立しない数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の例を挙げよ.

exercise 29. Prop. 1.2.14.2 の仮定を 1.2.14.1 のように弱めることは出来ない. 反例を挙げよ. $\{c_n\}$ が収束列の場合はどうか.

Definition 1.2.15. 数列 $\{a_n\}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) となっているとき (狭義) 単調増加列とよばれる.

また任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \geq a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) となっているとき (狭義) 単調減少列とよばれる.

これらをまとめて単調列という.

Lemma 1.2.16. $\{a_n\}$ を単調増加列とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \sup a_n$ のいずれかが存在すれば, 他方も存在してそれらは等しい.

単調減少列の極限值と下限についても同様.

Proof. $\{a_n\}$ が収束列でその極限値が a であるとき, $a = \sup a_n$ であることを示す.

$N \in \mathbb{N}$ とする. 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_N$ で定めると明らかに $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a_N$ である. $\{a_n\}$ は単調増加列であるから, $n \geq N$ ならば $a_n \geq a_N = b_n$. よって Prop. 1.2.14.1 より $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a_N$. 従って任意の $N \in \mathbb{N}$ について $a \geq a_N$, すなわち a は $\{a_n\}$ の上界である.

b を $\{a_n\}$ の上界とする. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \leq b$ である. よって先と同様に Prop. 1.2.14.1 より $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq b$.

よって a は $\{a_n\}$ の上界の最小値, すなわち $a = \sup a_n$ である.

逆に $\sup a_n$ が存在するとしてそれを a とする.

a は $\{a_n\}$ の上界であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a \geq a_n$ である.

また任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 N が存在して $a_N > a - \varepsilon$ となる (Cor. 1.1.17). $\{a_n\}$ は単調増加であるから $n \geq N$ ならば $a_n \geq a_N$.

以上をあわせると, $n \geq N$ ならば $a - \varepsilon < a_n \leq a$, 特に $a_n \in U_\varepsilon(a)$. 従って数列 $\{a_n\}$ は a に収束する. $\square$

ここまで, 全順序体における数列の極限について調べてきたが, 収束列あるいは発散列の具体例をひとつも挙げていない. 単に全順序体というだけでは, 定数列といった自明なもの以外の例を作るのはやさしくない.

Definition 1.2.17. $\mathbb{K}$ を全順序体とする. $n \in \mathbb{Z}$ と $a \in \mathbb{K}$ に対し $na \in \mathbb{K}$ を

$$na = \begin{cases} \overbrace{a + \cdots + a}^n, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -\underbrace{(a + \cdots + a)}_{-n}, & n < 0 \end{cases}$$

で定める.

Remark. $n < 0$ とする. このとき $-n > 0$ であり,

$$\begin{aligned} \overbrace{a + \cdots + a}^{-n} &= (-n)a \\ -\underbrace{(a + \cdots + a)}_{-n} &= \underbrace{(-a) + \cdots + (-a)}_{-n} \end{aligned}$$

であるから, $na = -((-n)a) = (-n)(-a)$ である. ($n \geq 0$ のときもこの等式が成り立つことが, 定義から直接, あるいは $-n$ や $-a$ を考えることで容易にわかる.)

任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ と任意の $a, b \in \mathbb{K}$ に対し次が成り立つ.

1. $n(a + b) = na + nb$.
2. $(m + n)a = ma + na$.
3. $(mn)a = m(na)$.
4. $1a = a$.
5. $n(ab) = (na)b$

exercise 30. これを示せ. (Hint: いずれも場合分けが必要であるが, 適当に変形していくつかの場合を他の場合に帰着できる. 例えば 1 では $n < 0$ の場合は移項することで $n > 0$ の場合に帰着できる. 2, 3 は場合分けがちょっと大変だが mn の正負に注目すると少し見やすいかもしれない. 2 は $m \leq n$ と仮定できることに注意.)

Remark . $\mathbb{K}$ は加法に関して加群 である. 任意の加群はこれと同様にして $\mathbb{Z}$ 加群とみることが出来る.

exercise 31. $\mathbb{K}$ を全順序体, $1_K \in \mathbb{K}$ を乗法に関する単位元とする. 写像 $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$ を $i(n) = n1_K$ により定める. $m, n \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{K}$ であるとき, 次を示せ.

1. $n > 0$ かつ $a > 0$ ならば $na > 0$.
2. $m < n$ ならば $i(m) < i(n)$ である. 特に i は単射である.
3. $i(n) \cdot a = na$.
4. $i(m + n) = i(m) + i(n)$.
5. $i(mn) = i(m) \cdot i(n)$.
6. $i(1) = 1_K$.

この写像 i により $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$ とみなし, $i(n) = n1_K \in \mathbb{K}$ を n とかく.

Remark . この写像 i は, 自然に $\mathbb{Q}$ に拡張され, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$ とみなすことが出来る.

さて, 全順序体 $\mathbb{K}$ において $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ が成り立つであろうか. 実はこれは無条件に成り立つわけではない.

Definition 1.2.18. $\mathbb{K}$ を全順序体とする. $\mathbb{K}$ が次の性質 (アルキメデスの公理) をみたすとき, $\mathbb{K}$ はアルキメデス的であるという.

- 任意の $a > 0, b > 0$ に対してある自然数 n が存在して $na > b$ となる.

Lemma 1.2.19. K を全順序体とする. 次は同値である.

1. $\mathbb{K}$ はアルキメデス的である.
2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{K}$ は上に有界でない.
3. 任意の $\varepsilon > 0$ に対してある自然数 n が存在して $1/n < \varepsilon$ となる.

Proof. $1 \Rightarrow 2)$ アルキメデスの公理において $a = 1$ とすればよい.

$2 \Rightarrow 3)$ $0 < \varepsilon \in \mathbb{K}$ とする. $\varepsilon \neq 0$ ゆえ逆元 $1/\varepsilon$ が存在する. $\mathbb{N}$ が有界ではないので $n \in \mathbb{N}$ で, $1/\varepsilon < n$ となるものが存在する. $n, \varepsilon > 0$ なので $1/n < \varepsilon$.

$3 \Rightarrow 1)$ $a, b \in \mathbb{K}$, $a > 0$, $b > 0$ とする. $a/b > 0$ である. 仮定よりある自然数 n が存在して $1/n < a/b$ となる. $n, b > 0$ ゆえ $na > b$. $\square$

Example 1.2.20. 有理数体 $\mathbb{Q}$ はアルキメデス的である.

Remark. アルキメデス的ではない全順序体の例が [4] にある.

Corollary 1.2.21. $\mathbb{K}$ をアルキメデス的全順序体とする.

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2.

$$|a| < 1 \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0.$$

Proof. 1. Lemma 1.2.19 よりすぐわかる.

2. $a = 0$ のときは明らかなので $a \neq 0$ とする. $1/|a| > 1$ であるから $h = 1/|a| - 1$ とおくと $h > 0$.

$$(1+h)^n = \sum_{j=0}^n {}_n C_j h^j \geq nh > 0$$

であるから

$$(1+h)^{-n} \leq \frac{1}{nh}$$

$$0 < |a|^n = (1+h)^{-n} \leq \frac{1}{h} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Prop. 1.2.14 より $|a|^n \rightarrow 0$.

$\square$

exercise 32. 1. 上の 1 を示せ.

2. $\mathbb{K}$ を可換体, $a, b \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ とする. このとき二項定理

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n {}_n C_j a^j b^{n-j}$$

が成り立つことを示せ.

exercise 33. $\mathbb{K}$ を全順序体とする. 次の条件は同値であることを示せ.

1. $\mathbb{K}$ はアルキメデスのである.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$.

exercise 34. 以下の議論は正しいか?

$\mathbb{K}$ を (アルキメデスのとは限らない) 全順序体とする. $\mathbb{K}$ の数列 $\{a_n\}$ を

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n}, \quad a_{2n} = -\frac{1}{n}$$

で定める. 任意の自然数 N に対し $2N-1 \geq N$ かつ $a_{2N-1} \geq 0$ であるから, Prop. 1.2.141 より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$. 同様に $2N \geq N$ かつ $a_{2N} \leq 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq 0$. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 従って部分列 $\{a_{2n-1}\}$ を考えると Lemma 1.2.12 より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

問題集 . 60(3)(4) ($\mathbb{R}$ はアルキメデスのである.)

1.3 連続性の公理

ここまでの議論は (アルキメデスの) 全順序体において成立するものであった. 例えば有理数体 $\mathbb{Q}$ において成立する.

実数を特徴づけるのが連続性の公理である. 連続性の公理としてよく採用されるものとしてデデキントによるものとカントールによるものがある. ここではカントールによるものを採用しデデキントの公理にはふれない.

Definition 1.3.1. 次の連続性の公理 をみたす全順序体を実数体 とよび $\mathbb{R}$ であらわす. 実数体の元を実数という.

- C 1 (連続性の公理).**
1. 任意のコーシー列は収束列である.
 2. アルキメデスのである.

Remark . “普通の” 集合論のもと, 適当な意味でただひとつだけ, 実数体が存在することが示せる.

C1.1 の性質を $\mathbb{R}$ は距離に関して完備 (complete) であるという. 数列の収束の定義には極限値がふくまれている. すなわち定義からある数列が収束するかどうかを判定するためには極限値を知らなければならない. しかしそれがコーシー列であるかどうかは数列の

みからわかる. $\mathbb{R}$ は完備であるのでコーシー列は収束する. 従ってコーシー列かどうかで収束性を判定することが出来る.

全順序体において連続性の公理と同値である条件がいろいろと知られている.

Theorem 1.3.2. 全順序体 $\mathbb{K}$ において, 以下の条件 C2~C7 はいずれも連続性の公理 C1 と同値である.

C 2. 空でない部分集合が上に有界ならば上限が存在する.

C 3. 空でない部分集合が下に有界ならば下限が存在する.

C 4. 上に有界な単調増加数列は収束列である.

C 5. 下に有界な単調減少列は収束列である.

C 6. 1. アルキメデス的である.

2. 有界な閉区間 (空でない) の列 $I_1, I_2, \dots$ があって $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$ ならば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

C 7 (ボルツァノ・ワイエルシュトラス, Bolzano-Weierstrass). 有界な数列は収束する部分列を含む.

Remark. Cor. 1.2.10 で全順序体における収束列は有界であることを示した. もちろん逆は成り立たない, つまり有界な数列ならば収束列であるということはいえない. しかし C7 より, $\mathbb{R}$ においては有界な数列は収束する部分列を含むことがいえる.

この Thm. 1.3.2 を $C1 \Rightarrow C2 \Rightarrow C4 \Rightarrow C6 \Rightarrow C7 \Rightarrow C1$ という順に示していこう.

以下 $\mathbb{K}$ を全順序体とする.

Lemma 1.3.3. $C1 \Rightarrow C2$.

Proof. $A \subset \mathbb{K}$ を上に有界な空でない部分集合とする. A は上に有界であるから U_A を A の上界全体とすると $U_A \neq \emptyset$. $a \in A$ をひとつとる. $a \in U_A$ であれば $a \in A \cap U_A$ すなわち $a = \max A$ であるので Prop. 1.1.15 より a は A の上限となる.

$a \notin U_A$ の場合を考える. $b \in U_A$ をひとつとる.

2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を帰納的に以下のように定める. $a_1 = a, b_1 = b$ とする. a_n, b_n まで決まったとして, a_{n+1}, b_{n+1} を

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (\frac{a_n+b_n}{2}, b_n), & \frac{a_n+b_n}{2} \notin U_A \\ (a_n, \frac{a_n+b_n}{2}), & \frac{a_n+b_n}{2} \in U_A \end{cases}$$

で定める. $a_1 = a < b = b_1$ と $a_1 = a \notin U_A, b_1 = b \in U_A$ であることに注意すると帰納的に $\{a_n\}$ は単調増加, $a_n \notin U_A$, $\{b_n\}$ は単調減少, $b_n \in U_A, a_n < b_n$, $b_n - a_n = (b - a)/2^{n-1}$ であることがわかる.

$m \geq n$ ならば $a_n \leq a_m < b_m \leq b_n$ なので

$$|a_m - a_n| = a_m - a_n < b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}}$$

$$|b_m - b_n| = b_n - b_m < b_n - a_n = \frac{b - a}{2^{n-1}}$$

となる. $\mathbb{R}$ はアルキメデスの (C1.2) であるから, Cor. 1.2.21 より $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/2^{n-1} = 0$ である. これより $\{a_n\}, \{b_n\}$ はコーシー列であることがわかる.

従って C1.1 により $\{a_n\}, \{b_n\}$ は収束列であり $b_n - a_n \rightarrow 0$ であるからその極限値は等しい. この極限値を α とする. $\alpha = \sup A$ であることを示す.

$x \in A$ とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, b_n は A の上界であるから $x \leq b_n$. $b_n \rightarrow \alpha$ であるから Prop. 1.2.14 より $x \leq \alpha$. すなわち α は A の上界である.

s を A の上界とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について, a_n は A の上界ではないので $a_n < s$ である. (実際 $a_n \geq s$ ならば明らかに a_n は A の上界. よって $a_n \not\geq s$. $\mathbb{R}$ の順序は全順序である.) $a_n \rightarrow \alpha$ であるから $\alpha \leq s$

従って α は A の上界の最小値すなわち A の上限である. □

exercise 35. 1. この証明で定義した数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ について, $\{a_n\}$ は単調増加, $a_n \notin U_A$, $\{b_n\}$ は単調減少, $b_n \in U_A, a_n < b_n, b_n - a_n = (b - a)/2^{n-1}$ であることを示せ.

2. $\{a_n\}, \{b_n\}$ がコーシー列であるのはなぜか.

Lemma 1.3.4. C2 $\Leftrightarrow$ C3.

exercise 36. 1. $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ とする. $\inf A = -\sup\{-x \mid x \in A\}$ を示せ. (右辺または左辺が存在するとき, 他方も存在して互いに等しい.)

2. これを用いて Lemma 1.3.4 を示せ.

Lemma 1.3.5. C2 $\Rightarrow$ C4.

Proof. C2 を仮定すると, Lemma 1.2.16 より明らかに C4 が成り立つ. □

Lemma 1.3.6. C4 $\Leftrightarrow$ C5.

exercise 37. Lemma 1.3.6 を示せ. (数列 $\{a_n\}$ と $\{-a_n\}$ を考えよ.)

Lemma 1.3.7. C4 $\Rightarrow$ C6.

Proof. 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ が上に有界でないことを示せばよい. 背理法で示そう. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ が上に有界であるとする. $\mathbb{R}$ の数列 $\{n\}$ を考えると, 上に有界であり, $(n+1)-n=1 > 0$ ゆえ単調増加. 従って C4 からこれは収束列である. 極限値を α とする. $1 > 0$ であるから, ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $n \in U_1(\alpha) = (\alpha-1, \alpha+1)$ となる. とくに $\alpha-1 < N$ であるから $\alpha+1 = (\alpha-1) + 2 < N+2$ となり, $N+2 \notin U_1(\alpha)$ となって矛盾.

2. $I_n = [a_n, b_n]$ とすると $I_n \supset I_{n+1}$ であるから $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ となる. よって数列 $\{a_n\}$ は単調増加であり, 上界 b_1 を持つので上に有界, 数列 $\{b_n\}$ は単調減少であり, 下界 a_1 を持つので下に有界. C4 ($\Leftrightarrow$ C5) より $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに収束する. 極限値をそれぞれ a, b とする. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq b_n$ であるから $a \leq b$, とくに $[a, b] \neq \emptyset$ である. また Lem. 1.2.16 より $a = \sup a_n, b = \inf b_n$ であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq a, b \leq b_n$ すなわち $I_n \supset [a, b]$. 従って

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \supset [a, b] \neq \emptyset.$$

実はこのとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [a, b]$$

となっていることがわかる. なぜなら任意の $n \in \mathbb{N}$ について $a_n \leq c \leq b_n$ ならば $a = \sup a_n \leq c \leq \inf b_n = b$, よって

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \subset [a, b].$$

□

Lemma 1.3.8. 全順序体 $\mathbb{R}$ の閉区間の減少列 $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots, (I_n = [a_n, b_n])$ があり, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$ かつ $b_n - a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) であるならば共通部分はただ一点

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$$

であり $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$.

Proof. $\alpha \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ とすると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \leq \alpha \leq b_n$ である. $0 \leq \alpha - a_n \leq b_n - a_n \rightarrow 0$ であるから, $\alpha - a_n \rightarrow 0$. よって $a_n \rightarrow \alpha$. 同様に $b_n \rightarrow \alpha$ がわかる. また極限値の一意性 (Prop. 1.2.6) から $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{\alpha\}$ である. $\square$

Lemma 1.3.9. C6 $\Rightarrow$ C7.

Proof. $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ を有界な数列とすると, ある $M, m \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $m \leq a_n \leq M$ となる. $I = [m, M]$ とおけば $a(\mathbb{N}) \subset I$ である. I を中点で二分してえられる閉区間 $[m, \frac{m+M}{2}]$, $[\frac{m+M}{2}, M]$ を考える.

$$\mathbb{N} = a^{-1}(I) = a^{-1}\left(\left[m, \frac{m+M}{2}\right]\right) \cup a^{-1}\left(\left[\frac{m+M}{2}, M\right]\right)$$

であるから $a^{-1}\left(\left[m, \frac{m+M}{2}\right]\right)$, $a^{-1}\left(\left[\frac{m+M}{2}, M\right]\right)$ の少なくとも一方は無有限集合. 無限集合である方をひとつ選びそれを $I_1 = [m_1, M_1]$ とする.

$$I \supset I_1, \quad M_1 - m_1 = \frac{M - m}{2}.$$

以下この操作を繰り返して帰納的に閉区間の列 $I_k = [m_k, M_k]$ で

$$I_k \supset I_{k+1}, \quad M_k - m_k = \frac{M - m}{2^k}, \quad \#a^{-1}(I_k) = \infty$$

となるものがえられる.

$\mathbb{R}$ はアルキメデス的である (C6.1) から Cor. 1.2.21 より $M_k - m_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) である. また C6.2 より $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset$ である. よって Lem. 1.3.8 よりある $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{\alpha\}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k = \alpha$$

となる.

自然数列 $i: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を帰納的に以下のように定義する.

$i(1) = \min(a^{-1}(I_1))$ とおく. $i(k-1)$ まで定義されたとして

$$i(k) = \min(a^{-1}(I_k) \setminus \{i(1), \dots, i(k-1)\})$$

とおく. $(i(k))$ は, $a_n \in I_k$ となるような n のうち, $i_1, \dots, i_{k-1}$ を除いた中で最小のもの. $a^{-1}(I_k) \subset \mathbb{N}$ は無限集合であるから $a^{-1}(I_k) \setminus \{i(1), \dots, i(k-1)\} \neq \emptyset$ となりこの最小値は存在する. $I_k \subset I_{k-1}$ であるから

$$\begin{aligned} i(k) &\in a^{-1}(I_k) \setminus \{i(1), \dots, i(k-1)\} \\ &\subset a^{-1}(I_{k-1}) \setminus \{i(1), \dots, i(k-1)\} \\ &\subset a^{-1}(I_{k-1}) \setminus \{i(1), \dots, i(k-2)\} \end{aligned}$$

であり,

$$i(k-1) = \min(a^{-1}(I_{k-1}) \setminus \{i(1), \dots, i(k-2)\})$$

ゆえ $i(k) \neq i(k-1)$ かつ $i(k-1) \leq i(k)$. すなわち $i(k-1) < i(k)$. よって i は狭義単調増加自然数列となり i と a の合成によって $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{i(k)}\}$ がえられる. $i(k) \in a^{-1}(I_k)$ なので $a_{i(k)} = a(i(k)) \in I_k$ すなわち $m_k \leq a_{i(k)} \leq M_k$ である. $m_k \rightarrow \alpha$ かつ $M_k \rightarrow \alpha$ であるから $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{i(k)} = \alpha$ となり $\{a_{i(k)}\}$ は収束列である. $\square$

Lemma 1.3.10. C7 $\Rightarrow$ C1.

Proof. 1. $\{a_n\}$ をコーシー列とする. Lem.1.2.9 により $\{a_n\}$ は有界である. 従って C7 により $\{a_n\}$ は収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ を含む. その極限値を a とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対しある自然数 N_1 が存在して $k \geq N_1$ ならば $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ となる. また $\{a_n\}$ はコーシー列であるから, ある自然数 N が存在して $m, n \geq N$ ならば $|a_m - a_n| < \varepsilon$ となる. $k_0 = \max\{N_1, N\}$ とおく. このとき $k_0 \geq N_1$ かつ $n_{k_0} \geq N$ である. よって $n \geq N$ ならば

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となる. 従って a は $\{a_n\}$ の極限値であり $\{a_n\}$ は収束列である.

2. 背理法を用いて Lem. 1.3.7 と同様に示される.

$\square$

exercise 38. 上の証明の 2 を仕上げよ.

以上により全順序体においては, これらの条件は同値であることがわかった. この他にも同値な条件はいろいろ知られている. デデキントの切断の公理もこれらと同値である.

また連続性の公理をみたす全順序体は本質的にひとつしかない (全て同型である) ことが知られている. (cf. [1], [4])

1.4 上極限・下極限

Definition 1.4.1. $\{a_n\}$ を数列とする.

1. $\{a_n\}$ が上に有界のとき.

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\{a_i | i \geq n\}$ も上に有界であるから上限 $\bar{a}_n := \sup\{a_i | i \geq n\}$ が存在する. この数列 $\{\bar{a}_n\}$ の下限を数列 $\{a_n\}$ の上極限といい, $\limsup a_n$ あるいは $\overline{\lim} a_n$ と書く. すなわち

$$\limsup a_n = \inf\{\bar{a}_n\} = \inf\{\sup\{a_i | i \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$\{a_n\}$ が上に有界でないとき.

このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\bar{a}_n = \sup\{a_i | i \geq n\} = +\infty$ となる. なぜなら, ある $n \in \mathbb{N}$ に対し $\bar{a}_n < \infty$ とすると $i \geq n$ ならば $a_i \leq \bar{a}_n$ であるから

$$\{a_n\} = \{a_1, \dots, a_{n-1}\} \cup \{a_i | i \geq n\}$$

は上に有界.

このとき $\limsup a_n = +\infty$ と定める.

2. $\{a_n\}$ が下に有界のとき.

数列 $\{a_n\}$ を $\underline{a}_n := \inf\{a_i | i \geq n\}$ で定め, この数列の上限を数列 $\{a_n\}$ の下極限といい, $\liminf a_n$ あるいは $\underline{\lim} a_n$ と書く. すなわち

$$\liminf a_n = \sup\{\underline{a}_n\} = \sup\{\inf\{a_i | i \geq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

$\{a_n\}$ が下に有界でないとき.

$\liminf a_n = -\infty$ と定める.

明らかに任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n$ であることに注意する.

Remark. $\{a_n\}$ が上に有界でない $\Leftrightarrow \limsup a_n = \infty$, 下に有界でない $\Leftrightarrow \liminf a_n = -\infty$ となっている.

Proposition 1.4.2. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界のとき, $\{\bar{a}_n\}$ は単調減少列であり $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \limsup a_n$ である.

数列 $\{a_n\}$ が下に有界のとき, $\{\underline{a}_n\}$ は単調増加列であり $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \liminf a_n$ である.

Proof. 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ について

$$\{a_i | i \geq n\} \supset \{a_i | i \geq n+1\}$$

であることに注意すると, $\bar{a}_n \geq \bar{a}_{n+1}$ となる. よって $\{\bar{a}_n\}$ は単調減少列である.

$\{\bar{a}_n\}$ が下に有界であれば C4 により $\{\bar{a}_n\}$ は収束列であり Prop. 1.2.16 によりその極限值は $\inf\{\bar{a}_n\}$ に等しい. すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \inf\{\bar{a}_n\} = \limsup a_n.$$

$\{\bar{a}_n\}$ が下に有界でないとすると任意の $K \in \mathbb{R}$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $\bar{a}_N < K$ となる. $\{\bar{a}_n\}$ は単調減少だから $n \geq N$ ならば $\bar{a}_n \leq \bar{a}_N < K$ となり $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = -\infty$ である.

また, $\{\bar{a}_n\}$ は下に有界でないので $\limsup a_n = \inf\{\bar{a}_n\} = -\infty$.

下極限についても同様.

□

Proposition 1.4.3. $\{a_n\}$ を数列, $a \in \mathbb{R}$ または $a = \pm\infty$ とする. このとき次が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \limsup a_n = \liminf a_n = a.$$

Proof. 1. $a \in \mathbb{R}$ のとき.

$\Leftarrow$) $\limsup a_n = \liminf a_n = a \in \mathbb{R}$ であるから $\{a_n\}$ は有界である. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\underline{a}_n \leq a_n \leq \bar{a}_n$ であり, Prop. 1.4.2 と仮定より $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \liminf a_n = a = \limsup a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n$ なので, はさみうちにより $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

$\Rightarrow$) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$, すなわち $\{a_n\}$ は収束列であるから有界である.

$\varepsilon > 0$ とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ だから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $i \geq N$ に対し, $a - \varepsilon/2 < a_i < a + \varepsilon/2$ となる. 従って $n \geq N$ ならば,

$$a - \varepsilon < a - \frac{\varepsilon}{2} \leq \inf\{a_i | i \geq n\} = \underline{a}_n \leq a_n < a + \varepsilon$$

ゆえ $\underline{a}_n \in U_\varepsilon(a)$. よって $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = a$. 従って Prop. 1.4.2 より $\liminf a_n = a$.

同様に $\limsup a_n = a$.

2. $a = +\infty$ のとき.

$\Leftarrow$) $\liminf a_n \neq -\infty$ であるから $\{a_n\}$ は下に有界である. 従って Prop. 1.4.2 より $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = \liminf a_n = +\infty$. 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\underline{a}_n \leq a_n$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

$\Rightarrow$) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ であるから $\{a_n\}$ は下に有界であり上に有界ではない. 上に有界でないので $\limsup a_n = +\infty$ である. また $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ であるから, 任意の $K \in \mathbb{R}$ に対しある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $i \geq N$ ならば $a_i > K$ となる. このとき $n \geq N$ ならば $\underline{a}_n \geq \underline{a}_N = \inf\{a_i | i \geq N\} \geq K$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{a}_n = +\infty$. Prop. 1.4.2 より $\liminf a_n = +\infty$.

$a = -\infty$ のときも同様.

□

Definition 1.4.4. 数列 $\{a_n\}$ の部分列の極限値を, 数列 $\{a_n\}$ の集積値 (accumulation value) という.

Lemma 1.4.5. $\{a_{i_k}\}$ を数列 $\{a_n\}$ の部分列とする. このとき $\limsup a_{i_k} \leq \limsup a_n$, $\liminf a_{i_k} \geq \liminf a_n$ が成り立つ.

Proof. $i_k \geq k$ であるから

$$\{a_{i_k} \mid k \geq n\} \subseteq \{a_k \mid k \geq n\}$$

となることよりわかる.

□

exercise 39. 証明を仕上げよ.

Corollary 1.4.6. a が数列 $\{a_n\}$ の集積値であれば $\liminf a_n \leq a \leq \limsup a_n$.

exercise 40. これを示せ.

Proposition 1.4.7. 有界数列 $\{a_n\}$ の上極限は集積値の最大数であり, 下極限は集積値の最小数である.

Proof. 集積点全体のなす集合を A , $\limsup a_n = \alpha$, $\liminf a_n = \beta$ とする.

$\alpha, \beta \in A$ を示そう. 自然数列 $\{i_k\}$ を帰納的に以下のように構成する. $i_0 = 0$ とおく. i_{k-1} まで決まったとして, $\alpha - 1/k < a_{i_k} < \alpha + 1/k$ かつ $i_k > i_{k-1}$ となる i_k を次のようにして選ぶ. $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n$ であるから, ある $N > i_{k-1}$ が存在して, $\alpha - 1/k < \bar{a}_N < \alpha + 1/k$ となる. $\alpha - 1/k < \bar{a}_N = \sup \{a_i \mid i \geq N\}$ であるから, ある $i_k \geq N$ が存在して, $\alpha - 1/k < a_{i_k}$ となる. $i_k \geq N$ だから, $a_{i_k} \leq \sup \{a_i \mid i \geq N\} = \bar{a}_N < \alpha + 1/k$ である. 作り方からあきらかに部分列 $\{a_{i_k}\}$ は α に収束する. よって $\alpha \in A$. $\beta \in A$ も同様に示せる.

よって, Cor. 1.4.6 より, $\alpha = \max A$, $\beta = \min A$. □

問題集 . 数列が有界の場合のみでよい.

64 (1),(2) 67 (1)~(4),(5)*, 69 (1)~(4), 70 (1)~(4), 71 (1),(2), 72 (1)(2)(ヒント (1) と 61(4) を使う)(3)

第 2 章

距離空間

この章では [7] にそって距離空間について考える.

2.1 距離

Definition 2.1.1. X を集合とする.

$X \times X$ 上定義された実数値関数

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

が次の 3 つの条件をみたすとき, d を X 上の距離関数 (metric) という.

- D1 (i) 任意の $x, y \in X$ について $d(x, y) \geq 0$.
(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- D2 任意の $x, y \in X$ について $d(x, y) = d(y, x)$.
- D3 (三角不等式) 任意の $x, y, z \in X$ について $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Definition 2.1.2. 集合 X とその上の距離関数 d が与えられたとき, 組 (X, d) を距離空間 (metric space) という.

