

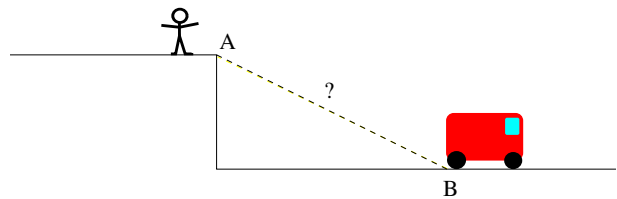
最速降下線 (Brachistocrone)

佃 修一

2004年10月5日,12日

最近懐かしの (高校生のみなさんにとっては別に懐かしくはないか...) 『サンダーバード』が映画化されましたが御覧になりましたか? 『サンダーバード』はアメリカの大富豪ジェフ・トレーシーによって2065年に設立された (た?) 国際救助隊の活躍を描いた映画で, “サンダーバード” というのは隊員たちが駆使する “スーパーメカ” です. (<http://www.tbjapan.com/> 参照.)

ここにサンダーバードとは特に関係の無い, とある国際救助隊の基地があります. 隊員たちの待機室は2階にあり, 彼らが救助の際に使用する車両等は1階に配備されています. 今年度, 幸いなことに予算がついたので, 2階から1階へ降りる緊急出動用のすべり台を取り付けることになりました. 緊急出動用ですので図のAからBへ出来るだけ速く到達出来るようにしなくてははいけません. さてどのような形のすべり台にすればよいでしょうか?



この問題は (ギリシア語の $\beta\rho\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$ -最短の- $\chi\rho\acute{o}\nu\omicron\varsigma$ -時間- から名づけられた) 最速降下線問題, brachistochrone problem と呼ばれる数学史上有名な問題で, 変分法*が誕生する契機となりました. 歴史上はじめてこういった問題意識を持ったのはガリレオ (Galileo) であろうと思われます. 彼はAとBを結ぶ直線が最速ではないことを示し, AとBを結ぶ円弧が最速であると考えました.

1696年にスイス生まれの数学者ヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli) は当時の数学者達に対する挑戦問題としてこの問題を提出しました. その年の終わりまでに当時の一流の数学者6人, ヨハン本人, ヨハンの兄ヤコブ・ベルヌーイ (Jakob), ライプニッツ (Leibniz), ニュートン (Newton), ド・ロピタル (de l'Hopital), チルンハウス (Tschirnhaus) から解答が寄せられました. このうちニュートンは匿名で解答を提出したのですが, ヨハンは「その爪痕をみてライオンを知る」と言って, ただちにそれがニュートンによる解答だということが分かったそうです.

現代では変分法を用いて解くのが一般的ですが必要な微積分の知識が多くなりますので, 以下ではヨハン本人の最初の解答にそってこの問題に答えを与えてみましょう.

*付録 A.1 参照.

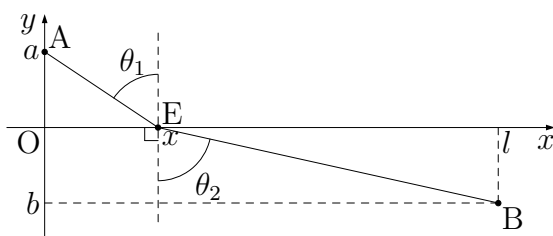
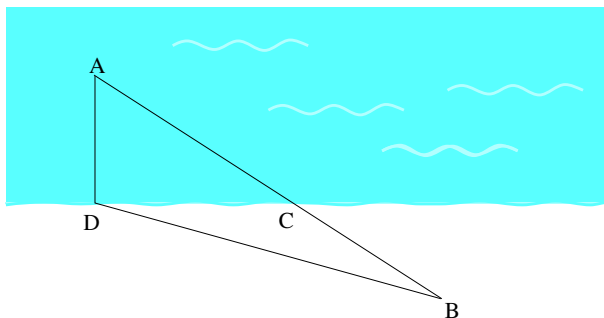
目 次

1	スネル (Snell) の法則, フェルマー (Fermat) の原理	1
2	最速降下線の満たすべき条件	4
3	サイクロイド (cycloid)	7
4	気になる人のために	12
5	問題	15
A	付録	16
A.1	変分法	16
A.2		16
A.3		17
	あとがき	17

1 スネル (Snell) の法則, フェルマー (Fermat) の原理

最速降下線問題を考える前に準備として次の問題を考えてみましょう.
図の海の中の A 地点から砂浜の B 地点まで行くにはどのようなルートを通るのが最も速いでしょう?