また $x, y \in X$ に対し実数 $d(x, y)$ を x と y の距離 (distance) という.

混乱のおそれがないときは d を省略して単に距離空間 X と書くことが多い.

Definition 2.1.3. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. 距離関数 d を A に制限したもの, すなわち,

$$A \times A \ni (a, b) \mapsto d(a, b) \in \mathbb{R}$$

を考えると, これは A 上の距離関数になり, この距離により A は距離空間になる.

距離空間の部分集合をこのようにして距離空間とみたとき、部分距離空間 (metric subspace) または単に部分空間 (subspace) という。

Definition 2.1.4. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする。

写像 $f: X \rightarrow Y$ が距離を保つあるいは等長写像 (isometry) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x, x' \in X$ に対し、 $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$ である。

X から Y への全射等長写像が存在するとき、 X と Y は距離空間として等長 (isometric)、あるいは同型 (isomorphic) であるという。

Remark. 全射であるもののみを等長写像という場合もある。

exercise 41. 等長写像の合成は等長写像である。

exercise 42. 部分距離空間の包含写像は等長写像である。

exercise 43. 1. 等長写像は単射である。

2. $f: X \rightarrow Y$ が全射等長写像ならば、 f の逆写像も等長写像である。

3. X と Y が距離空間として等長である $\Leftrightarrow$ 等長写像 $f: X \rightarrow Y$ と $g: Y \rightarrow X$ が存在して、 $g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$ が成り立つ。

exercise 44. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が距離を保てば、 X と $f(X)$ は距離空間として等長である。

Definition 2.1.5. X を距離空間とする。 $x \in X, \varepsilon > 0$ に対し次で定義される X の部分集合

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

を x を中心とする半径 ε の開球 (open ball)、開円盤 (open disc) あるいは ε 近傍 という。

また

$$S_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$$

を x を中心とする半径 ε の球面 (sphere) という。

問題集 . 78(1)(2), 79(1)(2), 81(1), 86, 91(1)(2)

Example 2.1.6 (n 次元ユークリッド空間, n -dimensional Euclidian space). $\mathbb{R}$ の n 個の直積

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

の2点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し x と y の距離 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

で定めると d は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である.

Proof. D1 明らかに $d(x, y) \geq 0$ であり, $x = y$ ならば $d(x, y) = 0$ である.

$d(x, y) = 0$ とすると,

$$0 \leq (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = 0$$

であるから $x_i - y_i = 0$. よって $x = y$.

D2 明らか.

D3 $\mathbb{R}^n$ の3点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ に対し $a_i = x_i - y_i$, $b_i = y_i - z_i$ とおく. $x_i - z_i = x_i - y_i + y_i - z_i = a_i + b_i$ であるから

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, \quad d(y, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}, \quad d(x, z) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2}$$

となる.

$$\begin{aligned} (d(x, y) + d(y, z))^2 - d(x, z)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} - \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \\ &= 2 \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} - \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \geq 0. \end{aligned}$$

ここで最後の不等号は次に示す Schwartz の不等式をもちいた. $d(x, y)$, $d(y, z)$ はともに非負であるから $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ となる. $\square$

Lemma 2.1.7 (Schwartz の不等式). a_i, b_i ($i = 1, \dots, n$) を実数とすると次の不等式が成立する.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

Proof. $\sum b_i^2 = 0$ ならば全ての i について $b_i = 0$ であるので両辺ともに 0 となり成立する.

$\sum b_i^2 \neq 0$ とする. 任意の実数 t に対して

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i + tb_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2t \sum_{i=1}^n a_i b_i + t^2 \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

であり, $\sum b_i^2 > 0$ であるから, 判別式を考えると

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0$$

となる. □

この距離をユークリッドの距離といい, $\mathbb{R}^n$ にこの距離を与えて得られる距離空間を n 次元ユークリッド空間 という.

$n = 1$ のとき

$$d(x, y) = \sqrt{(x - y)^2} = |x - y|$$

$$U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

$$S_\varepsilon(x) = \{x - \varepsilon, x + \varepsilon\}$$

$n = 2$ のとき

$$U_\varepsilon((x_0, y_0)) = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$$

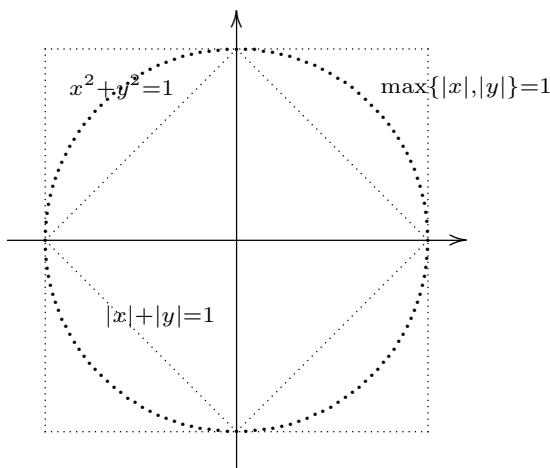


図 2.1 $U_1((0, 0))$, Ex 2.1.10, 2.1.11 参照

exercise 45. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ からそれ自身への等長写像はどのようなものか? (まず $0, 1$ の像を調べてみよ.)

Example 2.1.8. $x, y \in \mathbb{Q}$ (あるいは $\mathbb{Z}$) に対し, $d(x, y) \in \mathbb{R}$ を $d(x, y) = |x - y|$ と定めると, d は $\mathbb{Q}$ (あるいは $\mathbb{Z}$) 上の距離関数であり, この距離により $\mathbb{Q}$ (あるいは $\mathbb{Z}$) は (1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分) 距離空間である.

Example 2.1.9.

$$\mathbb{R}^\infty := \left\{ (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \right\}$$

とする. すなわち $\mathbb{R}^\infty$ の元は実数列 $\{x_i\}$ であって級数 $\sum x_i^2$ が収束するもの.

$x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ に対し

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

で定まる関数は $\mathbb{R}^\infty$ 上の距離関数である.

($\mathbb{R}^\infty$ を l_2 と書くことも多い. また $\mathbb{R}^\infty$ という記号は別の意味で使われることもあるので注意.)

Proof. まず $d(x, y)$ が well-defined すなわち級数 $\sum (x_i - y_i)^2$ が収束することを示そう.

$s_n = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$ とおく. $\{s_n\}$ は単調増加である. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の3点 $(x_1, \dots, x_n), (0, \dots, 0), (y_1, \dots, y_n)$ に対する三角不等式から

$$0 \leq s_n = (\sqrt{s_n})^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} \right)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2} \right)^2$$

であるから $\{s_n\}$ は有界である. よって収束する.

これが D1, D2 をみたすことはあきらかである. 三角不等式をみたすことは上と同様に n 次元ユークリッド空間における三角不等式を考えてその極限をとることで示すことが出来る. $\square$

exercise 46. 上の三角不等式を示せ.

Example 2.1.10. $\mathbb{R}^n$ において

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

を考えると $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数である. (この距離は チェビシェフ距離 (Chebyshev distance) とよばれることがある.)

Proof. D1, D2 は明らか.

任意の $1 \leq i \leq n$ について $|x_i - y_i| \leq d(x, y)$ が成り立つ. よって

$$d(x, y) + d(y, z) \geq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \geq |x_i - z_i|.$$

したがって

$$d(x, y) + d(y, z) \geq \max_i |x_i - z_i| = d(x, z).$$

□

$n = 2$ のとき $U_\varepsilon((0, 0)) = \{(x_1, x_2) \mid \max |x_i| < \varepsilon\}$.

Example 2.1.11. $\mathbb{R}^n$ において

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

は距離関数である. (この距離はマンハッタン距離 (Manhattan distance) とよばれることがある.)

Proof. D1, D2 は明らか.

$$\begin{aligned} d(x, y) + d(y, z) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |y_i - z_i| \\ &= \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |y_i - z_i|) \\ &\geq \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| = d(x, z). \end{aligned}$$

□

$n = 2$ のとき $U_\varepsilon((0, 0)) = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| + |x_2| < \varepsilon\}$

exercise 47. $\mathbb{R}^\infty$ において 2.1.10, 2.1.11 に相当することを考察せよ.

Example 2.1.12 (離散距離空間, discrete metric space). X を集合とする. 関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

で定めると d は X 上の距離関数になる. (問題集 81(1) 参照.)

(X, d) を 離散距離空間 (discrete metric space) という.

$$U_\varepsilon(x) = \begin{cases} \{x\}, & \varepsilon \leq 1 \\ X, & \varepsilon > 1 \end{cases}$$

$$S_\varepsilon(x) = \begin{cases} \emptyset, & \varepsilon \neq 1 \\ X - \{x\}, & \varepsilon = 1 \end{cases}$$

Example 2.1.13 (p 進距離, p -adic metric). p を素数とする. $l \in \mathbb{Z}$ に対し

$$v_p(l) = \begin{cases} \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq 0, p^n | l\}, & l \neq 0 \\ \infty, & l = 0 \end{cases}$$

とおく. $l \neq 0$ のとき $v_p(l)$ は $p^n | l, p^{n+1} \nmid l$ となるような $n \in \mathbb{Z}$ である. すなわち l を素因数分解したときの p の重複度.

$d_p: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$d_p(l, m) = p^{-v_p(l-m)}$$

で定める. ただし $p^{-\infty} = 0$ と約束する. d_p は $\mathbb{Z}$ 上の距離関数である. この距離を p 進距離という.

Proof. D1, D2 は明らか. D3 を示そう. まず

$$v_p(l+m) \geq \min\{v_p(l), v_p(m)\}$$

であることに注意する. なぜなら l が p^n で, m が p^k で割れれば $l+m$ は $p^{\min\{n,k\}}$ で割れるから. p^{-x} は x に関して単調減少であることに注意すれば

$$\begin{aligned} d_p(k, l) + d_p(l, m) &\geq \max\{d_p(k, l), d_p(l, m)\} \quad (\text{どちらも非負だから}) \\ &= \max\{p^{-v_p(k-l)}, p^{-v_p(l-m)}\} \\ &= p^{-\min\{v_p(k-l), v_p(l-m)\}} \\ &\geq p^{-v_p(k-l+l-m)} = d_p(k, m). \end{aligned}$$

□

exercise 48. 上の D1, D2 を示せ.

exercise 49. 上の例で $p = 2$ の場合を考える. $n \in \mathbb{N}$ とする.

1. $l = 0, 1, 2, \dots, 10$ に対し $d_2(l, 0)$ を求めよ.
2. $d_2(2^n, 0)$ および $d_2(2n-1, 0)$ を求めよ.
3. $S_1(0)$ および $U_1(0)$ を求めよ.

4. $S_{1/2^n}(0)$ および $U_{1/2^n}(0)$ を求めよ.

Remark. この距離は, 三角不等式よりも強い不等式 (超距離三角不等式)

$$\max\{d(x, y), d(y, z)\} \geq d(x, z)$$

をみたしている. このような距離を 非アルキメデスの距離 (non-Archimedean metric) という.

exercise 50. X を集合とする. 関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が非負 ($\forall x, y \in X, d(x, y) \geq 0$) で, 超距離三角不等式をみたせば, 三角不等式をみたすことを示せ.

Remark. この距離は $\mathbb{Q}$ に拡張できる. 写像 $v_p: \mathbb{Q} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}$ を以下のように定義する. 任意の 0 でない有理数 r は $r = p^n s/t$, ($n, s, t \in \mathbb{Z}$, s, t は p で割れない) と表せ, この n は r により一意に定まる. $v_p(r) = n$ とする. また $v_p(0) = \infty$ と定める (p 進付値).

$d_p: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$d_p(l, m) = p^{-v_p(l-m)}$$

で定める. ただし $p^{-\infty} = 0$ と約束する. d_p は $\mathbb{Q}$ 上の距離関数である. この距離を p 進距離という.

Proof.

$$v_p(l+m) \geq \min\{v_p(l), v_p(m)\}$$

であることを示せば, あとは $\mathbb{Z}$ のときと同様. $l = p^n s/t$, $m = p^k u/v$ で $s, t, u, v \in \mathbb{Z}$ は p で割れないとする. $n \leq k$ として一般性を失わない.

$$\begin{aligned} l+m &= p^n \frac{s}{t} + p^k \frac{u}{v} \\ &= p^n \left(\frac{s}{t} + p^{k-n} \frac{u}{v} \right) \\ &= p^n \frac{vs + p^{k-n}u}{tv} \end{aligned}$$

であるが $vs + p^{k-n}u \in \mathbb{Z}$ なので $vs + p^{k-n}u = p^e w$ と書ける, ただし $e, w \in \mathbb{Z}$, $e \geq 0$, w は p で割れない. したがって $l+m = p^{n+e}w/tv$ となり, tv は p で割れないことに注意すれば $v_p(l+m) = n+e \geq n$ であることがわかる.

□

Example 2.1.14 (ハミング距離, Hamming distance). X を集合とする. $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in X^n$ に対し,

$$d(x, y) = \#\{i \mid x_i \neq y_i\}$$

と定めると d は X^n 上の距離関数になる. この距離を ハミング距離 (Hamming distance) という.

exercise 51. これが距離関数であることを示せ.

Example 2.1.15. $(X_1, d_1), (X_2, d_2)$ を距離空間とする. $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2) \in X_1 \times X_2$ に対して

1. $\sqrt{d_1(x_1, x'_1)^2 + d_2(x_2, x'_2)^2}$
2. $\max\{d_1(x_1, x'_1), d_2(x_2, x'_2)\}$
3. $d_1(x_1, x'_1) + d_2(x_2, x'_2)$

で定まる関数はいずれも $X_1 \times X_2$ 上の距離関数である.

Example 2.1.16. 上の例は有限個の距離空間の直積に拡張出来る. (X_i, d_i) ($i = 1, \dots, n$) を距離空間とすると $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ に対して

1. $\sqrt{\sum_{i=1}^n d_i(x_i, x'_i)^2}$
2. $\max\{d_1(x_1, x'_1), \dots, d_n(x_n, x'_n)\}$
3. $\sum_{i=1}^n d_i(x_i, x'_i)$

で定まる関数はいずれも $X_1 \times \dots \times X_n$ 上の距離関数である.

exercise 52. 上の 1,2,3 が距離関数であることを示せ.

exercise 53. X を離散距離空間とする. Ex. 2.1.16.3 で与えられる X^n 上の距離関数とハミング距離 (Ex. 2.1.14) との関係を調べよ.

Definition 2.1.17. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ をその空でない部分集合とする. このとき

$$\delta(A) := \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

を A の直径 (diameter) という.

(空集合については必要なら $\delta(\emptyset) = -\infty$ と考える.)

$\delta(A) < +\infty$ であるとき A は有界 (bounded) であるという.

exercise 54. $A \subset B$ ならば $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Example 2.1.18. ユークリッド空間の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ を中心とする半径 $r(> 0)$ の開球 $U_r(x)$ の直径は $2r$ である.

Proof. 任意の2点 $y, z \in U_r(x)$ について

$$0 \leq d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) < r + r = 2r.$$

したがって $0 \leq \delta(U_r(x)) \leq 2r$ である.

任意の正の数 $\varepsilon \leq 2r$ に対し $\mathbb{R}^n$ の2点

$$x_{\pm} = (x_1 \pm (r - \frac{\varepsilon}{4}), x_2, \dots, x_n)$$

を考えると $d(x_{\pm}, x) = r - \varepsilon/4$ だから $x_{\pm} \in U_r(x)$. $d(x_+, x_-) = 2r - \varepsilon/2 > 2r - \varepsilon$.
よって $\delta(U_r(x)) = 2r$. □

Remark. 一般の距離空間において $\delta(U_r(x)) \leq 2r$ であることが上の証明の前半よりわかるが, 等号は必ずしも成立するとはかぎらない.

exercise 55. 上で等号が成立しない, すなわち $\delta(U_r(x)) < 2r$ となる例を挙げよ.

Lemma 2.1.19. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ をその空でない部分集合とする. このとき A が有界 $\Leftrightarrow$ 任意の点 $x \in X$ に対し, ある $r > 0$ が存在して $A \subset U_r(x)$ となる.

Proof. $\Rightarrow$) $\delta(A) = s, x \in X$ とする. $a \in A$ をひとつ固定する. $r = s + d(x, a) + 1$ とすると, 任意の $a' \in A$ に対し

$$d(x, a') \leq d(x, a) + d(a, a') \leq d(x, a) + s < r$$

だから $a' \in U_r(x)$. よって $A \subset U_r(x)$.

$\Leftarrow$) $A \subset U_r(x)$ ならば $\delta(A) \leq \delta(U_r(x)) \leq 2r$. □

exercise 56. A が有界 $\Leftrightarrow$ ある点 $x \in X$ と, ある $r > 0$ が存在して $A \subset U_r(x)$ となる.

exercise 57. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ をその空でない有限部分集合とする. このとき A は有界であることを示せ.

Definition 2.1.20. (X, d) を距離空間, $A, B \subset X$ をその空でない部分集合とする. このとき

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

を A と B の距離 という.

特に A が1点 $x \in X$ からなる集合 $A = \{x\}$ であるときは $d(\{x\}, B)$ を $d(x, B)$ と書いて, $(\{x\}$ と B の距離といわずに) x と B の距離 という.

$$d(x, B) = \inf\{d(x, b) \mid b \in B\}$$

である.

あきらかに $A \cap B \neq \emptyset$ ならば $d(A, B) = 0$ であるが, 逆は一般には正しくない.

Example 2.1.21. 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A, B を次のように定義する.

$$A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \left\{ \left(x, \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\}$$

このとき任意の正の数 x に対し

$$d(A, B) \leq d\left((x, 0), \left(x, \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}$$

であるから $d(A, B) = 0$ であるが, $A \cap B = \emptyset$.

exercise 58. 1. $r \in \mathbb{R}$ とする. 任意の正の数 ε に対し $r \leq \varepsilon$ であれば $r \leq 0$ であることを示せ.

2. 上の最後の部分, すなわち, 任意の正の数 x に対し $d(A, B) \leq \frac{1}{x}$ となるならば, $d(A, B) = 0$ であることを示せ.

2.2 開集合, 閉集合, 距離の定める位相

Definition 2.2.1. (X, d) を距離空間, $O \subset X$ を部分集合とする. このとき

O が X の開集合 (open set) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x \in O$ に対し, ある正の数 $\varepsilon > 0$ が存在して $U_\varepsilon(x) \subset O$ となる.

Example 2.2.2. 開球 $U_r(x)$ は開集合, とくに 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の开区間 (a, b) は開集合.

Proof. $y \in U_r(x)$ とする. $d(x, y) < r$ であるから $\varepsilon = r - d(x, y)$ とおくと $\varepsilon > 0$ である. $U_\varepsilon(y) \subset U_r(x)$ を示そう.

$z \in U_\varepsilon(y)$ とすると $d(y, z) < \varepsilon$ であるから

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \\ &< d(x, y) + \varepsilon \\ &= d(x, y) + r - d(x, y) = r \end{aligned}$$

となり $z \in U_r(x)$ である. よって $U_\varepsilon(y) \subset U_r(x)$. したがって $U_r(x)$ は開集合.

1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において开区間 (a, b) は $(a+b)/2$ を中心とする半径 $(b-a)/2$ の開球であるから開集合である. $\square$

Definition 2.2.3. X を距離空間とする. X の開集合全体からなる $\mathcal{P}(X)$ の部分集合

$$\mathcal{O} = \{O \mid O \text{ は } X \text{ の開集合}\}$$

を考える. $\mathcal{O}$ を距離 d の定める位相 (topology) という.

Theorem 2.2.4. (X, d) を距離空間, $\mathcal{O}$ を距離 d の定める位相とすると次が成り立つ.

- O1 $X, \emptyset \in \mathcal{O}$.
- O2 $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
- O3 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

Proof. O1 $X \in \mathcal{O}$ はあきらか. $\emptyset$ については $x \in \emptyset$ となる点 x が存在しないので開集合である.

O2 $x \in O_1 \cap O_2$ とすると, $i = 1, 2$ について, $x \in O_i$ で, O_i は開集合だから, ある正数 ε_i が存在して $U_{\varepsilon_i}(x) \subset O_i$ となる. $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ とおくと, $\varepsilon > 0$ であり $U_\varepsilon(x) \subset U_{\varepsilon_i}(x)$ であるから, $U_\varepsilon(x) \subset O_1 \cap O_2$. よって $O_1 \cap O_2$ は開集合.

O3 $x \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ とすると, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $x \in O_{\lambda_0}$. O_{λ_0} は開集合であるから, ある正の数 ε が存在して $U_\varepsilon(x) \subset O_{\lambda_0}$ となる. $O_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ であるから $U_\varepsilon(x) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ となり $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ は開集合である.

□

Remark . O2 から帰納法により, 有限個の開集合の共通部分は開集合となることがわかるが, 無限個では一般にはそうではない. (次の問題参照.)

問題集 . 85(1)

Theorem 2.2.5. 距離空間においては, O が開集合 $\Leftrightarrow O$ は開球の和集合.

Proof. $\Leftarrow$) 上で見たように開球は開集合であるから Thm 2.2.4 O3 よりその和集合は開集合.

$\Rightarrow$) O を開集合とすると, 任意の $x \in O$ についてある正数 ε_x が存在して $U_{\varepsilon_x}(x) \subset O$ となる. $x \in U_{\varepsilon_x}(x)$ に注意して

$$O \subset \bigcup_{x \in O} U_{\varepsilon_x}(x) \subset O,$$

よって $O = \bigcup U_{\varepsilon_x}(x)$.

□

問題集 . 81(2)

exercise 59. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\prod_{i=1}^n (a_i, b_i) = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq \forall i \leq n : a_i < x_i < b_i\}$$

は開集合であることを示せ. これを $\mathbb{R}^n$ の开区間という.

exercise 60. (X, d) を距離空間, $x \in X$ とする. $E_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) > r\}$ は X の開集合であることを示せ.

Definition 2.2.6. X を距離空間, $F \subset X$ を部分集合とする. このとき

F が X の閉集合 (closed set) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} F$ の補集合 F^c が X の開集合である.

Theorem 2.2.7. $\mathcal{F} = \{F \mid F \text{ は } X \text{ の閉集合}\}$ は次をみたす.

F1 $X, \emptyset \in \mathcal{F}$.

F2 $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

F3 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

Proof. Thm. 2.2.4 O1, O2, O3 より

$$F1 \quad X^c = \emptyset \in \mathcal{O}, \emptyset^c = X \in \mathcal{O}.$$

$$F2 \quad (F_1 \cup F_2)^c = F_1^c \cap F_2^c \in \mathcal{O}.$$

$$F3 \quad (\cap F_\lambda)^c = \cup (F_\lambda^c) \in \mathcal{O}.$$

□

Remark. F2 により有限個の閉集合の和集合は閉集合であることがわかるが, 無限個の場合は一般にはそうではない. (開集合のときを参照.)

Example 2.2.8. 距離空間において 1 点のみからなる集合 $\{x\}$ は閉集合である. したがって F2 により有限部分集合も閉集合である.

Proof. $\{x\}^c = X - \{x\}$ が開集合であることをいえばよい.

$y \in X - \{x\}$ とすると $x \neq y$. よって $\varepsilon = d(x, y)$ とおくと $\varepsilon > 0$ であり, あきらかに $x \notin U_\varepsilon(y)$. よって $U_\varepsilon(y) \subset X - \{x\}$. □

Example 2.2.9. $B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$ を点 x を中心とする半径 r の閉球 (closed ball) または閉円盤 (closed disc) という. $B_r(x)^c = E_r(x)$ であるから exercise 60 より, 閉球は閉集合である. とくに 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において閉区間は閉集合である.

exercise 61. $S_r(x)$ は閉集合であることを示せ.

exercise 62. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i \leq n : a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

は閉集合であることを示せ. これを $\mathbb{R}^n$ の閉区間という.

Remark. $X, \emptyset$ は開かつ閉集合である. また開集合でも閉集合でもない部分集合もある.

exercise 63. 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の半開区間 $(a, b]$ は $a < b$ ならば開集合でも閉集合でもない.

問題集. 83(1)(2) 84(1)(2)

部分距離空間の位相を調べてみよう.

Theorem 2.2.10. X を距離空間, $A \subset X$ を部分空間, $B \subset A$ を部分集合とする. このとき次が成り立つ.

B が A の開集合 $\Leftrightarrow X$ の開集合 O が存在して, $B = O \cap A$.

B が A の閉集合 $\Leftrightarrow X$ の閉集合 F が存在して, $B = F \cap A$.

すなわち, X の開集合全体を $\mathcal{O}$, 閉集合全体を $\mathcal{F}$, 部分距離空間 A の開集合全体を $\mathcal{O}_A$, 閉集合全体を $\mathcal{F}_A$ とすると,

$$\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\}$$

$$\mathcal{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\}$$

Proof. $a \in A$ に対し, a を中心とする半径 r の A における開球

$$U_r(a)_A = \{x \in A \mid d(a, x) < r\}$$

は, a を中心とする半径 r の X における開球

$$U_r(a) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

と A との共通部分, すなわち, $U_r(a)_A = U_r(a) \cap A$ であることに注意する.

B が A の開集合であるとする. 距離空間の開集合は開球の和集合であった (Thm. 2.2.5) から

$$B = \bigcup_{\alpha} U_{A,\alpha} = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \cap A) = \left(\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \right) \cap A$$

となる. ただし $U_{A,\alpha}$, U_{α} はそれぞれ A , X における開球である. $O = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ とおけばよい.

逆に $O \subset X$ が開集合で, $B = O \cap A$ であるとする. $x \in B$ とすると, $x \in O$ であり, O は開集合ゆえ, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U_{\varepsilon}(x) \subset O$ となる. $U_{\varepsilon}(x)_A = U_{\varepsilon}(x) \cap A \subset O \cap A = B$ ゆえ, B は A の開集合.

閉集合の方は練習問題. □

exercise 64. 閉集合の方を示せ.

ひとつの集合上の異なる距離関数が同じ位相を定めることもある.

Example 2.2.11. Example 2.1.6, 2.1.10, 2.1.11 で与えられた $\mathbb{R}^n$ 上の距離

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

$$d_1(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

$$d_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

を考える. $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ をそれぞれ d, d_1, d_2 の定める位相とすると $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ である.

Proof. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ を示そう.

任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ について $d_1(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n}d_1(x, y)$ であることに注意する. 実際任意の i について

$$|x_i - y_i| = \sqrt{(x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = d(x, y)$$

であるから $d_1(x, y) = \max |x_i - y_i| \leq d(x, y)$. また任意の i について

$$(x_i - y_i)^2 \leq (\max |x_i - y_i|)^2 = d_1(x, y)^2$$

であるから

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n d_1(x, y)^2} = \sqrt{n}d_1(x, y).$$

距離 d_1 に関する開球を $U_\varepsilon(x)_1$ で表す.

$O \in \mathcal{O}$ とする. 任意の $x \in O$ に対しある正数 r が存在して $U_r(x) \subset O$ となる. $\varepsilon = r/\sqrt{n}$ とおくと $\varepsilon > 0$. 任意の $y \in U_\varepsilon(x)_1$ に対し

$$d(x, y) \leq \sqrt{n}d_1(x, y) < \sqrt{n}\varepsilon = \sqrt{n}r/\sqrt{n} = r$$

だから $y \in U_r(x)$. よって $U_\varepsilon(x)_1 \subset U_r(x) \subset O$ であり $O \in \mathcal{O}_1$. したがって $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}_1$.

逆に $O \in \mathcal{O}_1$ であれば, 任意の $x \in O$ に対しある正数 ε が存在して $U_\varepsilon(x)_1 \subset O$ となる. $d_1(x, y) \leq d(x, y)$ であるから $U_\varepsilon(x) \subset U_\varepsilon(x)_1$ となり $O \in \mathcal{O}$ である. よって $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}$. 以上から $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ が示せた.

$\mathcal{O} = \mathcal{O}_2$ も $d(x, y) \leq d_2(x, y) \leq nd(x, y)$ に注意すれば同様に示せる. $\square$

exercise 65. 上の不等式 $d(x, y) \leq d_2(x, y) \leq nd(x, y)$ を示せ.

exercise 66. 集合 X 上の2つの距離関数 d_1 と d_2 が条件*「 $\exists M, m > 0, \forall x, y \in X : md_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Md_1(x, y)$ 」をみたすとき $d_1 \sim d_2$ と書くことにする. 距離 d_i に関する開球を $U_\varepsilon(x)_i$, 距離 d_i の定める位相を $\mathcal{O}_i$ と書く.

1. 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.
2. d_1 と d_2 が条件*をみたすとする. このとき任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$U_{m\varepsilon}(x)_2 \subset U_\varepsilon(x)_1$$

$$U_{\frac{\varepsilon}{M}}(x)_1 \subset U_\varepsilon(x)_2$$

であることを示せ.

3. $d_1 \sim d_2$ であるときこれらの定める位相は等しい, すなわち $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ であることを示せ.

exercise 67. Example 2.1.15 における $X_1 \times X_2$ 上の 3 つの距離関数の定める位相はどれも等しいことを示せ. Example 2.1.16 についてはどうか?

exercise 68. $\mathbb{R}^n$ において, ユークリッド距離の定める位相と離散距離の定める位相は異なることを示せ.

2.3 近傍

Definition 2.3.1. X を距離空間とする.

1. $U \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とする. このとき

U が x の 近傍 (neighbourhood) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in O \subset U$ となるような (X の) 開集合 O が存在する.

特に, 点 x を含む開集合は x の近傍である. x を含む開集合を x の 開近傍 (open neighbourhood) という.

x の近傍でかつ閉集合であるものを x の 閉近傍 (closed neighbourhood) という.

2. 集合

$$\mathcal{U}(x) = \{U \subset X \mid U \text{ は } x \text{ の近傍}\}$$

を x の 近傍系 (system of neighbourhoods) という.

3. $A, U \subset X$ を部分集合とする. このとき

U が A の 近傍 (neighbourhood) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset O \subset U$ となるような (X の) 開集合 O が存在する.

Remark. 近傍の定義は位相にもとづいている. 距離の定める位相を考えると, 距離関数は異なっても位相が一致すれば $\mathcal{U}(x)$ は一致する.

Example 2.3.2. 距離空間において, ε 近傍 $U_\varepsilon(x)$ (ただし $\varepsilon > 0$) は x を含む開集合なので, x の近傍である.

exercise 69. 距離空間においては, $U \in \mathcal{U}(x) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } U_\varepsilon(x) \subset U$.

開集合は近傍を用いて特徴づけられる.

Theorem 2.3.3. $O \subset X$ を部分集合とする. このとき

O が開集合である $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in O$ に対し $O \in \mathcal{U}(x)$.

Proof. $\Rightarrow$) あきらか.

$\Leftarrow$) $x \in O$ ならば, 仮定より O は x の近傍なので $x \in O_x \subset O$ となる開集合 O_x が存在する. 各 $x \in O$ に対しこのような開集合 O_x をとると,

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} O_x \subset O$$

となり, $O = \bigcup O_x$ であるから, O は開集合. □

Definition 2.3.4. X を距離空間, $x \in X$ とし, $\mathcal{U}(x)$ を x の近傍系とする. このとき $\mathcal{U}^*(x)$ が x の 基本近傍系 (fundamental system of neighbourhood) である

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & \mathcal{U}^*(x) \subset \mathcal{U}(x) \\ \text{(ii)} & \text{任意の } U \in \mathcal{U}(x) \text{ に対し, ある } V \in \mathcal{U}^*(x) \text{ が存在して, } V \subset U \text{ となる.} \end{cases}$$

Remark. 基本近傍系は x に対し一意的に定まるわけではない. また, 距離の定める位相を考えると, $\mathcal{U}^*(x)$ が基本近傍系であるという性質は距離ではなく位相に依存している.

Example 2.3.5. X を距離空間, $x \in X$ とする.

$$\mathcal{U}^*(x) = \{U_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\}$$

は基本近傍系である (exercise 69 参照).

$$\mathcal{U}^{**}(x) = \left\{ U_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

は可算基本近傍系である.

Proof. $\mathcal{U}^{**}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ はあきらか.

任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対し, exercise 69 からある $\varepsilon > 0$ が存在して $U_\varepsilon(x) \subset U$ となる. $1/n < \varepsilon$ となる $n \in \mathbb{N}$ をとれば $U_{\frac{1}{n}}(x) \subset U_\varepsilon(x) \subset U$. $\square$

$$\mathcal{U}^{***}(x) = \left\{ B_{\frac{1}{n}}(x) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

は可算基本閉近傍系である.

exercise 70. 上の $\mathcal{U}^{***}(x)$ が基本近傍系であることを示せ.

Example 2.3.6. 2次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において,

$$\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$$

は点 (x, y) の基本近傍系である. 実際, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \times (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ は Example 2.1.10 で与えた距離に関する点 (x, y) の ε 近傍であり, この距離の定める位相とユークリッド距離の定める位相は一致する (Example 2.2.11).

同様に n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において

$$\left\{ \prod_{i=1}^n (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \mid \varepsilon > 0 \right\}$$

は点 $(x_1, \dots, x_n)$ の基本近傍系である.

exercise 71. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系, $\mathcal{U}^{**}(x)$ を $\mathcal{U}^*(x)$ の部分集合とする. 任意の $U \in \mathcal{U}^*(x)$ に対し, ある $V \in \mathcal{U}^{**}(x)$ が存在して $V \subset U$ となるとする. このとき, $\mathcal{U}^{**}(x)$ は x の基本近傍系である.

2.4 内部, 内点

Definition 2.4.1. X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A に含まれる X の開集合すべての和集合を A の内部 (interior) といい, A° で表す.

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{O \subset A \\ O: \text{open}}} O$$

($\emptyset$ は A に含まれる開集合であるから, A に含まれる開集合は少なくともひとつは存在することに注意.) Thm. 2.2.4 O3 により, A° は開集合である. また A に含まれる (包含関係に関して) 最大の開集合である. (あきらかに $A^\circ \subset A$ であり, $O \subset A$ が開集合であれば $O \subset A^\circ$ である.)

exercise 72. $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$.

exercise 73. $A: \text{open} \Leftrightarrow A = A^\circ$.

Example 2.4.2. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ では閉球の内部は開球, すなわち $B_r(x)^\circ = U_r(x)$ である.

Proof. $U_r(x)$ は開集合であり, あきらかに $U_r(x) \subset B_r(x)$ であるから, $U_r(x) \subset B_r(x)^\circ$.

$B_r(x)^\circ \subset U_r(x)$ を示そう. $y \in B_r(x)^\circ$ とする. $y = x$ ならばあきらかに $y \in U_r(x)$. $y \neq x$ とする. このとき $d(x, y) \neq 0$. $B_r(x)^\circ$ は開集合なので, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U_\varepsilon(y) \subset B_r(x)^\circ$ となる. $z = y + \frac{\varepsilon}{2d(x, y)}(y - x) \in \mathbb{R}^n$ とおくと,

$$d(y, z) = \|z - y\| = \left\| \frac{\varepsilon}{2d(x, y)}(y - x) \right\| = \frac{\varepsilon}{2d(x, y)} \|y - x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

だから, $z \in U_\varepsilon(y) \subset B_r(x)$ となり, $d(x, z) \leq r$. 作り方から $d(x, z) = d(x, y) + \frac{\varepsilon}{2}$ なので,

$$d(x, y) = d(x, z) - \frac{\varepsilon}{2} \leq r - \frac{\varepsilon}{2} < r$$

ゆえ $y \in U_r(x)$. □

上の証明からわかるように, 一般に距離空間において $U_r(x) \subset B_r(x)^\circ$ が成り立つ. しかし等号は必ずしも成り立たない.

Example 2.4.3. X を 2 つ以上元を含む離散距離空間とする. $B_1(x) = X$ なので, $B_1(x)^\circ = X$. 一方 $U_1(x) = \{x\}$ だから, $U_1(x) \subsetneq B_1(x)^\circ$

Example 2.4.4. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Q}$ の内部は空集合, すなわち $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ である.

Proof. 以降何度か使うので次の事実を証明しておく.

Lemma 2.4.5. 1. 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ と任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, $x < r < x + \varepsilon$ をみたす有理数 $r \in \mathbb{Q}$ が存在する. すなわち $(x, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.
 2. 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ と任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, $x < y < x + \varepsilon$ をみたす無理数 $y \in \mathbb{Q}^c$ が存在する. すなわち $(x, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c \neq \emptyset$.

Proof of Lemma. 1. $\frac{1}{N} < \varepsilon$ となる自然数 $N \in \mathbb{N}$ をひとつとる.

$$n := \max \left\{ l \in \mathbb{Z} \mid \frac{l}{N} \leq x \right\}$$

とおく. このとき定め方から $\frac{n}{N} \leq x < \frac{n+1}{N}$ である.

$$x + \varepsilon - \frac{n+1}{N} = x - \frac{n}{N} + \varepsilon - \frac{1}{N} > 0.$$

よって $\frac{n+1}{N} < x + \varepsilon$. あきらかに $\frac{n+1}{N} \in \mathbb{Q}$.

2. 同様にして

$$m := \left\{ l \in \mathbb{Z} \mid \frac{\sqrt{2}l}{2N} \leq x \right\}$$

とおけば, $\frac{\sqrt{2}(m+1)}{2N} \in (x, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c$.

□

$\mathbb{Q}^\circ \neq \emptyset$ と仮定する. $x \in \mathbb{Q}^\circ$ とする. $\mathbb{Q}^\circ$ は開集合であるから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \mathbb{Q}$, とくに $(x, x + \varepsilon) \subset \mathbb{Q}$, すなわち $(x, x + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}^c = \emptyset$ となるが, これは上の事実と反する. したがって $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$. □

exercise 74. Lem 2.4.5. 2 の証明の詳細を説明せよ.

Definition 2.4.6. $A \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とする.

x が A の 内点 (inner point, interior point) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in O \subset A$ となるような X の開集合 O が存在する.

あきらかに x が A の内点であることと, A が x の近傍であることは同値である.

exercise 75. x が A の内点 $\Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \subset A$.

Theorem 2.4.7. A の内部 A° は A の内点全体のなす集合である.

$$A^\circ = \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の内点}\}.$$

Proof. x が A の内点ならば, $x \in O \subset A$ となる開集合 O が存在する. O は A に含まれる開集合だから $O \subset A^\circ$. よって $x \in A^\circ$.

一方 $x \in A^\circ$ とすると, $x \in A^\circ \subset A$ であり, A° は開集合なので x は A の内点. □

2.5 閉包, 触点

Definition 2.5.1. X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A を含む X の閉集合すべての共通部分を A の閉包 (closure) といい, A^a または $\overline{A}$ で表す.

$$A^a = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F: \text{closed}}} F$$

(X は閉集合なので, A を含む閉集合は少なくともひとつは存在することに注意.)
Thm. 2.2.7 F3 により, A^a は閉集合である. また A を含む (包含関係に関して) 最小の閉集合である. (あきらかに $A^a \supset A$ であり, $F \supset A$ が閉集合であれば $F \supset A^a$ である.)

exercise 76. $A \subset B \Rightarrow A^a \subset B^a$.

exercise 77. $A: \text{closed} \Leftrightarrow A = A^a$.

定義を見るとわかるように内部と閉包には関係がある.

Theorem 2.5.2. $A^{ac} = A^{co}$.

Proof. $A^a \supset A$ ゆえ $A^{ac} \subset A^c$. A^{ac} は開集合で A^c に含まれるので $A^{ac} \subset A^{co}$.

一方, $A^c \supset A^{co}$ ゆえ $A \subset A^{coc}$. A^{coc} は閉集合で A を含んでいるので $A^a \subset A^{coc}$. よって $A^{ac} \supset A^{co}$.

なお, 定義の式を直接変形してもわかる. □

Corollary 2.5.3. $A^{oc} = A^{ca}$.

Proof. 上の定理を A^c に適用すればよい. □

Definition 2.5.4. $A \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とする.

x が A の触点 (adherent point) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x$ の任意の近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$.

つまり, x が A の触点であるというのは, x のいくらでも近くに A の点があるということ.

exercise 78. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とする. このとき

x が A の触点 $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}^*(x) : U \cap A \neq \emptyset$.

Lemma 2.5.5. x が A の触点 $\Leftrightarrow x$ は A^c の内点ではない.

Proof. $U \cap A = \emptyset \Leftrightarrow U \subset A^c$ に注意すれば, 定義と exe. 75 より明らか. $\square$

Theorem 2.5.6. A の閉包 A^a は A の触点全体のなす集合である.

$$A^a = \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の触点}\}.$$

すなわち, $x \in A^a \Leftrightarrow x$ の任意の近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$.

Proof.

$$\begin{aligned} x \in A^a &\Leftrightarrow x \in A^{c \circ c} \\ &\Leftrightarrow x \notin A^{c \circ} \\ &\Leftrightarrow x \text{ は } A^c \text{ の内点ではない} \\ &\Leftrightarrow x \text{ は } A \text{ の触点.} \end{aligned}$$

$\square$

Corollary 2.5.7. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の空でない有界閉集合は最大元, 最小元をもつ.

Proof. $A \subset \mathbb{R}$ を空でない有界閉集合とする. A は空でない有界集合だから上限が存在する. $s = \sup A$ とおく. Cor. 1.1.17 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $(s - \varepsilon, s] \cap A \neq \emptyset$ であるから s は A の触点ゆえ $s \in A^a$. A は閉集合だから $A^a = A$ である. よって $s \in A$ となり, $s = \max A$. 最小元についても同様. $\square$

Example 2.5.8. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ では開球の閉包は閉球である, すなわち $U_r(x)^a = B_r(x)$. (ただし $r > 0$.)

Proof. 例えば上の Thm. 2.5.6 を使えば, Ex. 2.4.2 と同様にして $U_r(x)^a = B_r(x)$ がわかる. 詳細は練習問題. $\square$

exercise 79. $n = 2$ のとき, 上の等式 $U_r(x)^a = B_r(x)$ を示せ. また, 距離空間において一般に $U_r(x)^a = B_r(x)$ は成り立つか?

Example 2.5.9. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Q}$ について, $\mathbb{Q}^a = \mathbb{R}$ である. (Lem. 2.4.5 および Thm. 2.5.6 からすぐわかる. 詳細は練習問題.)

exercise 80. 上の等式 $\mathbb{Q}^a = \mathbb{R}$ を示せ.

2.6 集積点, 孤立点, 導集合

Definition 2.6.1. X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

$x \in X$ が A の集積点 (accumulation point) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x$ の任意の近傍 U に対し $(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset$.

A の集積点の全体を A の導集合 (derived set) といい, A' であらわす.

A の点 $a \in A$ が A の集積点でないとき, すなわち $a \in A \cap (A')^c$ であるとき, a を A の孤立点 (isolated point) という.

x が A の集積点であるというのは, x のいくらでも近くに x ではない A の点があるということ. 触点の定義 (Def. 2.5.4) と比較するとわかるように, x が A の集積点であるということは, x が $A - \{x\}$ の触点であるということに他ならない. (Prop. 2.6.4 参照)

Remark . $A - \{x\} = A \cap \{x\}^c$ だから, $(A - \{x\}) \cap U = (A \cap \{x\}^c) \cap U = A \cap (\{x\}^c \cap U) = A \cap U \cap \{x\}^c$ なので,

$$(A - \{x\}) \cap U = A \cap (U - \{x\}) = A \cap U - \{x\}.$$

exercise 81. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とする. このとき

$$x \text{ が } A \text{ の集積点} \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}^*(x) : A \cap U - \{x\} \neq \emptyset.$$

Remark . 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において, 数列 $\{a_n\}$ の集積値 (Def. 1.4.4) と, $\{a_n\}$ を集合とみたときの集積点とは別の概念である.

exercise 82. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において, $a_n = 1/n$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の集積値と集積点を求めよ.

Example 2.6.2. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ について, $A' = \{0\}$ である. とくに A の点は全て孤立点.

Proof. 1. $0 \in A'$ であること. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $\frac{1}{n} < \varepsilon$ となる. よって $\frac{1}{n} \in A \cap U_\varepsilon(0) - \{0\} \neq \emptyset$ ゆえ $0 \in A'$.

2. 任意の $x \neq 0$ に対し, $x \notin A'$ であること.

(i) $x < 0$ のとき. $\varepsilon = -x$ とおけば, $\varepsilon > 0$ で, $A \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$ ゆえ $x \notin A'$.

(ii) $0 < x \leq 1$ のとき.

i. $x = \frac{1}{n} \in A$ のとき. $\varepsilon = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ とおけば, $\varepsilon > 0$ で, $A \cap U_\varepsilon(x) = \{x\}$.
よって $A \cap U_\varepsilon(x) - \{x\} = \emptyset$ ゆえ $x \notin A'$.

ii. $x \notin A$ のとき. $N = \min \{n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{n} < x\}$ とおけば, $N \geq 2$ で, $\frac{1}{N} < x$

$x < \frac{1}{N-1}$ である. $\varepsilon = \min \left\{ x - \frac{1}{N}, \frac{1}{N-1} - x \right\}$ とおけば, $\varepsilon > 0$ で,
 $A \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$ ゆえ $x \notin A'$.

(iii) $x > 1$ のとき. $\varepsilon = x - 1$ とおけば, $\varepsilon > 0$ で, $A \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset$ ゆえ $x \notin A'$.

□

Example 2.6.3. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Q}$ について, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ である.

Proof. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$ に対し, Lem. 2.4.5 より, $\mathbb{Q} \cap (U_\varepsilon(x) - \{x\}) \supset \mathbb{Q} \cap (x, x + \varepsilon) \neq \emptyset$.

□

exercise 83. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Z}$ について, $\mathbb{Z}' = \emptyset$ である.

Proposition 2.6.4. $x \in A' \Leftrightarrow x \in (A - \{x\})^a$.

Proof. Thm. 2.5.6 と集積点の定義から $x \in (A - \{x\})^a \Leftrightarrow x$ の任意の近傍 U について $U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in A'$.

□

A の閉包は, A に A の集積点を全て付け加えたものである.

Proposition 2.6.5. $A^a = A \cup A'$.

Proof. $A \subset A^a$ である. また上の Prop. 2.6.4 より $x \in A' \Rightarrow x \in (A - \{x\})^a \subset A^a$.
 よって $A' \subset A^a$, したがって $A \cup A' \subset A^a$.

一方 $x \in A^a$ かつ $x \notin A$ とすると, $A - \{x\} = A$ であるから, $x \in A^a = (A - \{x\})^a$ ゆえ $x \in A'$. したがって $A^a \subset A \cup A'$.

(cf. $A^a = A^a \cap (A \cup A^c) = (A^a \cap A) \cup (A^a \cap A^c) = A \cup (A^a \cap A^c)$)

□

Proposition 2.6.6. X を距離空間とする. このとき, $x \in A' \Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $U_\varepsilon(x) \cap A$ が無限集合.

Proof. $\Leftarrow$ はあきらか.

$\Rightarrow$. 対偶を示す. ある正の数 ε が存在して, $U_\varepsilon(x) \cap A$ が有限集合だとする. このとき $U_\varepsilon(x) \cap A - \{x\}$ も有限集合である. $U_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} = \emptyset$ のときは定義より $x \notin A'$. $U_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$ のとき, $U_\varepsilon(x) \cap A - \{x\} = \{a_1, \dots, a_n\}$ とする. $\varepsilon' = \min_{1 \leq i \leq n} d(x, a_i)$ とおくと, $\varepsilon' > 0$ であり, $U_{\varepsilon'}(x) \cap A - \{x\} = \emptyset$. よって $x \notin A'$.

□

exercise 84. 1. 上の $\Leftarrow$ を示せ.

2. 上で $U_{\varepsilon'}(x) \cap A - \{x\} = \emptyset$ であるのはなぜか説明せよ.

exercise 85. $x \in X$ が X の孤立点 $\Leftrightarrow \{x\}$ が X の開集合.

exercise 86. $A:\text{closed} \Leftrightarrow A' \subset A$.

exercise 87. $x \in A' \Rightarrow (A - \{x\})^a = A^a$. (逆はもちろん正しくない.)

問題集 . 80(1)-(5) (内部, 閉包, 導集合を求めよ.)

2.7 点列の収束

§1.2 で全順序体における数列の収束を考えたが、距離空間においても点列の収束を考えることができる。

Definition 2.7.1. X を集合とする。自然数の全体 $\mathbb{N}$ から X への写像を X の点列という。

点列 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ は $f(n) = x_n$ であるとき、しばしば、点列 $x_1, x_2, \dots$ あるいは点列 $\{x_n\}$ と表される。

Definition 2.7.2. X を距離空間とする。

X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束する $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x$ の任意の近傍 U に対し、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる。

点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとき、 x を点列 $\{x_n\}$ の極限点 (limit point) といい、 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ あるいは $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ 等とかく。

exercise 88. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とする。このとき次を示せ。

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow$ 任意の $U \in \mathcal{U}^*(x)$ に対し、ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して、 $n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる。

Remark. X を距離空間とする。 $x \in X$ に対し $\{U_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ および $\{U_{\frac{1}{k}}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ は x の基本近傍系であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : x_n \in U_\varepsilon(x) \\ \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : x_n \in U_{\frac{1}{k}}(x) \end{aligned}$$

である。とくに 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の点列 (実数列) の収束について、上の定義 2.7.2 と §1.2 の定義 1.2.4 は同値である。

exercise 89. d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の点列 $\{x_n\}$, $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nd})$ が $a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ に収束するための必要十分条件は全ての i ($1 \leq i \leq d$) について、実数列 $\{x_{ni}\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $a_i \in \mathbb{R}$ に収束することである。

Theorem 2.7.3. 距離空間 X においては、点列の極限点は、存在すれば、唯一つである。
(X が Hausdorff 空間 であればよい.)

Proof. 証明は Prop. 1.2.6 と同じ。 □

Theorem 2.7.4. X を距離空間, $A \subset X$ とする. このとき,

$$\begin{aligned} & A \text{ の点列 } \{a_n\} \text{ で } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \text{ となるものが存在する} \\ & \Leftrightarrow x \in A^a \\ & \Leftrightarrow d(x, A) = 0. \end{aligned}$$

Proof. $a_n \in A, a_n \rightarrow x$ とする. x の任意の近傍 U に対し, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n \in U$ である. とくに $a_N \in U \cap A$ ゆえ, $U \cap A \neq \emptyset$. よって Thm. 2.5.6 より $x \in A^a$.

Thm. 2.5.6 と, $\left\{U_{\frac{1}{n}}(x)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ が x の基本近傍系であることから,

$$\begin{aligned} x \in A^a & \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_{\frac{1}{n}}(x) \cap A \neq \emptyset \\ & \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, d(a_n, x) < \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (2.1)$$

である. この点列 $\{a_n\}$ を考えると, あきらかに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$.

また

$$\begin{aligned} (2.1) & \Leftrightarrow \inf_{a \in A} d(x, a) = 0 \\ & \Leftrightarrow d(x, A) = 0. \end{aligned}$$

□

exercise 90. $(2.1) \Leftrightarrow \inf_{a \in A} d(x, a) = 0$ を示せ.

このことから, 距離空間における閉集合を点列の極限を用いて特徴付けることができる.

Corollary 2.7.5. X を距離空間, $A \subset X$ とすると,

$$A : \text{closed} \Leftrightarrow A \text{ の点列 } \{a_n\} \text{ が極限点 } x \in X \text{ をもてば } x \in A.$$

Proof. $A : \text{closed} \Leftrightarrow A = A^a$ であることと, Thm. 2.7.4 より従う. □

exercise 91. X を距離空間とする. このとき

$$x \in A' \Leftrightarrow A \text{ の点列 } \{a_n\} \text{ で, } a_n \neq x \ (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ かつ } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \text{ となるものが存在する.}$$

2.8 距離空間の間の連続写像

Definition 2.8.1. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする.

写像 $f: X \rightarrow Y$ が点 $a \in X$ で連続 (continuous)

$\Leftrightarrow f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a の近傍 U が存在して $f(U) \subset V$ となる.

$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f: X \rightarrow Y$ が X の各点で連続であるとき f を連続写像 (continuous map) という.

距離空間においては ε 近傍が基本近傍系をなすことに注意すると, $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とすると,

写像 $f: X \rightarrow Y$ が点 $a \in X$ で連続

$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して $f(U_\delta(a)) \subset U_\varepsilon(f(a))$

$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x, a) < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ であることがわかる.

exercise 92. これを示せ.

Example 2.8.2. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とする. 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が $a \in \mathbb{R}$ で連続
 $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ となる.

Example 2.8.3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めると, f は連続である.

Proof. $a \in \mathbb{R}$ とする. f が a で連続であることを示す.

$\varepsilon > 0$ とする. $\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|a| + 1)\}$ とおくと $\delta > 0$ であり, $|x - a| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |x^2 - a^2| = |2a(x - a) + (x - a)^2| = |x - a||2a + x - a| \\ &\leq |x - a|(2|a| + |x - a|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}(2|a| + 1) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Remark. 上の式変形について.

$x^2 - a^2$ の大きさを $x - a$ の大きさで評価したい. f が連続であることを示すのに, f のテーラー展開を使うというのは相当本末転倒ではあるけれど, $f(x) = x^2$ を $x = a$ のまわりでテーラー展開すると, $x^2 = a^2 + 2a(x - a) + (x - a)^2$.

別の考え方としては, $x^2 = (x - a + a)^2 = (x - a)^2 + 2a(x - a) + a^2$. なお, 多項式の場合, 例えばこのような変形を使えば, テーラーの定理によらずにテーラー展開が出来ることを示せる.

□

Example 2.8.4. (X, d) を距離空間, $x_0 \in X$ とする. x_0 からの距離をはかる関数, すなわち, $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$ で定まる写像 $d_{x_0}: X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続である.

Proof. 三角不等式より, 任意の $a, x \in X$ に対し

$$-d(x, a) \leq d(x_0, x) - d(x_0, a) \leq d(x, a) \quad (2.2)$$

すなわち $|d(x_0, x) - d(x_0, a)| \leq d(x, a)$ であることがわかる. よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta = \varepsilon$ とおくと, $d(x, a) < \delta$ ならば,

$$|d_{x_0}(x) - d_{x_0}(a)| = |d(x_0, x) - d(x_0, a)| \leq d(x, a) < \delta = \varepsilon.$$

□

exercise 93. 不等式 (2.2) を示せ.

Theorem 2.8.5. X, Y を距離空間とする. このとき

$f: X \rightarrow Y$ が $a \in X$ で連続 $\Leftrightarrow$ 点 $a \in X$ に収束する任意の点列 $\{x_n\}$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

つまり, f が連続であるということは, $\lim_{n \rightarrow \infty}$ を中にいれることが出来る, すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right)$ となるということである.

Proof. $\Rightarrow$ f が $a \in X$ で連続であり, 点列 $\{x_n\}$ が a に収束するとする. $f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a の近傍 U で $f(U) \subset V$ となるものが存在する. この U に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる. したがって $n \geq N$ ならば $f(x_n) \in f(U) \subset V$ である. よって $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

$\Leftarrow$ 対偶, すなわち, f が点 a で連続でないならば, a に収束する点列 $\{x_n\}$ で, $f(x_n) \rightarrow f(a)$ とはならないものが存在することを示す.

f が点 a で連続でないとする. $f(a)$ の近傍 V で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f(U_{\frac{1}{n}}(a)) \not\subset V$ となるものがある. よって, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し点 $x_n \in U_{\frac{1}{n}}(a)$ で, $f(x_n) \notin V$ となるものがある. この点列 $\{x_n\}$ を考えると, あきらかに $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ だが, $f(x_n) \rightarrow f(a)$ ではない. □

exercise 94. $f(x, y) = x + y$, $g(x, y) = xy$ で与えられるユークリッド空間の間の写像 $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ は連続である.

問題集 . 85(2) 99 106

Example 2.8.6. (X, d_X) を距離空間, (Y, d_Y) を有界, すなわち $\delta(Y) < \infty$, である距離空間とする. X から Y への写像全体を $F(X, Y)$, 連続写像全体を $C(X, Y)$ で表す.

$f, g \in F(X, Y)$ に対し, 実数 $d(f, g)$ を

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

により定める (Y は有界だから $d(f, g) < \infty$) と, d は $F(X, Y)$ 上の距離関数である.

$\{f_n\}$ を $F(X, Y)$ の点列, すなわち X から Y への写像の列とする. $\{f_n\}$ が上で定めた距離に関して $f \in F(X, Y)$ に収束するとき, $\{f_n\}$ は f に 一様収束 (uniformly convergent) するという.

連続写像の列 $\{f_n\}$ が写像 f に一様収束するならば, f は連続である. よって Cor 2.7.5 より, この距離の定める位相に関して $C(X, Y)$ は $F(X, Y)$ の閉集合である.

Proof. 連続写像の列 $\{f_n\}$ が写像 f に一様収束するとき, f は連続であることを示す.

$a \in X$ を任意の点とする. $a \in X$ で f が連続であること, すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, a のある近傍 U が存在して, $x \in U$ ならば $d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となることを示せばよい.

$\varepsilon > 0$ とする. $\{f_n\}$ は f に一様収束するので, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $d(f_n, f) < \varepsilon/3$ となる. よって, 任意の $x \in X$ に対し $d_Y(f_N(x), f(x)) < \varepsilon/3$ である. f_N は連続であるから a のある近傍 U が存在して, $x \in U$ ならば $d_Y(f_N(x), f_N(a)) < \varepsilon/3$ となる. この U について, $x \in U$ ならば

$$d_Y(f(x), f(a)) \leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(a)) + d_Y(f_N(a), f(a)) < \varepsilon.$$

□

exercise 95. 上の d が $F(X, Y)$ 上の距離関数であることを示せ.

Definition 2.8.7. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする.

写像 $f: X \rightarrow Y$ が 一様連続 (uniformly continuous) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x, x') < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となる.

Remark. ε に対し δ が X の点によらずにとれる.

明かに一様連続ならば連続である.

exercise 96. 一様連続ならば連続であることを示せ.

Example 2.8.8. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = x^2$ で定めると, f は一様連続ではない. (Ex 2.8.3 参照.)

Proof. 任意の $\delta > 0$ に対し, $x = 1/\delta$ とすると, $|(x + \delta/2) - x| = \delta/2 < \delta$ であるが,

$$\begin{aligned}
 |f(x + \delta/2) - f(x)| &= \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2 \\
 &= \delta x + \frac{\delta^2}{4} \\
 &> \delta x = 1.
 \end{aligned}$$

□

Example 2.8.9. $X \supset A \neq \emptyset$ とする. $d_A(x) = d(x, A)$ で定まる関数 $d_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ は一様連続である. とくに Ex. 2.8.4 の関数 d_{x_0} は一様連続である.