距離が最も短いのは明らかに A と B を結ぶ直線 ACB ですが, たいていの場合砂浜を走った方が水中を走ったり泳いだりするよりは速いので海の中を移動する距離をなるべく短くしたルート ADB の方が速いかもしれません.



問題を考えやすくするために, 海岸線を x 軸とし, y 軸が点 A を通るような座標を導入しましょう. 点 A の座標を $(0, a)$, 点 B の座標を (l, b) , 上陸地点を E としてその座標を $(x, 0)$ とします.

AE 間の距離は $\sqrt{a^2 + x^2}$, EB 間の距離は $\sqrt{b^2 + (l - x)^2}$ ですから, 水中での速さを v_1 , 砂浜での速さを v_2 とすると

ルート AEB を通ったときにかかる時間 T は次の式

$$T = T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}}{v_2} \dots\dots\dots ①$$

で表されます. 砂浜に上陸する点 E つまり x をいろいろ動かしたときに $T = T(x)$ が最小になるための条件を求めてみましょう.

$T(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} T'(x) &= \left\{ \frac{1}{v_1} (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{v_2} (b^2 + (l - x)^2)^{\frac{1}{2}} \right\}' \\ &= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{1}{2} (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{1}{2} (b^2 + (l - x)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2(l - x)) \\ &= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} \end{aligned}$$

となります. $T(x)$ が最小であるためには $T'(x) = 0$ でなければなりません.

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \theta_1, \quad \frac{l - x}{\sqrt{b^2 + (l - x)^2}} = \sin \theta_2$$

であることに注意すると, $T'(x) = 0$ であるのは

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

となるときであることがわかります.

$T'(x)$ の微分を計算してみると

$$\begin{aligned} T''(x) &= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{1 \cdot (a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} - x \cdot x(a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{a^2 + x^2} \\ &\quad - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{-1 \cdot (b^2 + (l-x)^2)^{\frac{1}{2}} - (l-x) \cdot (-(l-x)(b^2 + (l-x)^2)^{-\frac{1}{2}})}{b^2 + (l-x)^2} \\ &= \frac{a^2 + x^2 - x^2}{v_1(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2 + (l-x)^2 - (l-x)^2}{v_2(b^2 + (l-x)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{a^2}{v_1(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{v_2(b^2 + (l-x)^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \end{aligned}$$

となりますから $T'(x)$ は単調増加となります. $T'(x) = 0$ となる x , すなわち等式②が成り立つときの x を x_0 とすると, 関数 $T(x)$ の増減表は次のようになり,