Proof. 任意の $x, y \in X$ と, 任意の $a \in A$ に対し $d(x, y) + d(y, a) \geq d(x, a) \geq d(x, A)$, すなわち $d(x, y) + d(y, a) \geq d(x, A)$ だから, $d(x, y) + d(y, A) \geq d(x, A)$ が成り立つ. よって $d(x, y) \geq d(x, A) - d(y, A)$. x と y を入れ換えて $d(x, A) - d(y, A) \geq -d(x, y)$. よって

$$|d_A(x) - d_A(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

□

問題集 . 97 103(1)(2)

第 3 章

位相空間

3.1 位相空間

前章で距離空間について述べたが、その多くの性質は、距離そのものではなく、距離の定める位相に基づいたものである。距離空間における開集合の性質 (Thm. 2.2.4) をもとに次の定義をあたえる。

Definition 3.1.1. X を集合とする。 X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ (すなわち $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$) が次の 3 つの条件 O1, O2, O3 をみたすとき、 $\mathcal{O}$ は X に位相を定めるといい、組 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間 (topological space) という。混乱のおそれのないときは $\mathcal{O}$ を省略して、位相空間 X と書くことが多い。また、しばしば、 $\mathcal{O}$ のことを X の位相 (topology) とよぶ。

O1 $X, \emptyset \in \mathcal{O}$.

O2 $O_1, O_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

O3 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ の元を X の開集合 (open set) とよぶ。

Remark . 距離空間の場合に述べたように、O2 から帰納法により、有限個の開集合の共通部分は開集合となることがわかるが、無限個では一般にはそうではない。

Remark . 以下おいおい述べるかもしれないが、集合に位相を定める方法は開集合族を定める以外にもいろいろある。そのため、 X の位相を表すのに $\mathcal{O}$ とは別に記号を用意して、「 $\mathcal{O}$ の定める位相 T 」といった言い方をすることもある。この講義ではたいていの場合、 $\mathcal{O}$ のことを位相とよぶことにする。

Example 3.1.2. Thm 2.2.4 から距離空間において「距離の定める位相」は位相であることがわかる。すなわち距離空間 X における開集合の全体は X に位相を定める。

以下、とくにことわらないかぎり距離空間 X は距離の定める位相により位相空間と考える.

Example 3.1.3. X を集合とする. 冪集合 $\mathcal{P}(X)$ はあきらかに X に位相を定める. この位相を X の 離散位相 (discrete topology) という.

Example 3.1.4. X を集合とする. $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ は X に位相を定める. この位相を X の 密着位相 (trivial topology, indiscrete topology) という.

Example 3.1.5. X を集合とする.

$$\mathcal{O} = \{A \subset X \mid A^c \text{ は有限集合}\} \cup \{\emptyset\}$$

とすると, $\mathcal{O}$ は X に位相を定める.

Proof. O1 $X^c = \emptyset$ は有限集合ゆえ $X \in \mathcal{O}$.

O2 $A_1, A_2 \in \mathcal{O}$ とする. A_1, A_2 いずれかが空集合の場合は, $A_1 \cap A_2 = \emptyset \in \mathcal{O}$.

どちらも空集合ではない場合, A_1^c, A_2^c どちらも有限集合. よって $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$ も有限集合. したがって $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}$.

O3 $A_\lambda \in \mathcal{O}$ とする. すべての $\lambda \in \Lambda$ に対し, $A_\lambda = \emptyset$ であれば, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \emptyset \in \mathcal{O}$. ある $\lambda_0 \in \Lambda$ に対し $A_{\lambda_0} \neq \emptyset$ である場合, $A_{\lambda_0}^c$ は有限集合である.

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \subset A_{\lambda_0}^c$$

であるから, $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c$ は有限集合.

□

とくに, $X = \mathbb{R}$ の場合, この位相を $\mathbb{R}$ の ザリスキー位相 (Zariski topology) という. (ザリスキー位相は通常は別の言い方で定義される. 代数幾何学の本を参照のこと.)

これらの例からもわかるように, ひとつの集合 X に入る位相はひとつだけとは限らない.

Definition 3.1.6. X を集合, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相とする. $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ であるとき, 位相 $\mathcal{O}_1$ は位相 $\mathcal{O}_2$ より 弱い (weaker) または 粗い (coarser), あるいは, 位相 $\mathcal{O}_2$ は位相 $\mathcal{O}_1$ より 強い (stronger) または 細かい (finer) といつて, $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ と書く.

あきらかに位相の強弱は, 集合 X に入れることの出来る位相全体に順序関係を与え, 密着位相が最弱, すなわちこの順序で最小の位相であり, 離散位相が最強, すなわちこの順序で最大の位相である.

問題集 . 124, 125, 127, 130.

exercise 97. X が有限集合のとき, Ex. 3.1.5 の位相は離散位相であることを示せ. X が無限集合の場合はどうか?

3.2 基本概念

この章のはじめに述べたように、前章で調べた距離空間の性質の多くは距離の定める位相に基づくものである。よって、その多くは一般の位相空間でもそのまま成り立つ。ここで基本的な定義、性質をまとめておく。次節以降、これらについて、前章で扱わなかったことなどを述べる。また、連続写像については後ほど詳しく扱うのでここではとりあげていない。

3.2.1 閉集合

Definition 3.2.1. (Def. 2.2.6) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $F \subset X$ を部分集合とする。このとき F が X の 閉集合 (closed set) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} F$ の補集合 F^c が X の開集合である。

Theorem 3.2.2. (Thm. 2.2.7) $\mathcal{F} = \{F \mid F \text{ は } X \text{ の閉集合}\}$ は次をみたす。

- F1 $X, \emptyset \in \mathcal{F}$.
- F2 $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.
- F3 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{F}$.

閉集合族を指定することで位相を定めることができる。

Theorem 3.2.3. X を集合とする。 X の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が定理 3.2.2 の3つの条件 F1, F2, F3 をみたすとする。このとき、 X の部分集合の族

$$\{O \subset X \mid O^c \in \mathcal{F}\}$$

は X に位相を定め、 $\mathcal{F}$ はこの位相に関する閉集合全体である。

また、位相空間の閉集合全体からこのようにして定めた位相はもとの位相と一致する。

Proof. あきらか。 □

問題集 . 132, 133, 134, 135

3.2.2 近傍

Definition 3.2.4. (Def. 2.3.1) X を位相空間とする。

1. $U \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とする。このとき

U が x の近傍 (neighbourhood) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in O \subset U$ となるような (X の) 開集合 O が存在する.

特に, 点 x を含む開集合は x の近傍である. x を含む開集合を x の開近傍 (open neighbourhood) という.

x の近傍でかつ閉集合であるものを x の閉近傍 (closed neighbourhood) という.

2. 集合

$$\mathcal{U}(x) = \{U \subset X \mid U \text{ は } x \text{ の近傍}\}$$

を x の近傍系 (system of neighbourhoods) という.

3. $A, U \subset X$ を部分集合とする. このとき

U が A の近傍 (neighbourhood) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subset O \subset U$ となるような (X の) 開集合 O が存在する.

Definition 3.2.5. (Def. 2.3.4) X を位相空間, $x \in X$ とし, $\mathcal{U}(x)$ を x の近傍系とする. このとき

$\mathcal{U}^*(x)$ が x の基本近傍系 (fundamental system of neighbourhood) である

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & \mathcal{U}^*(x) \subset \mathcal{U}(x) \\ \text{(ii)} & \text{任意の } U \in \mathcal{U}(x) \text{ に対し, ある } V \in \mathcal{U}^*(x) \text{ が存在して, } V \subset U \text{ となる.} \end{cases}$$

Theorem 3.2.6. (Thm. 2.3.3) $O \subset X$ を部分集合とする. このとき

O が開集合である $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in O$ に対し $O \in \mathcal{U}(x)$.

3.2.3 内部, 内点

Definition 3.2.7. (Def. 2.4.1) X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A に含まれる X の開集合すべての和集合を A の内部 (interior) といい, A° で表す.

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{O \subset A \\ O: \text{open}}} O$$

Definition 3.2.8. (Def. 2.4.6, exe. 75) $A \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とする.

x が A の内点 (inner point, interior point) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x$ のある近傍 U が存在して, $U \subset A$.

Theorem 3.2.9. (Thm. 2.4.7) A の内部 A° は A の内点全体のなす集合である.

$$A^\circ = \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の内点}\}.$$

すなわち, $x \in A^\circ \Leftrightarrow x$ のある近傍 U が存在して, $U \cap A^c = \emptyset$.

3.2.4 閉包, 触点

Definition 3.2.10. (Def. 2.5.1) X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A を含む X の閉集合すべての共通部分を A の閉包 (closure) といい, A^a または $\overline{A}$ で表す.

$$A^a = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F: \text{closed}}} F$$

Definition 3.2.11. (Def. 2.5.4) $A \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とする.

x が A の触点 (adherent point) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x$ の任意の近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$.

Theorem 3.2.12. (Thm. 2.5.6) A の閉包 A^a は A の触点全体のなす集合である.

$$A^a = \{x \in X \mid x \text{ は } A \text{ の触点}\}.$$

すなわち, $x \in A^a \Leftrightarrow x$ の任意の近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$.

Theorem 3.2.13. (Thm. 2.5.2) $A^{ac} = A^{co}$.

Corollary 3.2.14. (Cor. 2.5.3) $A^{oc} = A^{ca}$.

3.2.5 集積点, 孤立点, 導集合

Definition 3.2.15. (Def. 2.6.1) X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

$x \in X$ が A の集積点 (accumulation point) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x$ の任意の近傍 U に対し $(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset$.

A の集積点の全体を A の導集合 (derived set) といい, A' であらわす.

A の点 $a \in A$ が A の集積点でないとき, すなわち $a \in A \cap (A')^c$ であるとき, a を A の孤立点 (isolated point) という.

Proposition 3.2.16. (Prop. 2.6.4) $x \in A' \Leftrightarrow x \in (A - \{x\})^a$.

Proposition 3.2.17. (Prop. 2.6.5) $A^a = A \cup A'$.

3.2.6 点列の収束

Definition 3.2.18. (Def. 2.7.2) X を位相空間とする. X の点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束する $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x$ の任意の近傍 U に対し, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる.

点列 $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束するとき, x を点列 $\{x_n\}$ の 極限点 (limit point) といい, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ あるいは $x_n \rightarrow x (n \rightarrow \infty)$ 等とかく.

一般の位相空間の場合, 点列の収束に関しては必ずしも距離空間のようによいふるまいをするわけではない.

Thm. 2.7.3 で述べたように, 距離空間 X においては, 点列の極限点は, 存在すれば, 唯一つであるが, 次の問題からわかるように, 一般の位相空間の場合, 必ずしもそうではない. このことについては後の節で再びふれるであろう.

exercise 98. X を密着位相空間とする. このとき, X の任意の点列は X の任意の点に収束する.

また, Thm. 2.7.4, Cor. 2.7.5 については, 以下の形で成立する.

Theorem 3.2.19. (Thm. 2.7.4) X を位相空間, $A \subset X$ とする. このとき, A の点からなる点列 $\{a_n\}$ (i.e. $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in A$) が $x \in X$ に収束すれば $x \in A^a$ である.

Corollary 3.2.20. (Cor. 2.7.5) $A : \text{closed} \Rightarrow A$ の点列 $\{a_n\}$ が極限点 $x \in X$ をもてば $x \in A$.

いずれも, 一般の位相空間では逆は必ずしも成立しないが, 考えている空間が第一可算公理 (Def. 3.3.3) をみたせば逆も成り立つ. また, 点列ではなく, フィルターの収束という概念を使えば, 一般の位相空間でも「逆」も成り立つ.

3.3 近傍

Theorem 3.3.1. X を位相空間, $\mathcal{U}(x)$ を $x \in X$ の近傍系とする. 次が成り立つ.

- U1 $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow x \in U$.
- U2 $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.
- U3 $U_1 \in \mathcal{U}(x), U_1 \subset U_2 \Rightarrow U_2 \in \mathcal{U}(x)$.
- U4 任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対し, ある $V \in \mathcal{U}(x)$ が存在して, $V \subset U$ かつ, 任意の $y \in V$ について $U \in \mathcal{U}(y)$ となる.

Remark. U4 は気分としては, 近所は, 近所の近所.

Proof. U1 あきらか.

- U2 $U_i \in \mathcal{U}(x)$ とすると, 定義より $x \in O_i \subset U_i$ となる開集合 O_i が存在する. このとき $x \in O_1 \cap O_2 \subset U_1 \cap U_2$ であり, $O_1 \cap O_2$ は開集合であるから $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$.
- U3 $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ とすると, ある開集合 O が存在して $x \in O \subset U_1$ となる. $U_1 \subset U_2$ であれば, $x \in O \subset U_2$ であるから $U_2 \in \mathcal{U}(x)$.
- U4 $U \in \mathcal{U}(x)$ とすると, $x \in O \subset U$ となる開集合 O がある. $V := O$ とすれば, V は x を含む開集合なので $V \in \mathcal{U}(x)$ であり, $V \subset U$. また任意の $y \in V$ について, $y \in V \subset U$ かつ, V は開集合ゆえ, $U \in \mathcal{U}(y)$.

□

Thm. 3.2.6 でみたように開集合は近傍を用いて特徴づけられるが, 基本近傍系を用いて特徴付けることもできる.

Proposition 3.3.2. $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とする.

O が開集合である $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in O$ に対し, ある $V \in \mathcal{U}^*(x)$ が存在して, $V \subset O$ となる.

Proof. $\Rightarrow$) $x \in O$ とすると, 定理 3.2.6 より, $O \in \mathcal{U}(x)$. よって, 基本近傍系の定義より $V \subset O$ となる $V \in \mathcal{U}^*(x)$ が存在する.

$\Leftarrow$) $x \in O$ とすると, 仮定より $V \subset O$ となる $V \in \mathcal{U}^*(x)$ が存在する. 基本近傍系の定義より V は x の近傍なので, 定理 3.3.1 U3 より $O \in \mathcal{U}(x)$. よって, 定理 3.2.6 より, O は開集合. □

Definition 3.3.3. 位相空間 X が第一可算公理 (first axiom of countability) をみたす

$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ が高々可算個の近傍からなる基本近傍系をもつ.

def

Proposition 3.3.4. 距離空間は第一可算公理をみたす. □

近傍系を指定することで位相を定めることができる.

Theorem 3.3.5. X を集合とする. 各点 $x \in X$ に対し, $\emptyset \neq \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ が与えられ, 定理 3.3.1 の U1~U4 が成り立つとする. このとき, 部分集合 $O \subset X$ に対し,

$$O \text{ が開集合である} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{任意の } x \in O \text{ に対し } O \in \mathcal{U}(x)$$

と定めると, 開集合全体は X に位相を定め, $\mathcal{U}(x)$ はこの位相に関する $x \in X$ の近傍系である.

また, 位相空間の近傍系からこのようにして定めた位相はもとの位相と一致する. □

問題集 . 147

3.4 内部, 閉包, 外部, 境界

Theorem 3.4.1. $A, B \subset X$ を部分集合とするととき次が成り立つ.

- I1 $A^\circ \subset A$.
- I2 $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
- I3 $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.
- I4 $X^\circ = X, \emptyset^\circ = \emptyset$.

Proof. I1, I4 はあきらか.

I2. $(A \cap B)^\circ \subset A \cap B \subset A$ であり, $(A \cap B)^\circ$ は開集合ゆえ $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$. 同様に $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$. よって $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$. 一方 $A^\circ \subset A$ かつ $B^\circ \subset B$ ゆえ $A^\circ \cap B^\circ \subset A \cap B$. $A^\circ \cap B^\circ$ は開集合なので $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$.

I3. A° は A° に含まれる開集合であるから $A^\circ \subset (A^\circ)^\circ$. また I1 より $(A^\circ)^\circ \subset A^\circ$. $\square$

exercise 99. 上の I1, I4 を示せ.

和集合の内部については次がいえる.

exercise 100. $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$ が成り立つ. しかし $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ は一般には成立しない.

無限個の共通部分の内部については次の包含関係が成り立つ. しかし等号は一般には成立しない.

exercise 101. $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^\circ \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^\circ$ を示せ.

Example 3.4.2. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間, $x \in \mathbb{R}$ とする. $n \in \mathbb{N}$ に対し $A_n = (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \subset \mathbb{R}$ とおく. $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ であるから, $(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)^\circ = \{x\}^\circ = \emptyset$. 一方 A_n は開集合なので $A_n^\circ = A_n$. よって $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^\circ = \{x\}$.

exercise 102. 上の例の等式 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x\}$ および $\{x\}^\circ = \emptyset$ を示せ.

Theorem 3.4.3. $A, B \subset X$ を部分集合とするととき次が成り立つ.

- A1 $A^a \supset A$.
- A2 $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$.
- A3 $(A^a)^a = A^a$.
- A4 $X^a = X, \emptyset^a = \emptyset$.

Proof. Thms. 3.4.1, 3.2.13 を使えば

$$(A \cup B)^a = (A \cup B)^{coc} = (A^c \cap B^c)^{oc} = (A^{co} \cap B^{co})^c = A^{coc} \cup B^{coc} = A^a \cup B^a$$

等として示せる. もちろん別の方法もある. $\square$

Remark. 共通部分については, $(A \cap B)^a \subset A^a \cap B^a$ が成り立つが等号は一般には成立しない.

$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ を考えると, 先にみたように $\mathbb{Q}^a = \mathbb{R}$. 同様にして $\mathbb{Q}^{ca} = \mathbb{R}$ であることもわかる. したがって $\mathbb{Q}^a \cap \mathbb{Q}^{ca} = \mathbb{R}$. 一方 $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c)^a = \emptyset$.

Definition 3.4.4. $A \subset X$ を部分集合とする. A の補集合の内部を A の 外部 (exterior) といい, A^e で表す.

$$A^e = (A^c)^\circ.$$

A^e の点を A の 外点 という.

A の外部は, A と交わらない最大の開集合である. 実際 A^e は A^c の内部だから開集合であり, $A^e \subset A^c$ だから $A^e \cap A = \emptyset$ である. O を $O \cap A = \emptyset$ である開集合とすると, $O \subset A^c$ だから $O \subset (A^c)^\circ = A^e$.

Definition 3.4.5. $A^f := (A^\circ \cup A^e)^c$ を A の 境界 (frontier) という.

A°, A^e はともに開集合であるから, その補集合である A^f は閉集合である. また $A^\circ \cap A^e = \emptyset$ であることに注意すると, X は A°, A^f, A^e の disjoint union になっている.

$$X = A^\circ \sqcup A^f \sqcup A^e.$$

Theorem 3.4.6. $\mathcal{U}^*(x)$ を $x \in X$ の基本近傍系とする. 次は同値である.

1. $x \in A^f$.
2. x の任意の近傍 U について, $U \cap A \neq \emptyset$ かつ $U \cap A^c \neq \emptyset$.
3. 任意の $U \in \mathcal{U}^*(x)$ について, $U \cap A \neq \emptyset$ かつ $U \cap A^c \neq \emptyset$.

Proof. 1 $\Leftrightarrow$ 2. Thm 3.2.9 より,

$$x \in A^\circ \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A^c = \emptyset.$$

同じ議論を A^c に使って

$$x \in A^e = (A^c)^\circ \Leftrightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A = \emptyset.$$

したがって

$$\begin{aligned} x \in A^f &\Leftrightarrow x \notin A^\circ \text{ かつ } x \notin A^e \\ &\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } U \cap A^c \neq \emptyset. \end{aligned}$$

2 $\Leftrightarrow$ 3 はやさしい. □

exercise 103. 2 $\Leftrightarrow$ 3 を示せ.

Corollary 3.4.7. $A^f = (A^c)^f$.

Proof.

$$\begin{aligned} x \in A^f &\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } U \cap A^c \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap (A^c)^c \neq \emptyset \text{ かつ } U \cap A^c \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow x \in (A^c)^f. \end{aligned}$$

あるいは $(A^c)^e = ((A^c)^c)^\circ = A^\circ$ に注意して,

$$(A^c)^f = ((A^c)^\circ \cup (A^c)^e)^c = (A^e \cup A^\circ)^c = A^f.$$

□

Theorem 3.4.8. $A^a = A^{ec} = A^\circ \sqcup A^f$.

Proof. 外部の定義と Thm 3.2.13 よりあきらか. □

Theorem 3.4.9. X を集合とする.

1. 写像 $(-)^{\circ} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ が Thm. 3.4.1 の I1~I4 をみたすとする. このとき, 部分集合 $A \subset X$ に対し,

$$A \text{ が開集合である } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A = A^\circ$$

と定めると, 開集合全体は X に位相を定め, A° はこの位相に関する A の内部である.

また, 位相空間の内部からこのようにして定めた位相はもとの位相と一致する.

2. 写像 $(-)^a : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ が Thm. 3.4.3 の A1~A4 をみたすとする. このとき, 部分集合 $A \subset X$ に対し,

$$A \text{ が閉集合である } \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A = A^a$$

と定めることにより X に位相が入り, A^a はこの位相に関する A の閉包である.

また, 位相空間の閉包からこのようにして定めた位相はもとの位相と一致する.



問題集 . 80(1)-(5) (外部, 境界を求めよ.) , 157

3.5 稠密, 全疎

Definition 3.5.1. $A \subset X$ を部分集合とする.

A が X で 稠密 (dense) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A^a = X$.

Definition 3.5.2. ある可算部分集合が存在して, それが X で稠密であるとき, X は 可分 (separable) であるという.

Proposition 3.5.3. A が X で稠密

$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ と, x の任意の近傍 U に対し, $U \cap A \neq \emptyset$

$\Leftrightarrow$ 空でない任意の開集合 O に対し, $O \cap A \neq \emptyset$.

Proof. 最初の同値は Thm. 3.2.12 よりあきらか. 2つ目の同値は,

$\Rightarrow$) O を空でない開集合とする. $x \in O$ をひとつとる. O は x を含む開集合だから x の近傍. よって仮定から $O \cap A \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) $x \in X$ とする. U を x の近傍とすると, $x \in O \subset U$ となる開集合 O が存在する. $x \in O$ だから $O \neq \emptyset$. よって仮定より $O \cap A \neq \emptyset$. したがって $U \cap A \neq \emptyset$. $\square$

exercise 104. 1. 上の最初の同値を説明せよ.

2. A が X で稠密 $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ と, 任意の $U \in \mathcal{U}^*(x)$ に対し, $U \cap A \neq \emptyset$. ただし $\mathcal{U}^*(x)$ は x の基本近傍系.

exercise 105. $x \in X$ が X の集積点 $\Leftrightarrow X \setminus \{x\}$ が X で稠密. (cf. Prop. 3.2.16, exe. 85)

Corollary 3.5.4. $A, B \subset X$ を X で稠密な部分集合で, B は開集合だとする. このとき $A \cap B$ も X で稠密である.

Proof. O を空でない開集合としたとき, $O \cap (A \cap B) \neq \emptyset$ であることを示せばよい. 仮定から B は稠密なので, $O \cap B \neq \emptyset$. O, B は開集合だから $O \cap B$ は空でない開集合である. A は稠密だから $(O \cap B) \cap A \neq \emptyset$. $\square$

帰納法で容易に次がわかる.

Corollary 3.5.5. $A \subset X$ を X で稠密な部分集合, $O_1, \dots, O_n \subset X$ を X で稠密な開集合とする. このとき $A \cap (\bigcap_{i=1}^n O_i)$ も X で稠密である. とくに $\bigcap_{i=1}^n O_i$ も X で稠密である.

Example 3.5.6. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ において $\mathbb{Q}$ は稠密ゆえ, $\mathbb{R}$ は可分.

$\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c$ は $\mathbb{R}$ で稠密であるが $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}^c = \emptyset$ は稠密ではない.

Example 3.5.7. X を離散位相空間とする. このとき任意の $A \subset X$ について $A^a = A$ であるから X が可算集合でなければ X は可分ではない. とくに $\mathbb{R}$ に離散距離をいれたものは可分ではない.

Example 3.5.8. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\mathbb{Q}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Q} \ (\forall i)\} \subset \mathbb{R}^n$$

は稠密だから $\mathbb{R}^n$ は可分.

Proof. 任意の $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ と, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, Lem. 2.4.5 より全ての i に対し $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. よって

$$\left(\prod_{i=1}^n (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon) \right) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset.$$

よって $x \in (\mathbb{Q}^n)^a$. (cf. Ex. 2.3.6.) □

Example 3.5.9. Ex. 2.1.9 の $\mathbb{R}^\infty$ の部分集合 A を次で定める.

$$A = \{(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \mid x_i \in \mathbb{Q} \ (1 \leq i \leq k), \ k \in \mathbb{N}\}$$

すなわち A の元は, はじめの有限個は有理数, 残りは全て 0 であるような実数列. このとき A は可算集合であり $\mathbb{R}^\infty$ で稠密である. よって $\mathbb{R}^\infty$ は可分.

Proof. $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$A_k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, 0, \dots) \mid x_i \in \mathbb{Q} \ (1 \leq i \leq k)\}$$

とおくと, 集合として $A_k \cong \mathbb{Q}^k$ であり, $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ だから, A は可算集合である.

$x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$ とする. $\forall \varepsilon > 0$ に対し $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ であることを示す.

$\varepsilon > 0$ とする. $k \in \mathbb{N}$ を十分大きくとると

$$\sum_{i=1}^\infty x_i^2 - \sum_{i=1}^k x_i^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

となる. $y_1, \dots, y_k \in \mathbb{Q}$ を $|y_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2k}}$ となるようにとる. このとき $y = (y_1, \dots, y_k, 0, 0, \dots) \in A$ と x の距離は

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^\infty (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^k (x_i - y_i)^2 + \sum_{i=k+1}^\infty x_i^2} < \sqrt{k \frac{\varepsilon^2}{2k} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.$$

よって $y \in U_\varepsilon(x)$ となり, $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$. したがって $x \in A^a$. □

Definition 3.5.10. $A, B \subset X$ とする.

A が B において稠密 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A^a \supset B$.

Example 3.5.11. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とする.

1. $(0, 1) \subset (0, 1] \subset \mathbb{R}$ について, $(0, 1)^a = [0, 1] \supset (0, 1]$ だから, $(0, 1)$ は $(0, 1]$ において稠密.
2. $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}^c \subset \mathbb{R}$ について, $\mathbb{Q}^a = \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}^c$, $\mathbb{Q}^{ca} = \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ だから, $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{Q}^c$ において, $\mathbb{Q}^c$ は $\mathbb{Q}$ においてそれぞれ稠密.

Definition 3.5.12. $A \subset X$ とする.

A が全疎 (nowhere dense) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (A^a)^\circ = \emptyset$.

Proposition 3.5.13. A が全疎 $\Leftrightarrow A^e$ が X で稠密.

Proof.

$$(A^a)^\circ = (A^a)^{cac} = A^{acac} = (A^{ac})^{ac} = (A^e)^{ac} = (A^{ea})^c$$

だから,

$$\begin{aligned} A \text{ が全疎} &\Leftrightarrow (A^{ea})^c = (A^a)^\circ = \emptyset \\ &\Leftrightarrow A^{ea} = X \\ &\Leftrightarrow A^e \text{ が稠密.} \end{aligned}$$

□

Proposition 3.5.14. A が全疎 $\Leftrightarrow$ 任意の空でない開集合 $O \subset X$ に対し, O に含まれる空でない開集合 $O' \subset O$ で, $O' \cap A = \emptyset$ となるものが存在する.

Proof. Prop. 3.5.13, Prop. 3.5.3 より, A が全疎 $\Leftrightarrow A^e$ が稠密 $\Leftrightarrow$ 任意の空でない開集合 $O \subset X$ に対し $O \cap A^e \neq \emptyset$ であることに注意.

$\Rightarrow$) $O' = O \cap A^e$ とおくと, 上の注意から O' は空でない. また A^e は開集合なので O' も開集合で, あきらかに O に含まれる. $O' \subset A^e \subset A^c$ だから $O' \cap A = \emptyset$.

$\Leftarrow$) O を空でない開集合とする. $O \cap A^e \neq \emptyset$ を示せばよい. 仮定より, 空でない開集合 $O' \subset O$ で $O' \cap A = \emptyset$ となるものが存在する. O' は A と交わらない開集合だから $O' \subset A^e$. よって, $O \cap A^e \supset O' \neq \emptyset$. □

3.6 相対位相, 部分空間

Definition 3.6.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A の部分集合族 $\mathcal{O}_A$ を

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

と定めると, $\mathcal{O}_A$ は A の位相となる. この位相を X による A の 相対位相 (relative topology) という.

位相空間の部分集合に相対位相をいれて位相空間とみたとき, 部分空間 (subspace) という.

exercise 106. $\mathcal{O}_A$ が A に位相を定めることを示せ.

Example 3.6.2. Thm. 2.2.10 より, 部分距離空間の位相は相対位相である.

Proposition 3.6.3. X を位相空間, A をその部分空間とする. このとき,

$B \subset A$ が A の閉集合である $\Leftrightarrow X$ のある閉集合 F が存在して, $B = A \cap F$.

Proof. $B \subset A$ に対し, B の X における補集合を B^c , A における補集合を $B^{c'}$ と書くことにする.

$$\begin{aligned} B^c &= \{x \in X \mid x \notin B\} \\ B^{c'} &= \{x \in A \mid x \notin B\} = A \cap B^c. \end{aligned}$$

$C \subset X$ とすると,

$$(A \cap C)^{c'} = A \cap (A \cap C)^c = A \cap (A^c \cup C^c) = A \cap C^c$$

であることに注意.

$\Rightarrow$) B が A の閉集合であるとする. $B^{c'}$ は A の開集合. よって X の開集合 O が存在して, $B^{c'} = A \cap O$ となる. $F = O^c$ とおけば, F は X の閉集合であり,

$$B = (B^{c'})^{c'} = (A \cap O)^{c'} = A \cap O^c = A \cap F.$$

$\Leftarrow$) F が X の閉集合で, $B = A \cap F$ であるとする. $O = F^c$ とおけば, O は X の開集合である.

$$B^{c'} = (A \cap F)^{c'} = A \cap F^c = A \cap O$$

となり, $B^{c'}$ は A の開集合, ゆえ B は A の閉集合. □

Remark . $B \subset A \subset X$ とする.

$B = A \cap B$ であるので, B が X の開 (閉) 集合であれば, B は部分空間 A の開 (閉) 集合である. しかし逆は一般には成立しない.

実際, A が X の開 (閉) 集合ではないとき, A は部分空間 A では開 (閉) 集合であるが, X ではそうではない.

Proposition 3.6.4. X を位相空間, $A \subset X$ をその開 (閉) 集合とする. このとき, $B \subset A$ が部分空間 A の開 (閉) 集合ならば, B は X でも開 (閉) 集合である.

Proof. A が X の開集合, B が A の開集合であるとする. このとき, X の開集合 O が存在して, $B = A \cap O$ となる. A, O ともに X の開集合であるから, B も X の開集合.

閉集合の方も同様.

□

exercise 107. 閉集合の方を示せ.

exercise 108. X を位相空間, A をその部分空間, $x \in A, V \subset A$ とする. このとき

V が A における x の近傍 $\Leftrightarrow x$ の X における近傍 U が存在して, $V = U \cap A$.

問題集 . 179

Example 3.6.5. $n+1$ 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間

$$S^n = \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}$$

(原点を中心とする半径 1 の球面) を n 次元球面 (n -dimensional sphere) という.

3.7 連続写像

Definition 3.7.1. (Def. 2.8.1) X, Y を位相空間とする.

写像 $f: X \rightarrow Y$ が点 $a \in X$ で連続 (continuous)

$\Leftrightarrow f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a の近傍 U が存在して $f(U) \subset V$ となる.

$f: X \rightarrow Y$ が X の各点で連続であるとき f を連続写像 (continuous map, continuous mapping) という.

Definition 3.7.2. 連続写像 $f: X \rightarrow Y$ は, 全単射でありかつ逆写像 f^{-1} も連続であるとき, 同相写像 (homeomorphism) であるという.

X から Y への同相写像が存在するとき, X と Y は同相 (homeomorphic) であるという.

Proposition 3.7.3. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が点 $a \in X$ で連続 $\Leftrightarrow f(a)$ の任意の近傍 V に対し, $f^{-1}(V)$ は a の近傍である.

Proof. $f(U) \subset V \Leftrightarrow U \subset f^{-1}(V)$ であり, 近傍を含む部分集合は近傍であること (Thm. 3.3.1 U3) と, $f(f^{-1}(V)) \subset V$ であることに注意すれば明らか. $\square$

exercise 109. 証明の詳細を.

位相空間の間の連続写像は以下のように特徴付けられる.

Theorem 3.7.4. $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 次は同値.

1. f は連続.
2. 開集合の f による逆像は開集合.
すなわち, Y の任意の開集合 O に対し, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である.
3. 閉集合の f による逆像は閉集合.
すなわち, Y の任意の閉集合 F に対し, $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である.
4. X の任意の部分集合 A に対し, $f(A^a) \subset f(A)^a$.

Proof. $1 \Rightarrow 2$) f が連続とし, $O \neq \emptyset$ を Y の開集合とする. 任意の $x \in f^{-1}(O)$ に対し, $f(x) \in O$ であり, O は開集合だから, O は $f(x)$ の近傍である. f は点 x で連続なので, Prop. 3.7.3 より $f^{-1}(O)$ は x の近傍である. よって Thm. 3.2.6 より $f^{-1}(O)$ は開集合である.

$2 \Rightarrow 1$) 任意の開集合の逆像は開集合であるとする. $x \in X$ とし, V を $f(x)$ の近傍とする. 近傍の定義から, $f(x) \in O \subset V$ となる開集合 O が存在する. $U = f^{-1}(O)$ とおけば,

仮定より U は開集合であり, $x \in U$ であるから, U は x の近傍である. $f(U) \subset O \subset V$ であるから, f は点 x で連続. x は任意にとったので f は連続.

$2 \Leftrightarrow 3$ はやさしい.

$3 \Rightarrow 4$) 任意の閉集合の逆像が閉集合であるとする. $f(A) \subset f(A)^a$ であるから $A \subset f^{-1}(f(A)^a)$. $f(A)^a$ は閉集合であるから仮定より $f^{-1}(f(A)^a)$ も閉集合. よって, $A^a \subset f^{-1}(f(A)^a)$, すなわち, $f(A^a) \subset f(A)^a$.

$4 \Rightarrow 3$) 任意の A に対し, $f(A^a) \subset f(A)^a$ であるとする. $F \subset Y$ を閉集合とする. $f(f^{-1}(F)) \subset F$ に注意すると, 仮定より $f(f^{-1}(F)^a) \subset f(f^{-1}(F))^a \subset F^a = F$. よって $f^{-1}(F)^a \subset f^{-1}(F)$ となり, $f^{-1}(F)^a = f^{-1}(F)$. したがって $f^{-1}(F)$ は閉集合. $\square$

exercise 110. 上の $2 \Leftrightarrow 3$ を示せ.

Example 3.7.5. 距離空間の間の連続写像は, 距離の定める位相に関して連続.

Example 3.7.6. X を位相空間, A をその部分空間とするとき, 包含写像 $i: A \rightarrow X$ は連続である.

さらに次が成り立つ.

Theorem 3.7.7. X を位相空間 A をその部分集合とする. A の相対位相は, 包含写像 $i: A \rightarrow X$ が連続になるような A の位相のうち最も弱いものである.

Proof. 上の例 3.7.6 でみたように, A に相対位相をいれると i は連続である.

また, $i: (A, \mathcal{O}) \rightarrow X$ が連続であれば, X の任意の開集合 O に対し $i^{-1}(O) = A \cap O$ は開集合だから $A \cap O \in \mathcal{O}$. すなわち, 相対位相は $\mathcal{O}$ より弱い. $\square$

Example 3.7.8. X, Y を位相空間とする.

1. X が離散位相空間のとき, 任意の写像 $f: X \rightarrow Y$ は連続である.
2. Y が密着位相空間のとき, 任意の写像 $f: X \rightarrow Y$ は連続である.

Example 3.7.9. X を集合, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相とする. このとき恒等写像 $1_X: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ が連続であることと, $\mathcal{O}_2 \leq \mathcal{O}_1$ であることは同値である.

次の2つの exercise は連続写像の基本的な性質で重要である.

exercise 111. X, Y, Z を位相空間とする. $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ がともに連続ならば, 合成 $g \circ f: X \rightarrow Z$ も連続である.

exercise 112. X, Y を位相空間, $B \subset Y$ を部分空間, $i: B \rightarrow Y$ を包含写像とする. このとき, 写像 $f: X \rightarrow B$ が連続 $\Leftrightarrow$ 合成 $i \circ f: X \rightarrow Y$ が連続.

exercise 113. X を位相空間, (Y, d) を距離空間とする. このとき, 写像 $f: X \rightarrow Y$ が点 $a \in X$ で連続 $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 点 a のある近傍 U が存在して, $x \in U$ ならば $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる.

exercise 114. $\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ をユークリッド空間, X を位相空間とし, $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を第 i 成分への射影, すなわち $p_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ で与えられる写像とする. 次を示せ.

1. p_i は連続である.
2. $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ が連続 $\Leftrightarrow$ すべての i に対し $p_i \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が連続.
3. $m \geq n, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq m$ とする. $p(x_1, \dots, x_m) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ で与えられる写像 $p: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ は連続.
4. $B \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間, $f: X \rightarrow B$ を写像とする. f が $\mathbb{R}^n$ の座標を使って $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ と表されるとき, f が連続 $\Leftrightarrow$ 各 $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ が連続.

連続写像と関連して次の概念もしばしば使われる.

Definition 3.7.10. X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

1. f が開写像 (open mapping) である $\Leftrightarrow X$ の任意の開集合の像が Y の開集合である.
2. f が閉写像 (closed mapping) である $\Leftrightarrow X$ の任意の閉集合の像が Y の閉集合である.

定義から f が開 (閉) 写像であれば $f(X)$ は Y の開 (閉) 集合である.

写像が連続, 開写像, 閉写像であるというのはそれぞれ独立した概念である.

Example 3.7.11. X の部分空間 A の包含写像 $i: A \rightarrow X$ は連続である (Ex. 3.7.6) が, A が開 (閉) 集合でなければ開 (閉) 写像ではない.

Example 3.7.12. 1. Y が離散位相空間のとき, 任意の写像 $f: X \rightarrow Y$ は開かつ閉写像である.

2. X が密着位相空間のとき, 写像 $f: X \rightarrow Y$ が開 (閉) 写像であることと $f(X)$ が開 (閉) 集合であることは同値である.

(Ex. 3.7.8 と比較せよ.)

Example 3.7.13. X を集合, $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相とする. このとき恒等写像 $1_X: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ が開 (閉) 写像であることと, $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$ であることは同値である. (Ex. 3.7.9 と比較せよ.)

Example 3.7.14. 位相空間 X の恒等写像は連続かつ開かつ閉写像である.

同相写像について考える.

Theorem 3.7.15. X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. 次は同値.

1. f は同相写像.
2. 連続写像 $g: Y \rightarrow X$ で, $g \circ f = 1_X, f \circ g = 1_Y$ をみたすものが存在する.
3. f は全単射かつ開写像.
4. f は全単射かつ閉写像.

Proof. $1 \Rightarrow 2$ はあきらか ($g = f^{-1}$ とおけばよい). $2 \Rightarrow 1$ もあきらか. 実際このような写像 g があれば, f は全単射であり $g = f^{-1}$ である. $1 \Leftrightarrow 3, 4$ もあきらか. 実際, f が全単射であるとき, f が開写像 (閉写像) であることと f^{-1} が連続であることは同値である. $\square$

Remark. 連続な全単射は必ずしも同相写像とは限らない. 実際 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ を X の位相で $\mathcal{O}_2 < \mathcal{O}_1$ であるものとする, 例 3.7.9 でみたように, 恒等写像 $1_X: (X, \mathcal{O}_1) \rightarrow (X, \mathcal{O}_2)$ は連続な全単射であるが, 逆 $1_X: (X, \mathcal{O}_2) \rightarrow (X, \mathcal{O}_1)$ は連続ではない.

exercise 115. 写像 $f: [0, 1) \rightarrow S^1$ を $f(\theta) = e^{2\pi i \theta}$ で定めると, f は連続な全単射であるが, 同相写像ではない. ここで, $[0, 1)$ にはユークリッド距離から定まる位相をいれている. また $\mathbb{C}$ と $\mathbb{R}^2$ を自然に同一視して $S^1 \subset \mathbb{C}$ とみている.

Example 3.7.16. 1次元ユークリッド空間の部分空間 $(-1, 1)$ から 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ への写像 $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = \tan \frac{\pi}{2}x$ で定めると, f は同相写像である.

Example 3.7.17. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対し, $\mathbb{R}^{n+1}$ において S^n の北極 $N = (0, \dots, 0, 1)$ と点 $(x_1, \dots, x_n, 0)$ を結ぶ直線が S^n と交わる (N 以外の) 点を $\varphi(x)$ とする. これにより写像 $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{N\}$ が定まり, これは同相写像である. この写像を N からの 立体射影 (stereographic projection) という.

exercise 116. 1. $\varphi(x)$ を具体的に $(x_1, \dots, x_n)$ を用いてあらわし, φ が連続であることを示せ.
2. φ の逆写像を求め, φ の逆写像が連続であることを示せ.

Definition 3.7.18. 同相写像によって保たれる性質を 位相的性質 (topological property) という.

3.8 位相の基と準基

Thm. 2.2.5 でみたように, 距離空間の開集合は開球の和集合として特徴付けることができる. 一般の位相空間においても, わかりやすい集合で開集合を特徴付けることができると便利である.

Definition 3.8.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の 基 (base) あるいは 開基 (open base) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の開集合 O が $\mathcal{B}$ に属する開集合の和集合として表せる: $O = \bigcup_{\lambda} O_{\lambda} \ (O_{\lambda} \in \mathcal{B})$.

ただし, 0 個の集合の和集合は空集合である, あるいはそう約束する.

Example 3.8.2. Thm. 2.2.5 から, 距離空間 X において ε 近傍全体

$$\mathcal{B} = \{U_{\varepsilon}(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0\}$$

は開基である.

開集合の族が開基となるための必要十分条件をひとつあたえよう.

Theorem 3.8.3. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の開基である $\Leftrightarrow$ 任意の開集合 O と任意の $x \in O$ に対し, ある $O' \in \mathcal{B}$ が存在して, $x \in O' \subset O$ となる.

Proof. $\Rightarrow$ はあきらか.

$\Leftarrow$) O を開集合とする. 仮定より, 各 $x \in O$ に対し $x \in O_x \subset O$ となるような $O_x \in \mathcal{B}$ が存在する. 各 $x \in O$ に対しこのような $O_x \in \mathcal{B}$ をひとつ選べば,

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} O_x \subset O$$

ゆえ, $O = \bigcup_{x \in O} O_x$ となる. □

exercise 117. $\Rightarrow$ を示せ.

Definition 3.8.4. 位相空間は, 高々可算な基をもつとき, 第二可算公理 (second axiom of countability) をみたすという.

Example 3.8.5. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において,

$$\mathcal{B} = \{U_r(x) \mid x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

とおくと $\mathcal{B}$ は可算基である. よって $\mathbb{R}^n$ は第二可算公理をみたす.

Proof. O を開集合, $x \in O$ とする. このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, $U_\varepsilon(x) \subset O$ となる. $0 < r < \frac{\varepsilon}{2}$ となるような $r \in \mathbb{Q}$ をひとつとる (Lem. 2.4.5 参照). $\mathbb{Q}^n$ は $\mathbb{R}^n$ で稠密であった (Ex. 3.5.8) から, $U_r(x) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$. $x' \in U_r(x) \cap \mathbb{Q}^n$ をひとつとると $U_r(x') \in \mathcal{B}$ である. 任意の $y \in U_r(x')$ に対し,

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) < r + r = 2r < \varepsilon$$

だから $y \in U_\varepsilon(x)$, すなわち $U_r(x') \subset U_\varepsilon(x)$. また $x' \in U_r(x)$ だから $x \in U_r(x')$. よって $x \in U_r(x') \subset O$ となり, Thm. 3.8.3 から, $\mathcal{B}$ は開基である. $\square$

Theorem 3.8.6. 位相空間が第二可算公理をみたせば, 第一可算公理をみたす.

Proof. $\mathcal{B}$ を位相空間 X の可算開基とする. $x \in X$ に対し, $\mathcal{U}^*(x) = \{V \in \mathcal{B} \mid x \in V\}$ とおく. $\mathcal{U}^*(x)$ は $\mathcal{B}$ の部分集合だから高々可算集合で, $\mathcal{U}^*(x)$ の元は, x を含む開集合だから, x の近傍である. U を x の近傍とすると, $x \in O \subset U$ となる開集合 O が存在する. $\mathcal{B}$ は開基であるから, $O = \bigcup V_i$, $V_i \in \mathcal{B}$ とあらわせる. $x \in O$ だから, ある i が存在して $x \in V_i$ となる. $V_i \in \mathcal{U}^*(x)$ であり, $V_i \subset U$ であるから, $\mathcal{U}^*(x)$ は x の (可算) 基本近傍系である. $\square$

集合 X に位相を定める際, 次の Lemma は基本的である.

Lemma 3.8.7. X を集合とし, $\mathcal{O}_\lambda$ を X の位相とする. このとき $\mathcal{O} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{O}_\lambda$ も X の位相となる

Proof. $\mathcal{O}$ が位相の条件をみたすことをチェックすればよい. $\square$

exercise 118. 証明せよ.

Remark. X にいれることの出来る位相全体のなす順序集合において, $\mathcal{O} = \inf\{\mathcal{O}_\lambda\}$ である.

集合 X と, その部分集合がいくつか与えられたとき, これらの部分集合が開集合となるような位相を考えたい場合がある. もちろん離散位相はそのような位相であるが, 最初に与えられた部分集合の情報をもっと反映したものを考えたい. Lem. 3.8.7 により次の定義は意味がある.

Definition 3.8.8. X を集合とする. $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ に対し, $\mathcal{B}$ を含む位相全ての共通部分, すなわち $\mathcal{B}$ の元が開集合となるような最弱の位相を $\mathcal{B}$ が生成 (generate) する位相 とい $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ で表す.

$\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の元を陽に表したい場合がある.

Definition 3.8.9. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の 準基 (subbase) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{B}$ の有限個の元の共通部分として表される集合全体が $\mathcal{O}$ の基となる.

ただし, 0 個の集合の共通部分は全体 X である, あるいはそう約束する.

つまり $\mathcal{B}$ が準基であるとは, 任意の開集合が, $\mathcal{B}$ の元の有限個の共通部分たちの和集合でかけるということである.

あきらかに $\mathcal{B}$ が開基であれば準基である.

Theorem 3.8.10. X を集合, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ とする. このとき, $\mathcal{B}$ は, $\mathcal{B}$ の生成する位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の準基である. すなわち, $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の元 (開集合) は, $\mathcal{B}$ の元の有限個の共通部分たちの和集合でかけるものたちである.

Proof. あきらかに $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ である.

$\mathcal{B}$ の元有限個の共通部分としてかける X の部分集合全体のなす集合を $\hat{\mathcal{B}}$ とかく:

$$\hat{\mathcal{B}} := \left\{ U \subset X \mid U = \bigcap_{i \in F} B_i, F: \text{有限集合}, B_i \in \mathcal{B} \right\}$$

$\hat{\mathcal{B}}$ の有限個の元の共通部分は $\hat{\mathcal{B}}$ の元であることに注意する. また, $\hat{\mathcal{B}}$ の元の和集合でかける X の部分集合全体のなす集合を $\mathcal{O}$ とかく:

$$\mathcal{O} := \left\{ O \subset X \mid O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda, U_\lambda \in \hat{\mathcal{B}} \right\}$$

$\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$ であることを示そう.

$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ だから (O2 より) $\hat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ であり, (O3 より) $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}(\mathcal{B})$ である.

$\mathcal{O}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{O}$ を示すには, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ に注意すれば, $\mathcal{O}$ が位相であることを示せばよい. ($\mathcal{O}(\mathcal{B})$ は $\mathcal{B}$ を含む最弱の位相であった.)

O1. $\emptyset$ は 0 個の集合の和集合ゆえ $\emptyset \in \mathcal{O}$, X は 0 個の元の共通部分であるから $X \in \mathcal{O}$.

O2. $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ とする. $O_1 = \bigcup_{\lambda} U_\lambda, O_2 = \bigcup_{\mu} V_\mu, U_\lambda, V_\mu \in \hat{\mathcal{B}}$ とかける. よって,

$$O_1 \cap O_2 = \left(\bigcup_{\lambda} U_\lambda \right) \cap \left(\bigcup_{\mu} V_\mu \right) = \bigcup_{\lambda, \mu} U_\lambda \cap V_\mu$$

であり, $U_\lambda \cap V_\mu \in \hat{\mathcal{B}}$ だから $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

O3. $\hat{\mathcal{B}}$ の元の和集合の和集合はもちろん $\hat{\mathcal{B}}$ の元の和集合.

□

Remark . この定理から, 任意の $B \subset \mathcal{P}(X)$ は適当な位相の準基となることがわかるが, 必ずしも開基とはならない. 問題集 [190](#) 参照.

3.9 直積と直和

Definition 3.9.1. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 直積集合 $X \times Y$ に, 部分集合の族 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ が生成する位相をいれた位相空間を X と Y の直積空間 (product space), あるいはデカルト積 (Cartesian product) といい, この位相を直積位相 (product topology) という.

普通, とくにことわらなければ, 直積集合には直積位相をいれる.

Proposition 3.9.2. $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ は直積位相の開基である. すなわち, 直積位相の開集合は X の開集合と Y の開集合の直積の和集合でかけるもの全体である.

Proof. 直積位相は $\mathcal{B}$ の生成する位相であるから, Thm. 3.8.10 より $\mathcal{B}$ は準基である, すなわち,

$$\hat{\mathcal{B}} := \left\{ U \subset X \mid U = \bigcap_{i \in F} B_i, F: \text{有限集合}, B_i \in \mathcal{B} \right\}$$

が開基である. $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ であることを示そう. $\hat{\mathcal{B}} \subset \mathcal{B}$ を示せばよい. $X \in \mathcal{O}_X, Y \in \mathcal{O}_Y$ であるから $X \times Y \in \mathcal{B}$ である (0 個の元の共通部分). $U_i \times V_i \in \mathcal{B}$ ($1 \leq i \leq n$) に対し, 有限個の開集合の共通部分は開集合であるから,

$$\bigcap_{i=1}^n (U_i \times V_i) = \left(\bigcap_{i=1}^n U_i \right) \times \left(\bigcap_{i=1}^n V_i \right) \in \mathcal{B}.$$

□

Remark. 問題集 190 を使って $\mathcal{B}$ が開基の条件をみたすことをチェックしてもよい.

Theorem 3.9.3. X, Y, Z を位相空間, $p_X: X \times Y \rightarrow X, p_Y: X \times Y \rightarrow Y$ を射影とする.

1. $X \times Y$ の直積位相は, p_X と p_Y がどちらも連続になるような最弱の位相である.
2. p_X, p_Y は開写像である.
3. 写像 $f: Z \rightarrow X \times Y$ が連続である $\Leftrightarrow p_X \circ f, p_Y \circ f$ がどちらも連続.

Proof. $X \times Y$ の直積位相を $\mathcal{O}$ とする.

1. $p_X: (X \times Y, \mathcal{O}) \rightarrow X, p_Y: (X \times Y, \mathcal{O}) \rightarrow Y$ が連続であることはあきらか.

$\mathcal{O}'$ を $X \times Y$ の位相で $p_X: (X \times Y, \mathcal{O}') \rightarrow X$, $p_Y: (X \times Y, \mathcal{O}') \rightarrow Y$ がどちらも連続であるものとする. $\mathcal{O} \leq \mathcal{O}'$ であることを示そう. $\mathcal{O}$ は $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ が生成する位相, すなわち, $\mathcal{B}$ を含む最弱の位相であったから, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}'$ であることを示せばよい. $U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y$ とすると, 仮定から $p_X^{-1}(U), p_Y^{-1}(V) \in \mathcal{O}'$ である. よって

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) = p_X^{-1}(U) \cap p_Y^{-1}(V) \in \mathcal{O}'.$$

2. 一般に和集合の像は像の和集合であることに注意すれば, 開基の元の像が開集合であることを示せばよいが, $p_X(U \times V) = U$, $p_Y(U \times V) = V$ であるからあきらか.
3. 連続写像の合成は連続なので $\Rightarrow$ はあきらか.

$p_X \circ f, p_Y \circ f$ がどちらも連続であるとする. $X \times Y$ の開集合の f による逆像が Z の開集合であることを示せばよいが, 一般に和集合の逆像は逆像の和集合であり, 共通部分の逆像は逆像の共通部分であることに注意すれば, 準基の元の逆像が開集合であることを示せばよい. $U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y$ とすると, 仮定から $(p_X \circ f)^{-1}(U), (p_Y \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{O}_Z$ である. よって

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= f^{-1}((U \times Y) \cap (X \times V)) \\ &= f^{-1}(U \times Y) \cap f^{-1}(X \times V) \\ &= f^{-1}(p_X^{-1}(U)) \cap f^{-1}(p_Y^{-1}(V)) \\ &= (p_X \circ f)^{-1}(U) \cap (p_Y \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{O}_Z. \end{aligned}$$

□

exercise 119. $p_X: X \times Y \rightarrow X$ が閉写像とはならない例を挙げよ.

exercise 120. $y_0 \in Y$ とする. 写像 $i_{y_0}: X \rightarrow X \times \{y_0\}$ を $i_{y_0}(x) = (x, y_0)$ により定める. i_{y_0} は同相写像であることを示せ. ただし, $X \times \{y_0\}$ には $X \times Y$ からの相対位相をいれる.

exercise 121. X_1, X_2, Y_1, Y_2 を位相空間とする.

1. $f_i: X_i \rightarrow Y_i$ を連続写像とする. このとき, $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ で与えられる直積空間の間の写像

$$f_1 \times f_2: X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2$$

は連続である.

2. X_1 と Y_1 , X_2 と Y_2 が同相であれば $X_1 \times X_2$ と $Y_1 \times Y_2$ は同相である.

exercise 122. $(0, 1) \times [0, 1)$ と $[0, 1] \times [0, 1)$ は同相であることを示せ. ただし $(0, 1), [0, 1], [0, 1] \subset \mathbb{R}$ は 1 次元ユークリッド空間の部分空間.

Remark. $(0, 1)$ と $[0, 1]$ は同相ではない (後の節参照). $X \times Z$ と $Y \times Z$ が同相であっても, X と Y が同相になるわけではない. 別の言い方をすれば, X と Y は同相ではないが, $X \times Z$ と $Y \times Z$ が同相となることもある.

問題集 . 196, 197, 198, 199

Definition 3.9.4. $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする. 直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に, 部分集合の族

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{p_\lambda^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_\lambda\}$$

が生成する位相 (この位相を直積位相 という) をいれた位相空間を, 族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の直積空間または弱位相による直積空間という. ただし $p_\lambda: \prod X_\lambda \rightarrow X_\lambda$ は標準的射影.

直積集合には普通とくにことわらなければ直積位相をいれる.

Proposition 3.9.5.

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \mid \begin{array}{l} \text{ある有限集合 } L \subset \Lambda \text{ が存在して, } \lambda \in L \text{ ならば } A_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda, \\ \lambda \notin L \text{ ならば } A_\lambda = X_\lambda \end{array} \right\}$$

は直積位相の開基である.

Proof. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{p_\lambda^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_\lambda\}$ の元の有限個の共通部分としてあらわされる部分集合全体が $\mathcal{B}$ である. □

問題集 . 193, 194

Remark. 直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ には,

$$\mathcal{B}^{box} := \left\{ \prod_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \mid \forall \lambda \in \Lambda : O_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \right\}$$

が生成する位相 (これを箱位相 (box topology) という) をいれることもできる. Λ が有限集合の場合は箱位相と直積位相は一致するが, 一般には箱位相の方が直積位相よりも強い. 一般には箱位相では問題集 194(4),(5) に相当することが成立しない.

Definition 3.9.6. $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする. 非交和 $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に, 位相

$$\begin{aligned}\mathcal{O} &= \{O \subset X \mid \forall \lambda \in \Lambda : O \cap X_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda\} \\ &= \left\{ O = \coprod_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \mid O_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \right\}\end{aligned}$$

をあたえた位相空間 $(X, \mathcal{O})$ を族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の位相和という.

Theorem 3.9.7. $X = \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を位相和, $i_\lambda: X_\lambda \rightarrow X$ を標準的包含写像とする. 位相和の位相は, 全ての i_λ が連続となるような最強の位相である.

Proof. $\mathcal{O}$ を位相和の位相とする. あきらかに $i_\lambda: (X, \mathcal{O}_\lambda) \rightarrow (X, \mathcal{O})$ は連続である. 実際, $O \in \mathcal{O}$ とすると, $i_\lambda^{-1}(O) = O \cap X_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda$.

$\mathcal{O}'$ を X の位相で, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $i_\lambda: (X, \mathcal{O}_\lambda) \rightarrow (X, \mathcal{O}')$ が連続であるものとする. $\mathcal{O}' \leq \mathcal{O}$ であることを示そう. $O \in \mathcal{O}'$ とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し, $O \cap X_\lambda = i_\lambda^{-1}(O) \in \mathcal{O}_\lambda$ であるから, $O \in \mathcal{O}$ である. $\square$

exercise 123. i_λ は開写像かつ閉写像である.

exercise 124. 各 X_λ は $X = \coprod X_\lambda$ の開かつ閉集合である.

exercise 125. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とし, $\mathbb{R}$ の部分空間 A, B を $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ により定める. このとき, 恒等写像 $\text{Id}: A \coprod B \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であるが, 同相写像ではない. (実は位相和 $A \coprod B$ と $\mathbb{R}$ は同相ではないこともわかる.)

exercise 126. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする. 集合として $X = \coprod X_\lambda$ と非交和に分かれているとし, 各 X_λ に $\mathcal{O}$ からいれた相対位相を $\mathcal{O}_\lambda$ とする. このとき,

$\mathcal{O}$ が族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}$ の位相和の位相である $\Leftrightarrow$ 任意の λ に対し X_λ が $(X, \mathcal{O})$ の開集合である.

問題集 . 195

3.10 Hausdorff 空間

§3.2.6 で注意したように、一般の位相空間において点列の極限は必ずしも一意に定まるわけではない。一意に定まるためのひとつの条件を与える。

Definition 3.10.1. 位相空間 X が Hausdorff (ハウスドルフ) 空間 である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x の近傍 U と y の近傍 V で, $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する。

Remark. Hausdorff であるというのは位相的性質である。すなわち

exercise 127. X, Y を同相な位相空間とする。 X が Hausdorff であれば Y もそうである。

Example 3.10.2. 距離空間は Hausdorff 空間である。実際 X を距離空間, $x, y \in X$, $x \neq y$ とすると, $\varepsilon = d(x, y)/2 > 0$ で, $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$ 。

Example 3.10.3. 離散空間は Hausdorff 空間である。実際 X を離散空間, $x, y \in X$, $x \neq y$ とすると, $\{x\}, \{y\}$ は開集合で, $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$ 。(もちろん離散距離空間と思ってもよい。)

Example 3.10.4. 元をふたつ以上含む密着空間は Hausdorff でない。

Theorem 3.10.5. Hausdorff 空間においては, 点列の極限は, 存在すれば, 一意的である。

Proof. 証明は Thm. 2.7.3, つまり Prop. 1.2.6 のものと同じ。(実際, 証明のポイントは距離空間が Hausdorff であることを示すことであった。というより, もちろん, Hausdorff 空間というのはこの証明がうまくいくような空間として考えられたもの。) $\square$

Theorem 3.10.6. Hausdorff 空間において, 1 点は閉集合である。

Proof. X を Hausdorff 空間, $x \in X$ とする。任意の $y \in X \setminus \{x\}$ に対し, $x \neq y$ であるから, x の近傍 U と, y の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがある。とくに $x \notin V$ であるから $V \subset X \setminus \{x\}$ となり, y は $X \setminus \{x\}$ の内点。 $\square$

Theorem 3.10.7. Hausdorff 空間の部分空間も Hausdorff。

Proof. X を Hausdorff 空間, $A \subset X$ を部分空間とする。 $a, b \in A$, $a \neq b$ とすると, a の X における近傍 U と, b の X における近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがある。 $U' := U \cap A$, $V' = V \cap A$ とおけば, U', V' はそれぞれ a, b の A における近傍で (ex 108)

$$U' \cap V' = \emptyset.$$

□

Theorem 3.10.8. X, Y を位相空間とする. このとき $X \times Y$ が Hausdorff $\Leftrightarrow X, Y$ ともに Hausdorff.

Proof. $\Rightarrow$) exe.120 より, X, Y は $X \times Y$ の部分空間と同相であるから, Thm. 3.10.7 よりどちらも Hausdorff.

$\Leftarrow$) $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$ とする. $x_1 \neq x_2$ としてよい. X は Hausdorff だから x_i の近傍 U_i で $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものが存在する. $U_i \times Y$ は (x_i, y_i) の近傍で, $(U_1 \times Y) \cap (U_2 \times Y) = \emptyset$ である. □

Remark. 無限個の直積に対しても同様なことが成り立つ. 証明もほぼ同じ.

Theorem 3.10.9. X を位相空間とする. このとき, X が Hausdorff $\Leftrightarrow$ 対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ が $X \times X$ の閉集合.

Proof. $x, y \in X$ に対し, $x \neq y \Leftrightarrow (x, y) \notin \Delta \Leftrightarrow (x, y) \in \Delta^c$ である. より一般に, $A, B \subset X$ に対し, $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \times B) \cap \Delta = \emptyset \Leftrightarrow A \times B \subset \Delta^c$ である. よって

$$\begin{aligned} X \text{ が Hausdorff} &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Delta^c, \exists U \in \mathcal{U}(x), \exists V \in \mathcal{U}(y) : U \times V \subset \Delta^c \\ &\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \Delta^c : (x, y) \text{ は } \Delta^c \text{ の内点} \\ &\Leftrightarrow \Delta^c \text{ は開集合.} \end{aligned}$$

□

exercise 128. (この exercise は位相とは直接は関係ない.) X, Y, Z を集合, $f: Z \rightarrow X$, $g: Z \rightarrow Y$ を写像とする. 写像 $(f, g): Z \rightarrow X \times Y$ を $(f, g)(z) = (f(z), g(z))$ により定める. また $A \subset X$, $B \subset Y$ を部分集合とする. このとき, $(A \times B) \cap \text{Im}(f, g) = \emptyset \Leftrightarrow f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B) = \emptyset$ であることを示せ.

Proposition 3.10.10. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続ならばグラフ

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

は $X \times Y$ の閉集合. (cf. 問題集 84)

Proof. $f \times 1_Y: X \times Y \rightarrow Y \times Y$ は連続であり (exe. 121), Y が Hausdorff のとき $\Delta = \{(y, y) \mid y \in Y\}$ は $Y \times Y$ の閉集合である. よって $\Gamma_f = (f \times 1_Y)^{-1}(\Delta)$ は閉集合. □

exercise 129. 上の命題はもう少し精密化できる. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が点 $a \in X$ で連続ならば, 任意の $b \in Y$ ($b \neq f(a)$) に対し, (a, b) は Γ_f の外点である.

exercise 130. Y が密着空間のとき, $f: X \rightarrow Y$ は連続だが Γ_f は閉ではない例を挙げよ. (ちなみにこのとき, 任意の f は連続.) Γ_f が閉集合になることはあるか?

exercise 131. $(X, \mathcal{O})$ を Hausdorff 空間とし, $\mathcal{O}'$ を $\mathcal{O}$ より強い X の位相とする. このとき, $(X, \mathcal{O}')$ も Hausdorff.

exercise 132. $\mathbb{R}$ にザリスキ位相をいれると Hausdorff ではない.

3.11 連結性

Definition 3.11.1. 1. 位相空間 X が非連結 (disconnected) あるいは不連結である
 $\Leftrightarrow$ X は, 空でない2つの開集合の非交和に表すことができる, すなわち, ある空で
 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ない開集合 O_1, O_2 が存在して,

$$X = O_1 \cup O_2, \quad O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

となる.

また, このような開集合 O_1, O_2 を X の分割という.

2. 位相空間 X が連結 (connected) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X は非連結でない.
 3. 位相空間 X の部分集合 A が連結である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 部分空間 A が連結である.

Remark. この定義によれば, 空集合 $\emptyset$ は連結である. が, 空集合は連結ではないと考えた方が都合がよいことが多い. (cf. 1 は素数ではない.) 空集合が連結とはならないように定義を適切に修正する (あるいは空集合は連結ではないと約束する) ことも可能であるが, この講義では空集合の連結性については知らん顔をすることにする.

Proposition 3.11.2. X を位相空間とする. 次は同値である.

1. X は連結である.
2. X は空でない2つの閉集合の非交和に表すことができない.
3. X の部分集合で開かつ閉であるものは $\emptyset, X$ のみ.
4. X を空でない2つの開集合の和集合として表せば, その2つの開集合の共通部分は空ではない:
 $X = O_1 \cup O_2, O_i \neq \emptyset, O_i : \text{open} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \neq \emptyset.$
5. X を空でない2つの閉集合の和集合として表せば, その2つの閉集合の共通部分は空ではない:
 $X = F_1 \cup F_2, F_i \neq \emptyset, F_i : \text{closed} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \neq \emptyset.$
6. X から $\{0, 1\}$ への連続な全射は存在しない. ただし, $\{0, 1\}$ には離散位相をいれる.

Proof. $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 4 \Leftrightarrow 5$ はあきらか.

$1 \Leftrightarrow 6$ を示すには次が同値であることを示せばよい.

- 1' X は非連結.
 6' X から $\{0, 1\}$ への連続な全射が存在する.

6' $\Rightarrow$ 1') $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ を連続な全射とする. $O_i = f^{-1}(i)$, $i = 0, 1$ とおけば, f は全射なので $O_i \neq \emptyset$ であり, f が連続で $\{i\}$ は $\{0, 1\}$ の開集合だから O_i は開集合である. あきらかに, $O_0 \cap O_1 = \emptyset$ かつ $X = O_0 \cup O_1$ であるから, X は非連結.

1' $\Rightarrow$ 6') X を非連結とし, O_0, O_1 を X の分割とする. 写像 $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in O_0 \\ 1, & x \in O_1 \end{cases}$$

により定める. $O_i \neq \emptyset$ であるから f は全射である. また $\{0, 1\}$ の開集合は $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}$ で, それぞれの逆像は $\emptyset, O_0, O_1, X$ だから開集合である. よって f は連続. $\square$

exercise 133. 上の **1** $\Leftrightarrow$ **2** $\Leftrightarrow$ **3** $\Leftrightarrow$ **4** $\Leftrightarrow$ **5** を示せ.

exercise 134. $A \subset X$ とする. 次は同値.

1. A は非連結.
2. $A \subset O_1 \cup O_2$, $A \cap O_i \neq \emptyset$, $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$ となるような X の開集合 O_i が存在する.
3. $A \subset F_1 \cup F_2$, $A \cap F_i \neq \emptyset$, $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ となるような X の閉集合 F_i が存在する.

exercise 135. $A \subset X$ とする. 次は同値.

1. A は連結.
2. X の開集合 O_i が $A \subset O_1 \cup O_2$, $A \cap O_i \neq \emptyset$ をみたせば $A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ となる.
3. X の閉集合 F_i が $A \subset F_1 \cup F_2$, $A \cap F_i \neq \emptyset$ をみたせば $A \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ となる.

Theorem 3.11.3. 連結空間の連続写像による像は連結.

Proof. $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. 対偶, すなわち $f(X)$ が非連結ならば X は非連結であることを示そう. $f(X)$ が非連結だとする. Y の開集合 U_i で, $f(X) \subset U_1 \cup U_2$, $f(X) \cap U_i \neq \emptyset$, $f(X) \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となるものがある.

- U_i は Y の開集合で f は連続だから $f^{-1}(U_i)$ は X の開集合.
- $f(X) \cap U_i \neq \emptyset$ だから $f^{-1}(U_i) \neq \emptyset$.
- $f(X) \subset U_1 \cup U_2$ だから $X = f^{-1}(U_1 \cup U_2) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$.
- $f(X) \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ だから $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = f^{-1}(U_1 \cap U_2) = \emptyset$.

よって $f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(U_2)$ は X の分割をあたえ, X は非連結である. $\square$

Corollary 3.11.4. 連結性は位相的性質である. □

Theorem 3.11.5. X を位相空間, A, B を X の部分集合で $A \subset B \subset A^a$ であるものとする. このとき A が連結ならば B も連結.

Proof. O が X の開集合であるとき, $A \cap O = \emptyset \Leftrightarrow A^a \cap O = \emptyset$ であることに注意する. 実際, O^c が閉集合であることに注意すれば

$$A \cap O = \emptyset \Leftrightarrow A \subset O^c \Leftrightarrow A^a \subset O^c \Leftrightarrow A^a \cap O = \emptyset.$$

O_i を X の開集合で $B \subset O_1 \cup O_2$, $B \cap O_i \neq \emptyset$ となるものとする. $B \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ であることを示せばよい.

- $A \subset B$ かつ $B \subset O_1 \cup O_2$ だから $A \subset O_1 \cup O_2$ である.
- $B \subset A^a$ かつ $B \cap O_i \neq \emptyset$ だから $A^a \cap O_i \neq \emptyset$ であり, 上の注意から $A \cap O_i \neq \emptyset$ となる.

A は連結なので $A \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ となり, $A \subset B$ なので $B \cap O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$. □

1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の連結部分集合について調べよう.

Definition 3.11.6. $\mathbb{R}$ の部分集合 C は, 任意の $a, b \in C$ ($a \leq b$) に対し, $[a, b] \subset C$ になるとき 凸集合 (convex set) であるという.

($\mathbb{R}^n$ の部分集合 C は, その任意の2点に対し, それらを結ぶ線分も C に含まれるとき凸集合であるという.)

Theorem 3.11.7. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の閉区間は連結.

Proof. $a < b$ に対し, 閉区間 $A = [a, b]$ は連結であることを示そう.

$F_1, F_2 \subset A$ が A の空でない閉集合で $A = F_1 \cup F_2$ であるとする. $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$ であることを示せばよい. A は $\mathbb{R}$ の閉集合だから, F_i は $\mathbb{R}$ の (空でない有界) 閉集合である.

$b \in F_1 \cap F_2$ のときは $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

$b \notin F_1 \cap F_2$ とする. $b \in F_2$, $b \notin F_1$ としてよい. F_1 は空でない有界集合なので上限が存在する. $c := \sup F_1$ とおく. $c \in F_1^a = F_1$. とくに $c \in A$ ゆえ $c \leq b$. $b \notin F_1$ だから $c \neq b$ ゆえ $c < b$. $(c, b] \subset F_2$ であることを示す. 実際, $c < x \leq b$ ならば ($x > c = \sup F_1$ なので) $x \notin F_1$ かつ (A は区間なので) $x \in A = F_1 \cup F_2$ ゆえ $x \in F_2$. よって $c \in [c, b] = (c, b]^a \subset F_2^a = F_2$. よって $c \in F_1 \cap F_2$ となり, $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. □

Corollary 3.11.8. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の凸集合は連結.

Proof. 非連結な部分集合は凸ではないことを示せばよい. $A \subset \mathbb{R}$ を (空でない) 非連結な部分集合とする.

$$A \subset F_1 \cup F_2, A \cap F_i \neq \emptyset, A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$$

となる $\mathbb{R}$ の閉集合 F_1, F_2 が存在する. $a_i \in A \cap F_i$ をとる. $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ ゆえ $a_1 \neq a_2$. $a_1 < a_2$ としてよい. $[a_1, a_2] \not\subset A$ であることを示そう.

$[a_1, a_2] \not\subset F_1 \cup F_2$ のときは ($A \subset F_1 \cup F_2$ だから) $[a_1, a_2] \not\subset A$ である.

$[a_1, a_2] \subset F_1 \cup F_2$ とする. $[a_1, a_2]$ は連結で, $a_i \in [a_1, a_2] \cap F_i \neq \emptyset$ だから, $[a_1, a_2] \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. $A \cap F_1 \cap F_2 = \emptyset$ より $[a_1, a_2] \cap A^c \supset [a_1, a_2] \cap F_1 \cap F_2$ だから, $[a_1, a_2] \cap A^c \neq \emptyset$. すなわち, $[a_1, a_2] \not\subset A$. $\square$

Proposition 3.11.9. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の連結部分集合は凸集合である.

Proof. 凸でない部分集合は非連結であることを示せばよい. $A \subset \mathbb{R}$ を凸でない部分集合とする. $[a, b] \not\subset A$ となるような $a, b \in A$ が存在する. $x \in [a, b] \cap A^c$ をひとつとる. $x \notin A$, $a, b \in A$ ゆえ $a < x < b$. よって $A \cap (-\infty, x)$, $A \cap (x, \infty)$ は A の分割を与える. $\square$

Proposition 3.11.10. $\mathbb{R}$ の凸集合とは区間である.

Proof. 区間が凸であるのはあきらか.

$A \subset \mathbb{R}$ を空でない凸集合とする. A が有界である場合を考えよう. (A が有界でない場合も同様だが少しやさしい.) A は空でない有界集合だから上限, 下限が存在する. $m := \inf A$, $M := \sup A$ とおく. $(m, M) \subset A$ であることを示す. $m < x < M$ とする. $m = \inf A$ だから $m < a < x$ となる $a \in A$ が存在する. 同様に, $x < b < M$ となる $b \in A$ が存在する. A は凸だから $[a, b] \subset A$ ゆえ $x \in A$. したがって A が空でない有界凸集合ならば, $(m, M) \subset A \subset [m, M]$ となり A は (m, M) , $(m, M]$, $[m, M)$, $[m, M]$ のいずれか, つまり区間である. $\square$

以上をまとめて次をえる.

Theorem 3.11.11. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の (空でない) 部分集合 A に対し次は同値である.

1. A は連結.
2. A は凸集合.
3. A は区間.

$\square$

Corollary 3.11.12 (中間値の定理). X 連結. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 連続. $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) < f(x_2)$ とする. このとき, $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(X)$.

Proof. $f(X) \subset \mathbb{R}$ は連結だから凸. □

Remark. この中間値の定理の証明には連結なら凸 (Prop. 3.11.9) だということは使うが, 区間の連結性 (Thm. 3.11.7, Cor. 3.11.8) は不要である.

この中間値の定理から, 微積分での中間値の定理を導くためには, 定義域である閉区間の連結性が必要になる.

Example 3.11.13. 半開区間 $[0, 1)$ と开区間 $(0, 1)$ は同相ではない. より強く, $[0, 1)$ から $(0, 1)$ への連続な全単射は存在しない. (連続な全射はある $x \sin \frac{1}{1-x}$ とか使えば...) 実際, $f: [0, 1) \rightarrow (0, 1)$ を連続な単射だとすると, f を $(0, 1) = [0, 1) \setminus \{0\}$ に制限したものは連続 (単射) 写像 $f: (0, 1) \rightarrow (0, 1) \setminus \{f(0)\}$ をあたえる. $(0, 1)$ は連結だからその像も連結である. $(0, 1) \setminus \{f(0)\}$ は非連結なので $f((0, 1)) \neq (0, 1) \setminus \{f(0)\}$. よって $f([0, 1)) \neq (0, 1)$ となり, f は全射ではない.

Definition 3.11.14. X を位相空間, $a, b \in X$ とする. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の閉区間 $[0, 1]$ から X への連続写像 $\varphi: [0, 1] \rightarrow X$ で $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$ となるものを a と b を結ぶ道 (path) という. a を道の始点, b を道の終点という.

Remark. 道とは写像 φ のことであり, その像 $\varphi([0, 1]) \subset X$ のことではない.

Definition 3.11.15. 位相空間 X が弧状連結 (path-connected) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a, b \in X$ に対し, a と b を結ぶ道が存在する.

Remark. arcwise connected というときもある. path-connected と arcwise connected を別の意味で使うこともある.

Theorem 3.11.16. 弧状連結ならば連結である.

Proof. X を (空でない) 弧状連結空間, $f: X \rightarrow \{0, 1\}$ を連続写像とする. f が全射ではないことを示せばよい. $a \in X$ をひとつ固定する. 任意の $x \in X$ に対し $f(x) = f(a)$ であることを示そう. X は弧状連結だから a と x を結ぶ道 φ , すなわち連続写像 $\varphi: [0, 1] \rightarrow X$ で $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = x$ となるものが存在する. $f \circ \varphi: [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$ は連続であり $[0, 1]$ は連結なので, $f \circ \varphi(1) = f \circ \varphi(0)$ である. よって $f(x) = f(\varphi(1)) = f \circ \varphi(1) = f \circ \varphi(0) = f(\varphi(0)) = f(a)$. □

Example 3.11.17. 連結だが弧状連結ではない例. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$\begin{aligned}
A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \\
B &= \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\} \\
X &= A \cup B
\end{aligned}$$

を考えると, X は連結であるが弧状連結ではない.

exercise 136. これを (自分で頑張って考えるか, 証明が載っている本を探して) 示せ.

Theorem 3.11.18. X を位相空間, $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の連結部分集合の族, すなわち, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \subset X$ は連結であるとする. このとき, 任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ ならば $A = \bigcup_\lambda A_\lambda$ も連結.

Proof. $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ を連続写像とする. f が全射でないこと, すなわち, 任意の $a, b \in A$ に対し $f(a) = f(b)$ であることを示せばよい. $a, b \in A$ とする. ある $\lambda, \mu \in \Lambda$ が存在し, $a \in A_\lambda, b \in A_\mu$ となる. 仮定から $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ である. $c \in A_\lambda \cap A_\mu$ をひとつとる. f の制限 $f: A_\lambda \rightarrow \{0, 1\}$ は連続で, A_λ は連結だから $f(a) = f(c)$. 同様に $f(b) = f(c)$. よって $f(a) = f(b)$. $\square$

Definition 3.11.19. X を位相空間, $x \in X$ とする. x を含む連結部分集合すべての和集合

$$C_x = \bigcup_{\substack{x \in C \\ C \subset X: \text{連結}}} C$$

を x を含む X の連結成分 (connected component) という.

Proposition 3.11.20. 連結成分は x を含む最大の連結集合である.

Proof. Thm. 3.11.18 より連結成分は連結である. 最大性は定義よりあきらか. $\square$

Proposition 3.11.21. 連結成分は閉集合である.

Proof. C_x を x を含む連結成分とする. $C_x \subset C_x^a$ で, C_x は連結だから Thm. 3.11.5 より C_x^a も連結. $x \in C_x^a$ で C_x^a は連結だから連結成分の定義より $C_x^a \subset C_x$. よって $C_x = C_x^a$ となり C_x は閉集合. $\square$

Proposition 3.11.22. X を位相空間とする. X における関係 $\sim$ を,

$$x \sim y \Leftrightarrow x, y \in C \text{ となる連結部分集合 } C \subset X \text{ が存在する}$$

と定めると, これは同値関係であり, $x \in X$ を含む同値類は x を含む連結成分である.

この同値関係による X の類別を連結成分への分解という.

Proof. 証明は次の exercise による. □

exercise 137. X を位相空間とし, $x \in X$ を含む連結成分を C_x で表す.

1. $\{x\}$ は連結である.
2. Prop. 3.11.22 の $\sim$ は同値関係である.
3. $x \sim y \Leftrightarrow y \in C_x$.

Example 3.11.23. 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ の連結成分は $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ と $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ のふたつ. 実際, $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ は $\mathbb{R}$ の区間だから連結. $\mathbb{R}_+ \subsetneq A \subset \mathbb{R}^\times$ は $A = \mathbb{R}_+ \cup (A \cap \mathbb{R}_-)$ と分割されるので連結ではない.

Definition 3.11.24. 位相空間 X が 完全不連結 (totally disconnected) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 連結成分が全て1点からなる.

Example 3.11.25. 離散空間は完全不連結.

勘違いしやすいが, 離散であるということと完全不連結であるということは違う. 例えば, 1次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分空間 $\mathbb{Q}$ は完全不連結であるが, 離散空間ではない.

Proof. $A \subset \mathbb{Q}$, $\#A \geq 2$ とする. $r, s \in A, r < s$ をとると, $r < x < s$ となる無理数 x が存在する. $\{q \in A \mid q < x\}$ と $\{q \in A \mid q > x\}$ は A の分割をあたえるので A は連結ではない. よって各 $r \in \mathbb{Q}$ に対し, r を含む連結成分は $\{r\}$.

また任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $(r - \varepsilon, r + \varepsilon) \not\subset \mathbb{Q}$ であるから, $\{r\}$ は $\mathbb{Q}$ の開集合ではない. □

Remark. この例から連結成分は必ずしも開集合とは限らないし, 位相空間が連結成分の位相和となるわけではないということがわかる.

exercise 138. X の連結成分が有限個であるとき, 各連結成分は開集合であることを示せ.

exercise 139. Z を $\mathbb{R}$ に Zariski 位相をいれた位相空間とする.

1. Z は連結であることを示せ.
2. Z の連結部分集合はどのようなものか?

3.12 コンパクト空間

Definition 3.12.1. X を集合, A を部分集合, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を X の部分集合の族とする.

1. $A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ であるとき, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の被覆 (covering) という.
2. $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が A の被覆であり, Λ が有限集合のとき有限被覆 (finite covering) という.
3. $\Lambda' \subset \Lambda$ とする. 族 $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ が A の被覆であるとき, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda'}$ を, (A の被覆) $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の部分被覆 (subcovering) という.
とくに Λ' が有限集合のとき有限部分被覆 という.
4. A の被覆 $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が有限部分被覆をもつ $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在して, $\{E_i\}_{i \in I}$ が A の被覆となる.
5. X が位相空間, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が A の被覆で, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し E_λ が X の開集合であるとき, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の開被覆 (open covering) という.
6. 任意の有限部分集合 $I \subset \Lambda$ に対し, $\bigcap_{i \in I} E_i \neq \emptyset$ であるとき, 族 $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は有限交叉性 (finite intersection property) をもつという.

Definition 3.12.2. 1. 位相空間 X がコンパクト (compact) である $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ X の任意の開被覆が有限部分被覆をもつ.

2. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトである $\Leftrightarrow_{\text{def}}$ 部分空間 A がコンパクトである.

Remark. この定義の内容の意味 (するところは最初は理解しにくいと思うがそれ) はともかく, 定義の文の意味を正確に理解せよ.

Remark. コンパクト Hausdorff 空間のことをコンパクトといい, この定義 3.12.2 の条件をみたす空間を準コンパクト (quassi-compact) ということもある.

Proposition 3.12.3. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトである $\Leftrightarrow$ 部分集合 A の (X における) 任意の開被覆が有限部分被覆をもつ.

Proof. A の部分集合族 $\{E_\lambda\}$ が部分空間 A の開被覆である $\Leftrightarrow$ 部分集合 A の開被覆 $\{O_\lambda\}$ で $E_\lambda = A \cap O_\lambda$ となるものがある. $\square$

Theorem 3.12.4. X がコンパクト $\Leftrightarrow X$ の閉集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が有限交叉性をもつならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.

Proof. X の部分集合族 $\{E_\lambda\}$ に対し, $\{E_\lambda\}$ が被覆であることと $\bigcap_{\lambda} E_\lambda^c = \emptyset$ であることは同値である. また, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が有限部分被覆をもつ $\Leftrightarrow$ ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在

し, $\bigcap_{i \in I} E_i^c = \emptyset \Leftrightarrow$ 族 $\{E_\lambda^c\}_{\lambda \in \Lambda}$ が有限交叉性をもたない.

X の部分集合 E が開集合であることと E^c が閉集合であることは同値であることに注意すればよい. $\square$

Example 3.12.5. 密着位相空間はコンパクトである. 開集合は X と $\emptyset$ だけだから.

Example 3.12.6. X を離散位相空間とすると, X がコンパクト $\Leftrightarrow X$ が有限集合.

Example 3.12.7. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ はコンパクトではない. 実際, $\{U_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^n$ の開被覆であるが有限部分被覆をもたない. ただし $0 \in \mathbb{R}^n$ は原点.

同様にして次がわかる.

Proposition 3.12.8. 距離空間のコンパクト部分集合は有界閉集合である.

Proof. X を距離空間, $A \subset X$ をコンパクトとする.

まず A が有界であることを示す. $x \in X$ をひとつとる. $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n(x)$ だから, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $A \subset U_N(x)$ となり A は有界.

A が閉集合, すなわち, A^c が開集合であることを示そう. $x \in A^c$, つまり $x \notin A$ とする.

$$\bigcup_{r>0} E_r(x) = \bigcup_{r>0} \{y \in X \mid d(x, y) > r\} = X - \{x\} \supset A$$

だから $\{E_r(x)\}_{r>0}$ は A の開被覆. A はコンパクトだから有限個の $E_{r_i}(x), i = 1, \dots, n$ で覆われる. $\varepsilon = \min r_i$ とおけば $\varepsilon > 0$ で

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n E_{r_i}(x) = E_\varepsilon(x)$$

となり

$$U_\varepsilon(x) \subset E_\varepsilon(x)^c \subset A^c.$$

$\square$

より一般に Hausdorff 空間のコンパクト部分集合は閉集合であることを後で示す.

ユークリッド空間では逆も成り立つ. まず 1 次元の場合を示そう. 後でコンパクト空間の性質を用いて n 次元の場合を示す.

Theorem 3.12.9 (Heine-Borel). 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の有界閉集合はコンパクトである. とくに有界閉区間はコンパクトである.

Proof. $A \subset \mathbb{R}$ を有界閉集合とし, A の閉集合族 $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が有限交叉性をもつとする ($\Lambda \neq \emptyset$ のときを考えればよい) と,

$$a := \inf \left\{ \max_{i \in I} F_i \mid \emptyset \neq I \subset \Lambda, \#I < \infty \right\}$$

とおけば, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$a = \inf \left\{ \max_{i \in I} F_i \mid \lambda \in I \subset \Lambda, \#I < \infty \right\} \in F_\lambda$$

ゆえ $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ となり, A はコンパクトである. $\square$

もう少し丁寧に書いてみよう. $\mathbb{R}$ の空でない有界閉集合は最大元, 最小元をもつことに注意する (Cor. 2.5.7).

$P = \{I \subset \Lambda \mid I \neq \emptyset, \#I < \infty\}$ とおき, $\lambda \in \Lambda$ に対し $P_\lambda = \{I \in P \mid \lambda \in I\}$ とおく.

また $I \in P$ に対し

$$F_I = \bigcap_{\lambda \in I} F_\lambda, \quad a_I = \max F_I \in F_I$$

とおく. (A が $\mathbb{R}$ の有界閉集合なので F_I も $\mathbb{R}$ の有界閉集合で, 仮定より I が有限集合のときは $F_I \neq \emptyset$ であるから F_I には最大元が存在する.) $I \subset J$ のとき $F_I \supset F_J$ だから $a_I \geq a_J$ であることに注意する. さらに

$$a = \inf_{I \in P} a_I, \quad a_\lambda = \inf_{I \in P_\lambda} a_I$$

とおく. ($\Lambda \neq \emptyset$ だから $P \neq \emptyset$ であり, $a_I \in A$ で A は有界だからこの下限は存在する.)

$I \in P_\lambda$ のとき, $\lambda \in I$ だから $F_I \subset F_\lambda$ ゆえ $a_I \in F_\lambda$ である. よって

$$a_\lambda = \inf \{a_I \mid I \in P_\lambda\} \in \{a_I \mid I \in P_\lambda\}^a \subset F_\lambda^a = F_\lambda.$$

したがって, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し, $a = a_\lambda$ であることを示せば, $a \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$ が分かる.

$P_\lambda \subset P$ だから $a_\lambda \geq a$ である.

一方, 任意の $I \in P$ に対し, $I \subset I \cup \{\lambda\} \in P_\lambda$ であるから, $a_\lambda \leq a_{I \cup \{\lambda\}} \leq a_I$ となり, $a_\lambda \leq \inf_{I \in P} a_I = a$. $\square$

講義では, $a \in F_\lambda$ を示すのに以下の議論を用いた. (本質的にはもちろん上の議論と同じである.)

任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $[a, a + \varepsilon) \cap F_\lambda \neq \emptyset$ であることを示せばよい. (このとき $a \in F_\lambda^a = F_\lambda$ となるから.) a は下限だから, ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ が存在し, $a_I < a + \varepsilon$ となる. $I \cup \{\lambda\}$ は有限集合で I を含むので

$$a \leq a_{I \cup \{\lambda\}} \leq a_I < a + \varepsilon$$

となり $a_{I \cup \{\lambda\}} \in [a, a + \varepsilon)$. また

$$a_{I \cup \{\lambda\}} \in F_{I \cup \{\lambda\}} \subset F_\lambda$$

ゆえ $a_{I \cup \{\lambda\}} \in [a, a + \varepsilon) \cap F_\lambda \neq \emptyset$. □

Remark. 一般の距離空間では有界閉ならコンパクトなんてことはない. $(0, 1)$ とか離散距離空間とか...

exercise 140. Z を $\mathbb{R}$ に Zariski 位相をいれた位相空間とする.

1. Z はコンパクトであることを示せ.
2. Z のコンパクト部分集合はどのようなものか?

コンパクト空間の性質を調べよう.

Proposition 3.12.10. $A_1, A_2 \subset X$ がコンパクトならば $A_1 \cup A_2$ もコンパクトである.

Proof. $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を部分集合 $A_1 \cup A_2$ の開被覆, すなわち, O_λ は X の開集合で, $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup O_\lambda$ であるとする. あきらかに $\{O_\lambda\}$ は A_i の開被覆であり, 仮定より A_i はコンパクトなのである有限部分集合 $J_i \subset \Lambda$ が存在して $A_i \subset \bigcup_{j \in J_i} O_j$ となる. $J = J_1 \cup J_2 \subset \Lambda$ は有限集合であり $A_1 \cup A_2 \subset \bigcup_{j \in J} O_j$ となる, つまり, $\{O_j\}_{j \in J}$ は $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の有限部分被覆である. よって $A_1 \cup A_2$ はコンパクトである. □

Theorem 3.12.11. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである.

Proof. X をコンパクト空間とし, $A \subset X$ を閉部分集合とする. $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の開被覆, すなわち O_λ は X の開集合で, $A \subset \bigcup O_\lambda$ であるとする. このとき $\{O_\lambda\} \cup \{A^c\}$ は X の開被覆である. X はコンパクトなので, ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ で, $X = \bigcup_{i \in I} O_i \cup A^c$ となるものがある. あきらかに $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ である. □

Theorem 3.12.12. コンパクト空間の連続写像による像はコンパクトである.

Proof. X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とし, X はコンパクトであるとする. $f(X)$ がコンパクトであることを示そう. $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $f(X)$ の開被覆, すなわち O_λ は Y の開集合で, $f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ であるとする. X の部分集合族 $\{f^{-1}(O_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を

考える. f は連続だから $f^{-1}(O_\lambda)$ は X の開集合である. また, $f(X) \subset \bigcup O_\lambda$ だから $X \subset f^{-1}(\bigcup O_\lambda) = \bigcup f^{-1}(O_\lambda)$. よって $\{f^{-1}(O_\lambda)\}$ は X の開被覆である. X はコンパクトだから, ある有限部分集合 $I \subset \Lambda$ で, $X = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$ となるものがある. $f(X) = f(\bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)) \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. $\square$

Remark. コンパクト集合の連続写像による逆像はコンパクトとは限らない. 例えば $\mathbb{R}$ 上の定数関数を考えてみよ.

Corollary 3.12.13. コンパクト性は位相的性質である.

Corollary 3.12.14. コンパクト空間上の実数値連続関数は最大値と最小値をとる.

Proof. X をコンパクト, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とすると, 像 $f(X)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合だから有界閉集合. よって $f(X)$ には最大元, 最小元が存在する. $\square$

Corollary 3.12.15. 有界閉区間上の連続関数は最大値と最小値をとる. $\square$

Theorem 3.12.16. X, Y とともにコンパクトなら $X \times Y$ もコンパクト.

Proof. $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $X \times Y$ の開被覆とする.

$$\mathcal{U} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y, \exists \lambda \in \Lambda : U \times V \subset O_\lambda\}$$

とすると $\mathcal{U}$ も $X \times Y$ の開被覆である. ($X \times Y$ の開集合は, X の開集合と Y の開集合の直積の和集合として表されるのであった.) $\mathcal{U}$ が有限部分被覆をもつことを示そう. $x \in X$ をひとつとる. $\{x\} \times Y$ は Y と同相だからコンパクト. よって $\mathcal{U}$ の有限個の元 $U_{x1} \times V_{x1}, \dots, U_{xn_x} \times V_{xn_x}$ が存在し, $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} U_{xi} \times V_{xi}$ となる. $\{x\} \times Y \cap U_{xi} \times V_{xi} \neq \emptyset$ としてよい. $W_x = \bigcap_{i=1}^{n_x} U_{xi}$ とおくと (有限個の開集合の共通部分なので) W_x は X の開集合であり $x \in W_x$ である. また

$$Y = p_2(\{x\} \times Y) \subset p_2\left(\bigcup_{i=1}^{n_x} U_{xi} \times V_{xi}\right) = \bigcup_{i=1}^{n_x} p_2(U_{xi} \times V_{xi}) = \bigcup_{i=1}^{n_x} V_{xi}$$

だから

$$W_x \times Y = W_x \times \bigcup_{i=1}^{n_x} V_{xi} = \bigcup_{i=1}^{n_x} W_x \times V_{xi} \subset \bigcup_{i=1}^{n_x} U_{xi} \times V_{xi}$$

である (絵を描いてみよ). 各 $x \in X$ に対しこのようにして W_x をとれば X の開被覆 $\{W_x\}_{x \in X}$ がえられる. X はコンパクトだからある有限個の点 $x_1, \dots, x_m \in X$ が存在し, $X = \bigcup_{i=1}^m W_{x_i}$ となる. よって

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^m W_{x_i} \times Y \subset \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{j=1}^{n_{x_i}} U_{x_i j} \times V_{x_i j}$$

となり $\mathcal{U}$ の有限部分被覆がえられた. 各 i, j に対し $U_{x_{ij}} \times V_{x_{ij}} \subset O_{\lambda_{ij}}$ となる $\lambda_{ij} \in \Lambda$ を選べば $X \times Y \subset \bigcup_{ij} O_{\lambda_{ij}}$ となり $\{O_{\lambda}\}$ の有限部分被覆がえられる. $\square$

Remark. 上の証明では選択公理をこっそり使っているが, うまく工夫すれば選択公理を使わないように出来る. 無限個の直積の場合も同様なことが成り立つ (チコノフ (Tikhonov) の定理) が, こちらは選択公理が必要 (選択公理と同値) であり証明はもう少し面倒.

exercise 141. $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset, X \times Y$ コンパクトとする. このとき, X, Y ともにコンパクトであることを示せ.

これから次が示せる.

Theorem 3.12.17 (Heine-Borel). ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は有界閉集合であること.

Proof. コンパクトなら有界閉集合であることは既に示した.

$A \subset \mathbb{R}^n$ が有界閉集合であるとする. 有界であるからある $K \in \mathbb{R}$ が存在して, $A \subset [-K, K]^n$ となる. Thm. 3.12.9 より $[-K, K]$ はコンパクトであるから, Thm. 3.12.16 より $[-K, K]^n$ もコンパクトである. ($\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ は同相, 問題集 196 参照.) A はコンパクト空間 $[-K, K]^n$ の閉集合であるから Thm. 3.12.11 よりコンパクトである. $\square$

Example 3.12.18 (cf. exe 115). S^1 から $[0, 1)$ への連続な全射は存在しない. とくに S^1 と $[0, 1)$ は同相ではない. S^1 は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合だからコンパクトであり, $[0, 1)$ は $\mathbb{R}$ の閉集合ではないのでコンパクトではないから.

コンパクト Hausdorff 空間について調べよう.

Theorem 3.12.19. Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合である.

Proof. X を Hausdorff 空間, $A \subset X$ をコンパクト部分集合, $x \in A^c$ とする. x が A^c の内点であることを示そう.

$a \in A$ とすると, $x \neq a$ であり, X が Hausdorff なので, x の開近傍 U_a と a の開近傍 V_a で $U_a \cap V_a = \emptyset$ となるものが存在する. 各 $a \in A$ に対しこのような組 U_a, V_a をひとつ選ぶ. (あるいはこのような組全てを考える等すれば選択公理はいらない, 例えば

$$\Lambda = \{(a, V) \mid a \in A, V: \text{open}, a \in V, x \in V^c\}$$

) $\{V_a\}_{a \in A}$ は A の開被覆であり, A はコンパクトなので, ある $a_1, \dots, a_n \in A$ が存在し, $A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{a_i}$ となる. $U := \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$ とおけば, U は x の開近傍であり, $U \cap V_{a_i} \subset$

$U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$ なので

$$U \cap A \subset U \cap \bigcup_{i=1}^n V_{a_i} = \bigcup_{i=1}^n U \cap V_{a_i} = \emptyset$$

となり（絵を描いてみよ） $U \subset A^c$ だから x は A^c の内点. □

Corollary 3.12.20. コンパクト Hausdorff 空間の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は閉集合であること.

Proof. Thm. 3.12.11, 3.12.19 よりあきらか. □

Corollary 3.12.21. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像である.

Proof. Thm. 3.12.11, 3.12.12, 3.12.19 よりあきらか. □

Corollary 3.12.22. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射は同相写像である. □

第 4 章

完備距離空間

4.1 完備性

Definition 4.1.1. (X, d) を距離空間とする. X の点列 $\{x_n\}$ が 基本列 (fundamental sequence) あるいは コーシー列 (Cauchy sequence) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ ($m, n \geq N$) に対し, $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ となる.

数列の場合 (§1.2) と同様に, 距離空間における収束列は基本列であること, 基本列は有界であることがわかる.

実数体 $\mathbb{R}$ においては基本列は収束列であったが, 一般の距離空間においては必ずしもそうではない.

Example 4.1.2. 开区間 $(0, 2) \subset \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間として距離空間とみると, $(0, 2)$ の点列 $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は基本列だが収束しない.

exercise 142. なぜか?

Definition 4.1.3. 距離空間 X は, すべての基本列が収束するとき, 完備 (complete) であるという.

exercise 143. 離散距離空間は完備である.

Theorem 4.1.4. X が完備 $\Leftrightarrow$ 「 X の空でない閉集合の減少列 $X \supset F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0$ をみたせば, $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.」

Proof. $\Rightarrow$) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し点 $x_n \in F_n$ をひとつえらぶ. このとき点列 $\{x_n\}$ は基本列である. 実際, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ ならば $\delta(F_n) < \varepsilon$ となる. この N に対し, $m, n \geq N$ ならば $F_m, F_n \subset F_N$ だから

$x_m, x_n \in F_N$ であり, $d(x_m, x_n) \leq \delta(F_N) < \varepsilon$.

仮定より X は完備であるから $\{x_n\}$ はある点 $x \in X$ に収束する. $n \in \mathbb{N}$ とする. $i \geq n$ ならば $F_i \subset F_n$ ゆえ $x_i \in F_n$. F_n の点列 $\{x_i\}_{i \geq n}$ は x に収束し, F_n は閉集合だから $x \in F_n$. よって $x \in \bigcap_n F_n$. とくに $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$.

$\Leftarrow$) $\{x_n\}$ を X の基本列とする. $A_n = \{x_i\}_{i \geq n} \subset X$, $F_n = A_n^a$ とする. あきらかに F_n は空でない閉集合であり, $F_n \supset F_{n+1}$.

$\{x_n\}$ は基本列であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $i, j \geq N$ ならば $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ となる. $n \geq N$ ならば $A_n \subset A_N$ であるから

$$\delta(F_n) = \delta(A_n^a) = \delta(A_n) \leq \delta(A_N) = \sup_{i, j \geq N} d(x_i, x_j) \leq \varepsilon$$

となり, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0$ である.

よって仮定より $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$ である. $x \in \bigcap_n F_n$ とする. $x, x_n \in F_n$ ゆえ $d(x_n, x) \leq \delta(F_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となり $\{x_n\}$ は x に収束する. $\square$

問題集 . 95, 100(1),(2),(3), 101(2),(3), 104(1),(2),(3), 111(2),(3)

Definition 4.1.5. 位相空間 X の部分集合 A が第1類集合 (set of the first category, meager set) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} A$ は可算個の全疎な集合の和集合:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad (A_i \text{ は } X \text{ で全疎}).$$

Theorem 4.1.6 (ベール (Baire) の稠密性定理). 完備距離空間 X において, 第1類集合の補集合は X で稠密である.

Corollary 4.1.7. 空でない完備距離空間は第1類集合ではない.

定理の証明のため補題をひとつ用意する.

Lemma 4.1.8. X を距離空間, $A \subset X$ を全疎な部分集合, $O \subset X$ を空でない開集合とする. このとき $U^a \subset O \cap A^e$ となるような, 空でない開集合 U が存在する.

Proof. A は全疎だから Prop. 3.5.13 より A^e は稠密である. よって Prop. 3.5.3 より $O \cap A^e \neq \emptyset$ であり, O, A^e は開集合だから $O \cap A^e$ も開集合. $x \in O \cap A^e$ をひとつとる. $O \cap A^e$ は開集合だからある $\varepsilon > 0$ が存在して $U_\varepsilon(x) \subset O \cap A^e$ となる. $U = U_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ とすればよい. $\square$

Proof of Thm. 4.1.6. $X \supset A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ (A_k :全疎) を第1類集合とする. A^c が稠密であることを示そう. Prop. 3.5.3 より, 空でない任意の開集合 O に対し, $O \cap A^c \neq \emptyset$ であ

ることを示せばよい.

$O \subset X$ を空でない開集合とする. $U_0 = O$ とする. $k \geq 1$ に対し, 帰納的に, 空でない開集合 U_k を $U_k^a \subset U_{k-1} \cap A_k^c$, $\delta(U_k) < 1/k$ となるようにとる. (Lem. 4.1.8 参照.) X は完備であるから, Thm. 4.1.4 より, $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^a \neq \emptyset$ である. U_k のとりかたより, $U_k^a \subset A_k^c \subset A_k^c$ であるから, $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^a \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k^c = (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)^c = A^c$. また $\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^a \subset U_1^a \subset U_0 = O$. よって $O \cap A^c \supset \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k^a \neq \emptyset$. $\square$

Cor. 3.5.5 でみたように, 有限個の稠密な開集合の共通部分は稠密であった. 完備距離空間においては可算無限個でもよい.

Corollary 4.1.9. X を完備距離空間, O_k を X で稠密な開集合とすると, $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} O_k$ は X で稠密である.

Proof. $A_k = O_k^c$ とおくと, A_k は閉集合で, O_k が稠密だから, $(A_k^a)^\circ = A_k^\circ = O_k^{c\circ} = O_k^{ac} = X^c = \emptyset$ となり, A_k は全疎である. $E = \bigcap O_k = \bigcap A_k^c = (\bigcup A_k)^c$ だから, ベールの定理より, E は稠密. $\square$

Remark. 上の Corollary において完備という仮定は必要である. $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間として, 距離空間とみる. $\mathbb{Q}$ では 1 点は閉集合だから任意の $r \in \mathbb{Q}$ に対し $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$ は開集合であり, また 1 点は開集合ではないので $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$ は閉集合ではないから $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$ は稠密である. が, これらすべての (可算) 共通部分 $\bigcap_{r \in \mathbb{Q}} (\mathbb{Q} \setminus \{r\}) = \emptyset$ は稠密ではない.

Definition 4.1.10. 距離空間 X の部分集合 A が完備 $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ (部分) 距離空間 A が完備.

Theorem 4.1.11. 距離空間 X の部分集合 A が完備ならば, A は閉集合である.

Proof. $\{a_n\}$ を A の点列とし, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x \in X$ とする. $\{a_n\}$ は X の収束列であるから, X の基本列である. よって距離空間 A の点列とみたとき基本列である. A は完備なので, $\{a_n\}$ は A の点に収束する. よって $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in A$ となり, Cor. 2.7.5 より A は閉集合である. $\square$

exercise 144. X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合, $\{a_n\}$ を A の点列とする. $\{a_n\}$ が X の基本列であることと, 部分距離空間 A の点列として基本列であることは同値である.

Corollary 4.1.12. $A \subsetneq X$ が稠密ならば A は完備ではない.

Proof. $A^a = X \neq A$ ゆえ A は閉集合ではない. $\square$

Example 4.1.13. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間とし, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間として距離空間とみる. すなわち $d(q, r) = |q - r|$ で $\mathbb{Q}$ に距離をいれる. このとき $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密

なので完備ではない.

Theorem 4.1.14. X を完備距離空間とする. $A \subset X$ が閉集合ならば A は完備である.

Proof. $\{a_n\}$ を A の基本列とする. あきらかに $\{a_n\}$ は X の点列とみても基本列である. X は完備だから $\{a_n\}$ は X の点 $x \in X$ に収束する. A は閉集合だから $x \in A$. よって A は完備である. $\square$

Corollary 4.1.15. X を完備距離空間, $A \subset X$ とする. このとき, A が完備 $\Leftrightarrow A$ は閉集合.

Example 4.1.16. (Y, d_Y) が有界完備距離空間ならば, Ex. 2.8.6 の距離空間 $F(X, Y)$ も完備である. よってこのとき $C(X, Y)$ も $(F(X, Y))$ の閉集合なので 完備である.

Proof. $\{f_n\}$ を $F(X, Y)$ の基本列とする. 任意の $x \in X$ に対し,

$$d_Y(f_m(x), f_n(x)) \leq \sup_{x \in X} d_Y(f_m(x), f_n(x)) = d(f_n, f_m)$$

であるから, $\{f_n(x)\}$ は Y の基本列である. Y は完備であるから $\{f_n(x)\}$ は収束する. 写像 $f: X \rightarrow Y$ を $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in Y$ により定める.

$\{f_n\}$ が f に (一様) 収束することを示そう. $\{f_n\}$ は基本列であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $m, n \geq N$ ならば $d(f_m, f_n) < \varepsilon/2$ となる. 任意の $x \in X$ に対し, $n \geq N$ ならば

$$d_Y(f_N(x), f(x)) \leq d_Y(f_N(x), f_n(x)) + d_Y(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + d_Y(f_n(x), f(x))$$

であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ であるから,

$$d_Y(f_N(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

したがって

$$d(f_N, f) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

よって, $n \geq N$ ならば

$$d(f_n, f) \leq d(f_n, f_N) + d(f_N, f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\square$

Theorem 4.1.17. X を距離空間, Y を完備距離空間, $A \subset X$ を部分集合, $f: A \rightarrow Y$ を一様連続な写像とする. このとき, f は A^a まで連続に拡張され, その拡張は一意的であ

る. すなわち, 連続写像 $\bar{f}: A^a \rightarrow Y$ で, $\bar{f}|_A = f$ となるものがただひとつ存在する. さらに $\bar{f}$ は一様連続である.

Proof. 1. 連続な拡張は一意的であること. (これを示すのには一様連続性も完備性も使わない.)

$g, h: A^a \rightarrow Y$ を連続写像で, 任意の $a \in A$ に対し $g(a) = f(a) = h(a)$ をみたすものとする.

$x \in A^a$ とする. A の点列 $\{a_n\}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ となるものが存在する. g, h ともに連続なので

$$g(x) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = h(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = h(x),$$

よって $g = h$.

2. 連続な拡張は一様連続であること. (これを示すのに完備性は使わない.)

写像 $g: A^a \rightarrow Y$ を $g|_A = f$ となる連続写像とする. g が一様連続であることを示そう.

$\varepsilon > 0$ とする.

$f: A \rightarrow Y$ は一様連続なので, ある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $a, b \in A$ に対し, $d(a, b) < 3\delta$ ならば $d(f(a), f(b)) < \varepsilon/3$ となる.

この δ に対し, $x, y \in A^a$ が $d(x, y) < \delta$ をみたすとする.

g は連続なので, ある $\delta_x > 0$ が存在して, $g(U_{\delta_x}(x)) \subset U_{\varepsilon/3}(g(x))$ となる. $\delta_x < \delta$ としてよい. 同様に, ある $0 < \delta_y < \delta$ が存在して, $g(U_{\delta_y}(y)) \subset U_{\varepsilon/3}(g(y))$ となる. $x \in A^a$ だから $U_{\delta_x}(x) \cap A \neq \emptyset$ である. よって $a \in A$ で $d(a, x) < \delta_x$ となるものがある. 同様に $b \in A$ で $d(y, b) < \delta_y$ となるものがある.

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d(a, x) + d(x, y) + d(y, b) \\ &< \delta_x + \delta + \delta_y < 3\delta \end{aligned}$$

であり, g は f の拡張なので

$$d(g(a), g(b)) = d(f(a), f(b)) < \varepsilon/3$$

である. よって

$$\begin{aligned} d(g(x), g(y)) &\leq d(g(x), g(a)) + d(g(a), g(b)) + d(g(b), g(y)) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

3. 連続な拡張が存在すること.

- (i) A の点列 $\{a_n\}$ が収束列であれば, Y の点列 $\{f(a_n)\}$ も収束列であることを示す. (一様連続性, 完備性どちらも必要.)

Y が完備なので $\{f(a_n)\}$ が基本列であることを示せばよい. $\varepsilon > 0$ とする. f は一様連続であるからある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $a, b \in A$ に対し, $d(a, b) < \delta$ ならば $d(f(a), f(b)) < \varepsilon$ となる. $\{a_n\}$ は収束列なので基本列である. よって, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $m, n \geq N$ ならば $d(a_m, a_n) < \delta$ となる. よって, $m, n \geq N$ ならば $d(f(a_m), f(a_n)) < \varepsilon$.

- (ii) A の収束列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ をみたせば, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ であることを示す.

A の点列 $\{c_n\}$ を $c_{2k-1} = a_k, c_{2k} = b_k$ で定める. (つまり $\{c_n\}$ は $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ という点列である.) あきらかに $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ であり $\{c_n\}$ は収束列である. よって (i) より Y の点列 $\{f(c_n)\}$ も収束列である. $\{f(a_n)\}, \{f(b_n)\}$ はどちらも $\{f(c_n)\}$ の部分列であるからその極限点は $\lim_{n \rightarrow \infty} f(c_n)$ である (Lem. 1.2.12 参照).

- (iii) 写像 $\bar{f}: A^a \rightarrow Y$ を次のように定める. $x \in A^a$ に対し, A の点列 $\{a_n\}$ で $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x$ となるもの (が Thm. 2.7.4 により存在するのでそれ) をとり, $\bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ と定める. (i) よりこの極限は存在し, (ii) より x に収束する A の点列のとり方によらない.

$\bar{f}$ は (一様) 連続であることを示そう.

$\varepsilon > 0$ とする. $f: A \rightarrow Y$ は一様連続であるからある $\delta > 0$ が存在して, 任意の $a, b \in A$ に対し, $d(a, b) < 2\delta$ ならば $d(f(a), f(b)) < \varepsilon/2$ となる. $x, y \in A^a, d(x, y) < \delta$ とする. x に収束する A の点列 $\{a_n\}$ と y に収束する A の点列 $\{b_n\}$ をとる. $\bar{f}$ の定義より $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \bar{f}(x), \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = \bar{f}(y)$ である. よってある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq N$ に対し, $d(a_n, x) < \delta/2, d(b_n, y) < \delta/2, d(f(a_n), \bar{f}(x)) < \varepsilon/4, d(f(b_n), \bar{f}(y)) < \varepsilon/4$ となる. $d(a_N, b_N) \leq d(a_N, x) + d(x, y) + d(y, b_N) < \delta/2 + \delta + \delta/2 = 2\delta$ であるから $d(f(a_N), f(b_N)) < \varepsilon/2$. よって $d(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \leq d(\bar{f}(x), f(a_N)) + d(f(a_N), f(b_N)) + d(f(b_N), \bar{f}(y)) < \varepsilon/4 + \varepsilon/2 + \varepsilon/4 = \varepsilon$.

□

この定理の連続な拡張の一意性はもっと一般的な状況で成立する.

exercise 145. X, Y を位相空間, $A \subset X$ を稠密な部分集合, $f, g: X \rightarrow Y$ を連続写像で A 上一致する (すなわち任意の $a \in A$ に対し $f(a) = g(a)$ となる) ものとする.

1. Y が Hausdorff 空間であれば $f = g$ であることを示せ.

2. $f = g$ とはならないような (X, A, Y, f, g) の例を挙げよ.

連続な拡張の存在には一様連続性が必要である.

exercise 146. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ とし, 写像 $f: \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = 1/x$ で定める.

1. f は連続であることを示せ.
2. f を $\mathbb{R}$ まで連続に拡張することはできない, すなわち写像 $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が $\bar{f}|_{\mathbb{R}^\times} = f$ をみたせば f は連続ではないことを示せ.

また連続な拡張の存在には Y が完備であることも必要である.

exercise 147. $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間, $A \subsetneq \mathbb{R}$ を稠密な部分集合とする.

1. A は連結ではないことを示せ.
2. 恒等写像 $1_A: A \rightarrow A$ を $\mathbb{R}$ まで連続に拡張することはできない, すなわち連続写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow A$ で $f|_A = 1_A$ をみたすものは存在しないことを示せ.

集合 X からそれ自身への写像 $f: X \rightarrow X$ に対し, $f(x) = x$ となる点 $x \in X$ を f の 不動点 (fixed point) または 固定点 という. 不動点の存在に関するいろいろな定理が知られているが, 次はその一番簡単なもののひとつである.

Theorem 4.1.18 (縮小写像の原理 (contraction principle)). X を完備距離空間, $f: X \rightarrow X$ を縮小写像 (contraction map), すなわち, ある $0 \leq \alpha < 1$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対し, $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ をみたす写像であるとする. このとき f はただひとつの不動点 $a \in X$ をもつ. さらに, 任意の $x \in X$ に対し $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = a$ である.

Proof. $x \in X$ をひとつとる. $x_n = f^n(x)$ により X の点列 $\{x_n\}$ を定める. $\{x_n\}$ は基本列であることを示そう.

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x_n)$$

だから $d(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n d(x, x_1)$ である. $0 \leq \alpha < 1$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, N を十分大きくとれば $\alpha^N d(x, x_1)/(1 - \alpha) < \varepsilon$ となる. $n > m \geq N$ ならば

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \\
&\leq \sum_{i=m}^{n-1} \alpha^i d(x, x_1) \\
&= \frac{\alpha^m - \alpha^n}{1 - \alpha} d(x, x_1) \\
&\leq \frac{\alpha^N}{1 - \alpha} d(x, x_1) < \varepsilon
\end{aligned}$$

となり $\{x_n\}$ は基本列である.

X は完備ゆえ $\{x_n\}$ は収束する. f は縮小写像だから (一様) 連続である. よって

$$f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

となり $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ は不動点である. すなわち, 任意の $x \in X$ に対し, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$ が存在し, それは f の不動点である.

$a, b \in X$ を f の不動点とすると,

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq \alpha d(a, b)$$

ゆえ $(1 - \alpha)d(a, b) \leq 0$. $\alpha < 1$ に注意すると $d(a, b) = 0$. よって $a = b$. □

4.2 Baire の定理の応用例

この講義で証明をつけた定理のうち名前をつけて紹介した定理は、中間値の定理 (3.11.12), Heine-Borel の定理 (3.12.9, 3.12.17), Baire の稠密性定理 (4.1.6), 縮小写像の原理 (4.1.18) の 4 つだけである。名前がついているくらいだからどれも様々な応用をもつ重要な定理なのであるが、Baire の稠密性定理 (Baire のカテゴリー定理とよばれることの方が多いかもしれない) をはじめて見たときはおそらく何がありがたいのやらさっぱり分からないのではないかと思う。よく知られた応用として関数解析学における開写像定理, 閉グラフ定理があるがこれらはこの講義で扱うには (準備もたくさん必要だし) ふさわしくない。ここでは以下の例を挙げよう。(おそらく Baire 本人による。[2] 参照.)

4.2.1 $\mathbb{R}$ が非可算集合であること

Proposition 4.2.1. $X \neq \emptyset$ を孤立点をもたない (すなわち, 1 点からなる部分集合は開集合ではない) 完備距離空間とすると, X は集合として非可算集合である。

Proof. 仮定より 1 点からなる部分集合は全疎である。よって X の可算部分集合は第 1 類集合である。したがって Baire の定理より X は可算集合ではない。 $\square$

Corollary 4.2.2. $\mathbb{R}$ は非可算集合である。 $\square$

4.2.2 関数の連続点と不連続点

よく知られているように関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{p} & x \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}, x - [x] = \frac{q}{p}, p, q \in \mathbb{N}, p, q \text{ は互いに素} \end{cases}$$

(ただし $[x]$ は x を越えない最大の整数, すなわち $[x] \leq x < [x] + 1$ をみたすような整数) と定めると, f は全ての有理点で不連続, 全ての無理点で連続である。

では, 全ての有理点で連続, 全ての無理点で不連続な関数はあるのか? というのは自然な疑問であろう。

Proposition 4.2.3. $\mathbb{R}$ 上定義された実数値関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が全ての有理点で連続であれば, f は稠密な無理点上で連続である。とくに, $\mathbb{R}$ 上定義された実数値関数で, 全ての有理点で連続であり, 全ての無理点で不連続であるようなものは存在しない。

Proof. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が任意の $r \in \mathbb{Q}$ で連続であるとする.

$\mathbb{Q}$ は可算集合であるから $\mathbb{N}$ との間に全単射が存在する. $\mathbb{Q} = \{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (ただし $i \neq j$ なら $r_i \neq r_j$) とする.

$n \in \mathbb{N}$ とする. f は $r_n \in \mathbb{R}$ で連続なので, ある正数 $\delta_n > 0$ が存在して次をみたす.

$$|x - r_n| < 2\delta_n \Rightarrow |f(x) - f(r_n)| < \frac{1}{2n} \quad (4.1)$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{R}$ の部分集合 U_n, O_n を以下で定める.

$$U_n = (r_n - \delta_n, r_n + \delta_n) \subset \mathbb{R}$$

$$O_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j - \{r_n\}$$

このとき O_n は $\mathbb{R}$ で稠密な開集合である. 実際, 各 U_j は开区間であることから, O_n が開集合であることは明らか. また $O_n \supset \{r_j\}_{j>n}$ である. 任意の $\varepsilon > 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q}$ は無限集合であるから, $U_\varepsilon(x) \cap \{r_j\}_{j>n} \neq \emptyset$ である. したがって $\{r_j\}_{j>n}$ は $\mathbb{R}$ で稠密, よってそれを含む O_n も稠密である.

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \subset \mathbb{R}$$

とする.

$\mathbb{R}$ は完備であるから, Baire の定理より, C は $\mathbb{R}$ で稠密, 特に空ではない.

$a \in C$ とすると, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a \in O_n$. よって $a \neq r_n$, ($\forall n \in \mathbb{N}$). すなわち $a \notin \mathbb{Q}$ である. よって $C \subset \mathbb{Q}^c$.

$a \in C$ とする. f は点 a で連続であることを示そう. $\varepsilon > 0$ とする. $\frac{1}{n} < \varepsilon$ となるような自然数 $n \in \mathbb{N}$ をひとつとる. $a \in C = \bigcap_{j=1}^{\infty} O_j$ だから

$$a \in O_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j - \{r_n\} \subset \bigcup_{j=n}^{\infty} U_j$$

よって $N \geq n$ であるような自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$a \in U_N = (r_N - \delta_N, r_N + \delta_N)$$

このとき $|a - r_N| < \delta_N < 2\delta_N$ であるから, δ_N のとり方 (4.1) より

$$|f(a) - f(r_N)| < \frac{1}{2N} \quad (4.2)$$

$|x - a| < \delta_N$ とすると

$$|x - r_N| \leq |x - a| + |a - r_N| < \delta_N + \delta_N = 2\delta_N$$

であるから

$$|f(x) - f(r_N)| < \frac{1}{2N} \quad (4.3)$$

したがって

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f(r_N)| + |f(r_N) - f(a)| \\ &< \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} = \frac{1}{N} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \end{aligned}$$

となり f は点 a で連続である. よって f は ($\mathbb{R}$ で稠密な, 無理数からなる集合) C 上連続である. □

4.3 完備化

Definition 4.3.1. X を距離空間とする. 完備距離空間 $\hat{X}$ と, 距離を保つ写像 $i: X \rightarrow \hat{X}$ で, $i(X)$ が $\hat{X}$ で稠密であるようなものの組 $(\hat{X}, i)$ を距離空間 X の完備化 (completion) という.

しばしば i により X と $i(X) \subset \hat{X}$ を同一視して $X \subset \hat{X}$ とみなし, i を省略して $\hat{X}$ を X の完備化とよぶ.

この節で, 任意の距離空間に対し, その完備化が存在することの証明を2通り与えるが, その前に完備化の普遍性による特徴付けを与えておく.

Theorem 4.3.2. X を距離空間, Y を完備距離空間, $c: X \rightarrow Y$ を距離を保つ写像とする. このとき次は同値である.

1. (Y, c) は X の完備化である.

2. $c: X \rightarrow Y$ は次の普遍性をもつ:

任意の完備距離空間 Z と, 任意の距離を保つ写像 $f: X \rightarrow Z$ に対し, 距離を保つ写像 $\hat{f}: Y \rightarrow Z$ で $\hat{f} \circ c = f$ をみたすものがただひとつ存在する.

3. $c: X \rightarrow Y$ は次の普遍性をもつ:

任意の完備距離空間 Z と, 任意の一致連続写像 $f: X \rightarrow Z$ に対し, 一致連続写像 $\hat{f}: Y \rightarrow Z$ で $\hat{f} \circ c = f$ をみたすものがただひとつ存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow c & \searrow f & \\ Y & \xrightarrow{\hat{f}} & Z \end{array}$$

Remark. 上記 3 については次の形で述べるべきかもしれない:

X を距離空間, Y を完備距離空間, $c: X \rightarrow Y$ を一致連続写像とする. このとき次は同値である.

1. Y に同じ (一致) 位相を定める適当な距離をいれると (Y, c) は X の完備化となる.

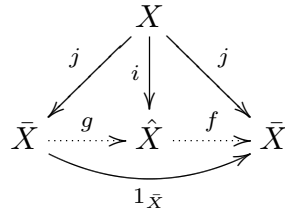
2. $c: X \rightarrow Y$ は次の普遍性をもつ:

任意の完備距離空間 Z と, 任意の一致連続写像 $f: X \rightarrow Z$ に対し, 一致連続写像 $\hat{f}: Y \rightarrow Z$ で $\hat{f} \circ c = f$ をみたすものがただひとつ存在する.

定理の証明の前に普遍性の帰結として一意性を示しておこう.

Corollary 4.3.3. 距離空間 X の完備化は次の意味で一意的である. $(\hat{X}, i), (\bar{X}, j)$ をともに X の完備化とすると, 距離空間としての同型写像 (距離を保つ全単射) $f: \hat{X} \rightarrow \bar{X}$ で $f \circ i = j$ となるものがただひとつ存在する.

Proof. $i: X \rightarrow \hat{X}, j: X \rightarrow \bar{X}$ の普遍性より距離を保つ写像 $f: \hat{X} \rightarrow \bar{X}, g: \bar{X} \rightarrow \hat{X}$ で $f \circ i = j, g \circ j = i$ をみたすものがそれぞれただひとつ存在する.



$f \circ g, 1_{\bar{X}}: \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ はどちらも距離を保つ写像であり,

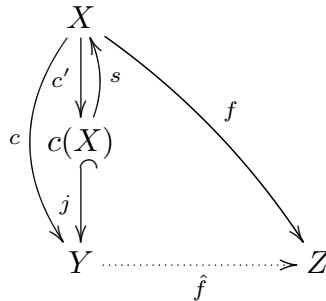
$$(f \circ g) \circ j = f \circ (g \circ j) = f \circ i = j, \\ 1_{\bar{X}} \circ j = j$$

となる. よって j の普遍性 (このような写像はただひとつ) より $f \circ g = 1_{\bar{X}}$. 同様に $g \circ f = 1_{\hat{X}}$ が示せ, f は全単射 (で, g がその逆写像) である. $\square$

Proof of Thm. 4.3.2. 1 $\Rightarrow$ 3) これは本質的には Thm. 4.1.17 である. $c: X \rightarrow Y$ を X の完備化とする. $j: c(X) \rightarrow Y$ を包含写像とし, c を

$$c = j \circ c': X \xrightarrow{c'} c(X) \xrightarrow{j} Y$$

と分解する. c は距離を保つので $c': X \rightarrow c(X)$ は距離空間としての同型写像である. その逆写像を $s: c(X) \rightarrow X$ とおく.



Z を完備距離空間, $f: X \rightarrow Z$ を一様連続写像とする. s は距離を保つので $f \circ s: c(X) \rightarrow Z$ も一様連続である. $c(X)^a = Y$ であるから, Thm. 4.1.17 より, 一様連続写像 $\hat{f}: Y \rightarrow Z$ で $\hat{f} \circ j = f \circ s$ となるものがただひとつ存在する. $\hat{f}$ は

$$\hat{f} \circ c = \hat{f} \circ j \circ c' = f \circ s \circ c' = f$$

をみたす. また, 一様連続写像 $g: Y \rightarrow Z$ が $g \circ c = f$ をみたせば,

$$g \circ j = g \circ j \circ c' \circ s = g \circ c \circ s = f \circ s$$

となり g は $f \circ s$ の連続な拡張である. よって拡張の一意性から $g = \hat{f}$.

3 $\Rightarrow$ 2) Y が完備で, 距離を保つ写像 $c: X \rightarrow Y$ が **3** の普遍性をもつとする.

1. $c(X)^a = Y$ を示す. $j: c(X)^a \rightarrow Y$ を包含写像とし, c を

$$c = j \circ c': X \xrightarrow{c'} c(X)^a \xrightarrow{j} Y$$

と分解する. Y が完備であるからその閉集合である $c(X)^a$ も完備であり, c が距離を保つので c' も距離を保ち, とくに一様連続である. よって c の普遍性から, 一様連続写像 $r: Y \rightarrow c(X)^a$ で $r \circ c = c'$ となるものが (ただひとつ) 存在する.

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & \swarrow c & \downarrow c' & \searrow c & \\ Y & \cdots \xrightarrow{r} & c(X)^a & \xrightarrow{j} & Y \end{array}$$

$j: c(X)^a \rightarrow Y$ は包含写像だから距離を保ち一様連続である. よって Cor. 4.3.3 の議論と同様にして c の普遍性から $j \circ r = 1_Y$ がわかる. とくに包含写像 j が全射となるので $c(X)^a = Y$.

2. Z を完備距離空間, $f: X \rightarrow Z$ を距離を保つ写像とする. f は距離を保つので一様連続である. c の普遍性 **3** から, 一様連続写像 $\hat{f}: Y \rightarrow Z$ で $\hat{f} \circ c = f$ となるものが (ただひとつ) 存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow c & \searrow f & \\ Y & \cdots \xrightarrow{\hat{f}} & Z \end{array}$$

$\hat{f}$ は連続であり, c, f が距離を保つので $\hat{f}|_{c(X)}$ は距離を保ち, $c(X)$ は Y で稠密であるから $\hat{f}$ は距離を保つ.

2 $\Rightarrow$ 1) 上の証明の 1 と同様にして $c(X)^a = Y$ であることがわかる. □

exercise 148. X, Y を距離空間, $A \subset X$, $f: A^a \rightarrow Y$ を連続写像, $f|_A$ は距離を保つとする. このとき f も距離を保つことを示せ.

以下, 完備化が存在することの証明を 2 通り与える.

Theorem 4.3.4. 任意の距離空間は完備距離空間に等長にうめこめる. すなわち, 任意の距離空間 X に対し, 完備距離空間 Z と等長写像 $i: X \rightarrow Z$ が存在する.

Proof. $X \neq \emptyset$ としてよい. $x_0 \in X$ をひとつ固定する.

$$F_0(X, \mathbb{R}) = \left\{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in X} |d_{x_0}(x) - f(x)| < \infty \right\}$$

とおくと, Ex. 2.8.6 と同様に

$$d_F(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

により $F_0(X, \mathbb{R})$ に距離 d_F を定めることができ (問題集 87(2) 参照), Ex. 4.1.16 と同様にして完備距離空間となることがわかる. ただし $d_{x_0}: X \rightarrow \mathbb{R}$ は $d_{x_0}(x) = d(x_0, x)$ で与えられる (一様連続) 写像である.

任意の $x, y, z \in X$ に対し, Ex. 2.8.4 でみたように,

$$|d_x(z) - d_y(z)| = |d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$$

であり,

$$|d_x(y) - d_y(y)| = |d(x, y) - d(y, y)| = d(x, y)$$

であるから

$$\sup_{z \in X} |d_x(z) - d_y(z)| = d(x, y)$$

となる. とくに任意の $x \in X$ に対し $\sup_{z \in X} |d_{x_0}(z) - d_x(z)| = d(x_0, x) < \infty$ だから $d_x \in F_0(X, \mathbb{R})$ であり, 写像 $\delta: X \rightarrow F_0(X, \mathbb{R})$ を $\delta(x) = d_x$ で定めると,

$$d_F(\delta(x), \delta(y)) = d_F(d_x, d_y) = \sup_{z \in X} |d_x(z) - d_y(z)| = d(x, y)$$

となり δ は距離を保つ. $Z = F_0(X, \mathbb{R})$, $i = \delta$ とおけばよい. □

Corollary 4.3.5. 任意の距離空間 X に対し, その完備化が存在する.

Proof. $i: X \rightarrow Z$ を完備距離空間 Z への等長写像とする. $\hat{X} = i(X)^a \subset Z$ とおけば, $\hat{X}$ は完備距離空間の閉集合であるから完備であり, あきらかに $i(X)$ は $\hat{X}$ で稠密である. よって $(\hat{X}, i)$ は X の完備化である. □

exercise 149. X を位相空間, $A \subset B \subset X$ とする. このとき A が B で稠密であることと, A が部分空間 B で稠密であることは同値である (すなわち, A の X における閉包を A^a , B における閉包を $\bar{A}$ としたとき, $A^a \supset B \Leftrightarrow \bar{A} = B$) ことを示せ.

Cor. 4.3.5 の別の証明を与えよう. この証明のアイディアは, 基本列そのものをその列の極限だとみなすというものである. この構成法は確かめなくてはならないことが多いという欠点があるが, もとの距離空間がベクトル空間等の構造を持っている場合にその完備化に自然にその構造を拡張できるという利点がある. また同じ考え方により有理数体から実数体を構成できる.

Proof of Cor. 4.3.5 その2. X を距離空間とし, X の基本列全体のなす集合

$$\mathcal{X} = \{\{x_n\} \in X^{\mathbb{N}} \mid \{x_n\} \text{ は } X \text{ の基本列}\}$$

を考える. $\mathcal{X}$ における関係 $\sim$ を

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \quad (4.4)$$

により定め, この同値関係による商集合を $\hat{X} = \mathcal{X} / \sim$, 基本列 $\{x_n\}$ の同値類を $[x_n]$ とかく.

$\{x_n\}, \{y_n\} \in \mathcal{X}$ に対し, 問題集 91(2) より

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$$

であるから, 実数列 $\{d(x_n, y_n)\}$ は基本列であり収束する.

$$\delta(\{x_n\}, \{y_n\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

と定める. $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ ならば $\delta(\{x_n\}, \{y_n\}) = \delta(\{x'_n\}, \{y'_n\})$ であることが容易に確かめられる. よって $[x_n], [y_n] \in \hat{X}$ に対し, 実数 $\hat{d}([x_n], [y_n])$ を

$$\hat{d}([x_n], [y_n]) = \delta(\{x_n\}, \{y_n\})$$

により定めることができる. このようにして定めた

$$\hat{d}: \hat{X} \times \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

は $\hat{X}$ 上の距離関数となる.

写像 $i: X \rightarrow \hat{X}$ を, $x \in X$ を $x_n = x$ という定数列に移す写像とすると, あきらかに i は距離を保つ.

$i(X)$ が $\hat{X}$ で稠密であることを示す. $[x_n] \in \hat{X}$ とする. $\{x_n\}$ は X の基本列であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $m, n \geq N$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon/2$ となる. よって $m \geq N$ ならば

$$\hat{d}([x_n], i(x_m)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

となり $i(x_m) \in U_\varepsilon([x_n])$ である. よって $\lim_{m \rightarrow \infty} i(x_m) = [x_n]$, とくに $[x_n] \in i(X)^a$.
したがって $i(X)$ は $\hat{X}$ において稠密である.

最後に $\hat{X}$ が完備であることを示す. $\{[x]_n\}$ を $\hat{X}$ の基本列, $\{x_{k,n}\}_{k \in \mathbb{N}}$ を $[x]_n$ をあらわす X の基本列とする. $i(X)$ は $\hat{X}$ で稠密なので, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, $x_n \in X$ で $\hat{d}([x]_n, i(x_n)) < 1/n$ となるものをえらぶことができる. この点列 $\{x_n\}$ は X の基本列である. 実際, $\varepsilon > 0$ とすると, $\{[x]_n\}$ は $\hat{X}$ の基本列であったから, ある自然数 $N \geq 3/\varepsilon$ が存在して, 任意の $m, n \geq N$ に対し $\hat{d}([x]_m, [x]_n) < \varepsilon/3$ となる. 任意の $k, m, n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{k,m}) + d(x_{k,m}, x_{k,n}) + d(x_{k,n}, x_n)$$

であるから, 任意の $m, n \geq N$ に対し

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} (d(x_m, x_{k,m}) + d(x_{k,m}, x_{k,n}) + d(x_{k,n}, x_n)) \\ &= \hat{d}(i(x_m), [x]_m) + \hat{d}([x]_m, [x]_n) + \hat{d}([x]_n, i(x_n)) \\ &< \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

この X の基本列 $\{x_n\}$ のあらわす $\hat{X}$ の点 $[x_n]$ を考える. x_n の選び方から $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}([x]_k, i(x_k)) = 0$ であり, また上でみたように $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}(i(x_k), [x_n]) = 0$ であるから

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{d}([x]_k, [x_n]) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (\hat{d}([x]_k, i(x_k)) + \hat{d}(i(x_k), [x_n])) = 0,$$

すなわち, $\{[x]_n\}$ は $[x_n]$ に収束する. よって $\hat{X}$ は完備である. □

exercise 150. 上の証明の詳細を練習問題としておく.

1. 関係 (4.4) は同値関係である.
2. $\{x_n\}, \{x'_n\}, \{y_n\}, \{y'_n\} \in \mathcal{X}$ に対し, $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$ ならば $\delta(\{x_n\}, \{y_n\}) = \delta(\{x'_n\}, \{y'_n\})$ である.
3. $\hat{d}$ は $\hat{X}$ 上の距離関数である.

参考文献

- [1] H. - D. エビングハウス, F. ヒルツェブルフ, M. ケッヒャー, K. マインツァー, and H. ヘルメス. 数〈上〉. シュプリンガーフェアラーク東京, 2004.
- [2] ウイリアム ダンハム. 微積分名作ギャラリー - ニュートンからルベークまで. 日本評論社, 2009.
- [3] 高橋 渉. 距離空間と位相空間 (数理解析入門シリーズ). 横浜図書, 10 2001.
- [4] 齋藤 正彦. 数学の基礎—集合・数・位相. 東京大学出版会, 2002.
- [5] 内田 伏一. 集合と位相 (数学シリーズ). 裳華房, 1986.
- [6] 琉球大学理学部数理科学科編. 位相空間問題集. <http://math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/>.
- [7] 静間 良次. 位相. サイエンス社, 1998.

索引

記号/数字

ε neighbourhood 14, 32

A

absolute value 11
 accumulation point 56, 70
 accumulation value 29
 adherent point 54, 70
 antisymmetric law 8
 Archimedean
 non — metric 38
 associative law 5
 axiom
 first — of countability 72
 second — of countability 87

B

Baire category theorem 114
 binary relation 2
 bounded 10, 39
 — from above 10
 — from below 10
 box topology 93

C

Cartesian product 1, 91
 Cauchy sequence 16, 113
 characteristic 9
 Chebyshev distance 35
 closed
 — ball 44
 — disc 44
 — interval 11
 — mapping 85
 — neighbourhood 48, 69
 — set 43, 68
 closure 54, 70
 coarser 66
 commutative
 — field 5
 — law 6
 compact 105
 quasi- — 105
 complete 22, 113
 completion 124
 connected 98
 continuous 61, 83

— map 61, 83
 uniformly — 63
 continuous mapping $\rightarrow$ continuous map
 contraction
 — map 119
 — principle 119
 convergent sequence 15
 convex set 100
 countability
 first axiom of — 72
 second axiom of — 87
 covering 105
 finite — 105
 open — 105

D

dense 78
 derived set 56, 70
 diameter 39
 disconnected 98
 discrete
 — metric space 37
 — topology 66
 distance 31
 Chebyshev — 35
 Hamming — 39
 Manhattan — 36
 distributive law 6

E

Euclidian space 34
 exterior 75

F

field 5, 6
 commutative — 5
 skew — 6
 totally ordered — 8
 finer 66
 finite covering 105
 finite intersection property 105
 fixed point 119
 frontier 75
 fundamental sequence 16, 113

H

Hamming distance 39

Hausdorff space	59, 95
Heine-Borel	106, 110
homeomorphic	83
homeomorphism	83

I

image	3
indiscrete topology	→ trivial topology
infimum	12
inner point	52, 69
interior	51, 69
interior point	→ inner point
interval	
closed —	11
open —	11
isolated point	56, 70
isometric	32
isometry	32
isomorphic	32

L

limit point	59, 71
linear order	8
lower bound	10

M

Manhattan distance	36
map	3
continuous —	61, 83
mapping	
closed —	85
open —	85
maximum element	10
meager set	→ set of the first category
metric	31
— space	31
— subspace	32
discrete — space	37
non-Archimedean —	38
minimum element	10
module	20

N

n -ary relation	2
n -dimensional sphere	82
neighbourhood	48, 69
ε —	14, 32
closed —	48, 69
fundamental system of —s	49, 69
open —	48, 69
system of —s	48, 69
non-Archimedean metric	38
nowhere dense	80

O

open	
— ball	32
— covering	105

— disc	32
— interval	11
— mapping	85
— neighbourhood	48, 69
— set	42, 65

order	8
linear —	8
partial —	8
total —	8

ordered	
— pair	1
— set	8
partially — set	8
totally — field	8

P

partial order	8
partially ordered set	8
path	102
path-connected	102
poset	→ partially ordered set
product topology	91

Q

quasi-compact	105
---------------	-----

R

reflexive law	8
relation	2, 7
binary —	2
n -ary —	2

S

Schwartz's inequality	33
separable	78
sequence	14
Cauchy —	16, 113
convergent —	15
fundamental —	16, 113

set	
closed —	43, 68
open —	42, 65
ordered —	8
partially ordered —	8
set of the first category	114
skew field	6
sphere	32, 82
stereographic projection	86
stronger	66
subcovering	105
subspace	32
supremum	12

T

topological	
— property	86
— space	65
topology	42, 65

- | | |
|-----------------------|----------|
| box — | 93 |
| coarser — | 66 |
| discrete — | 66 |
| finer — | 66 |
| product — | 91 |
| stronger — | 66 |
| trivial — | 66 |
| weaker — | 66 |
| Zariski — | 66 |
| total order | 8 |
| totally disconnected | 104 |
| totally ordered field | 8 |
| transitive law | 8 |
| trivial topology | 66 |
| U | |
| uniformly continuous | 63 |
| uniformly convergent | 63 |
| upper bound | 9 |
| W | |
| weaker | 66 |
| Z | |
| Zariski topology | 66 |
| あ | |
| 粗い | 66 |
| アルキメデス | |
| —的 | 20 |
| —の公理 | 20 |
| 非—的距離 | 38 |
| 位相 | 65 |
| 粗い— | 66 |
| —空間 | 65 |
| —和 | 94 |
| —を定める | 65 |
| 距離の定める— | 42 |
| 細かい— | 66 |
| ザリスキー— | 66 |
| 弱—による直積空間 | 93 |
| 生成する— | 88 |
| 相對— | 81 |
| 直積— | 91, 93 |
| 強い— | 66 |
| 箱— | 93 |
| 密着— | 66 |
| 弱い— | 66 |
| 離散— | 66 |
| 位相的性質 | 86 |
| 一様収束 | 63 |
| 一様連続 | 63 |
| ε 近傍 | 14, 32 |
| n 項関係 | 2 |
| n 次元球面 | 82 |
| か | |
| 開 | |
| —円盤 | 32 |
| —基 | 87 |
| —球 | 32 |
| —近傍 | 48, 69 |
| —区間 | 11 |
| —写像 | 85 |
| —集合 | 42, 65 |
| —被覆 | 105 |
| 外点 | 75 |
| 外部 | 75 |
| 下界 | 10 |
| 可換 | |
| —体 | 5 |
| —律 | 6 |
| 加群 | 20 |
| 下限 | 12 |
| 可算 | |
| 第一—公理 | 72 |
| 第二—公理 | 87 |
| 可分 | 78 |
| 加法 | 5 |
| 関係 | 2, 7 |
| n 項— | 2 |
| 二項— | 2 |
| 完全不連結 | 104 |
| 完備 | 113, 115 |
| —化 | 124 |
| 距離に関して— | 22 |
| 基 | 87 |
| 開— | 87 |
| 準— | 89 |
| 基本列 | 16, 113 |
| 逆元 | |
| 加法に関する— | 6 |
| 乗法に関する— | 6 |
| 球面 | 32, 82 |
| 境界 | 75 |
| 狭義 | |
| —単調減少列 | 18 |
| —単調増加自然数列 | 16 |
| —単調増加列 | 18 |
| 極限值 | 15 |
| 極限点 | 59, 71 |
| 距離 | 31 |
| A と B の— | 40 |
| x と B の— | 40 |
| —関数 | 31 |
| —に関して完備 | 22 |
| —の定める位相 | 42 |
| —を保つ | → 等長写像 |
| チェビシェフ— | 35 |
| ハミング— | 39 |
| 非アルキメデスの— | 38 |
| マンハッタン— | 36 |
| 距離空間 | 31 |
| 部分— | 32 |
| 離散— | 37 |
| 近傍 | 48, 69 |

ε —	14, 32	全 —	8
開 —	48, 69	線型 —	8
基本 — 系	49, 69	半 —	8
— 系	48, 69	半 — 集合	8
閉 —	48, 69	上界	9
区間		上限	12
開 —	11	乗法	5
閉 —	11	触点	54, 70
結合律	5	推移律	8
元		数列	14
最小 —	10	基本列	16
最大 —	10	狭義単調増加自然 —	16
公理		コーシー列	16
アルキメデスの —	20	収束列	15
第一可算 —	72	— の集積値	29
第二可算 —	87	正の無限大に発散する	15
連続性の —	22	単調減少列	18
コーシー列	16, 113	単調増加列	18
弧状連結	102	単調列	19
固定点	→ 不動点	負の無限大に発散する	15
細かい	66	部分列	17
孤立点	56, 70	生成する	
コンパクト	105	— 位相	88
準 —	105	積	5
さ		絶対値	11
最小元	10	線型順序	8
最大元	10	全順序	8
ザリスキー位相	66	— 体	8
三角不等式	31	全疎	80
実数	22	像	3
— 体	22	相対位相	81
弱位相		た	
— による直積空間	93	体	5, 6
写像	3	可換 —	5
開 —	85	実数 —	22
同相 —	83	斜 —	6
等長 —	32	全順序 —	8
閉 —	85	第 1 類集合	114
連続 —	61, 83	単位元	
集合		加法に関する —	6
開 —	42, 65	乗法に関する —	6
順序 —	8	単調	
半順序 —	8	狭義 — 増加自然数列	16
閉 —	43, 68	— 減少列	18
集積値		— 増加列	18
数列の —	29	— 列	19
集積点	56, 70	チェビシェフ距離	35
収束	14	中間値の定理	101
一様 —	63	稠密	78
収束列	15	直積	1
縮小写像	119	— 位相	91, 93
— の原理	119	— 空間	91, 93
Schwartz の不等式	33	弱位相による — 空間	93
準コンパクト	105	直径	39
順序	8	強い	66
— 集合	8	デカルト積	1, 91
— 対	1	点列	59

基本列	113
コーシー列	113
同型	32
導集合	56, 70
同相	83
—写像	83
等長	32
等長写像	32
凸集合	100

な

内点	52, 69
内部	51, 69
二項関係	2

は

Heine-Borel の定理	106, 110
Hausdorff 空間	59, 95
箱位相	93
発散	15
正の無限大に—する	15
負の無限大に—する	15
ハミング距離	39
反射律	8
半順序	8
—集合	8
反対称律	8
非アルキメデスの距離	38
等しい	1
被覆	105
開—	105
部分—	105
有限—	105
有限部分—	105
標数	9
非連結	98
不動点	119
部分	
—距離空間	32
—空間	32, 81
—列	17
部分被覆	105
不連結	→ 非連結
分配律	6
閉	
—円盤	44
—球	44
—近傍	48, 69
—区間	11
—写像	85
—集合	43, 68
閉包	54, 70
ベールの定理	114

ま

マンハッタン距離	36
道	102

密着位相	66
------	----

や

有界	10, 39
上に—	10
下に—	10
ユークリッド空間	34
有限交叉性	105
有限被覆	105
有限部分被覆	105
弱い	66

ら

離散	
—位相	66
—距離空間	37
立体射影	86
連結	98
連続	61, 83
—様—	63
—写像	61, 83
連続性の公理	22

わ

和	5
---	---