x		x_0	
T''	+		
T'	-	0	+
T		最小	

確かに等式②が成立するときが最速であることがわかります.

~~~~~

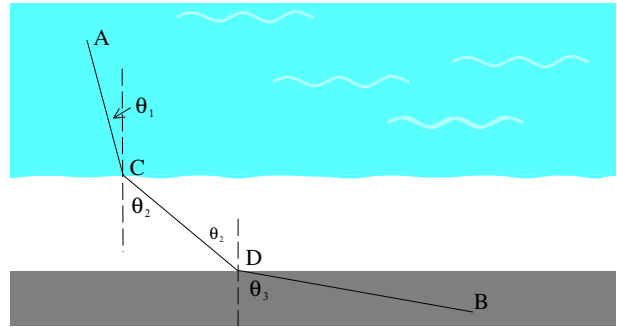
この等式②は光の屈折に関する「スネルの法則」と同じものです. スネルは光がふたつの媒体の境界を通過するときの入射角  $\theta_1$  をいろいろ変えたときに射出角  $\theta_2$  との間に  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$  が一定であるという関係が成り立つことを発見しました.

(フェルマーの大定理で有名な) フェルマーは, 『光は最も時間のかからない経路を通る』という仮説(フェルマーの原理)をたて, それをもとに  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$  が一定となる理由を説明しました. 後にライプニッツとホイヘンス(Huygens)は新しい計算法(微分法)を用い上のような考察を経て  $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$  と速さの関係(スネルの法則②)を見出しました.

さて次にもう少しだけ問題を複雑にしてみましょう。

図の海中にある A 地点から砂浜をこえて舗装路にある B 地点まで最速でいくルートはどのようなものでしょう？

舗装路を走る速さを  $v_3$  としましょう。先程と同様に A から B まで行くときにかかる時間の式をたてて計算してもよいですが、ここでは次のように考えてみ



ましょう。図の ACDB が最速経路だとしましょう。このとき経路 ACD は A から D への最速経路になっているはずです。（そうでなければ ACDB より速いルートがあることになってしまいます。）従ってやはり等式②が成り立っていません。同様に考えると CDB は C から D への最速経路になっているので等式

$$\frac{\sin \theta_2}{v_2} = \frac{\sin \theta_3}{v_3}$$

が成り立ちます。従って結局等式

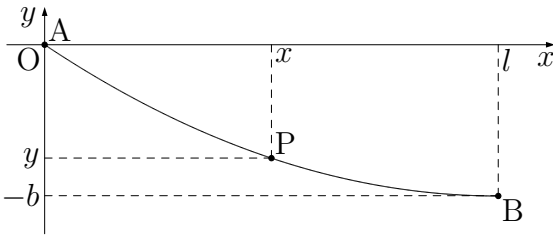
$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2} = \frac{\sin \theta_3}{v_3}$$

が成り立つ経路が最速であるということになります。

## 2 最速降下線の満たすべき条件

これから最初のすべり台の問題を考えるのですが、問題が少し漠然としているのでもう少しはっきりさせておきましょう。われわれが考える問題は以下のようなものです。

『鉛直面内にある2点A, B（ただしBはAの真下ではなく、またAより高くはない）を結ぶ曲線を考える。一様な重力のもと質点が初速度0で点Aから曲線にそって（空気抵抗や摩擦なしに）すべり落ちるとき、点Bに到達するのに要する時間が最も短いような曲線を求めよ。』



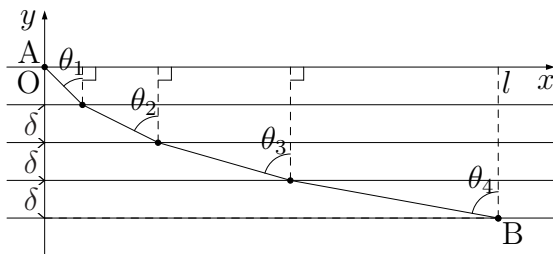
考えやすくするために鉛直面内に、Aを原点とし、鉛直方向上向きが正となるように $y$ 軸を、点Bの $x$ 座標が正となるように $x$ 軸を導入し、Bの座標を $(l, -b)$ （ただし $l > 0, b \geq 0$ ）、曲線は $y = f(x)$ で表されるとします。この節では曲線 $y = f(x)$ が最速降下線であるとして満たすべき条件を調べてみましょう。

ここで少し力学の復習をします。質量 $m$ の質点を初速度0で曲線にそってすべらせて点 $P(x, y)$ にきたときの速さを $v$ とすると、エネルギー保存則から次の式が成り立ちます。

$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

ただしここで重力加速度を $g$ としました。したがって点Pにおける速さは $v = \sqrt{-2gy}$ で表されます。（ $y \leq 0$ に注意。）つまり各点における速さはその点の高さ（ $y$ 座標）のみで決まります。

そこで、 $x$ 軸より下の部分が $x$ 軸に平行な無限に細い帯に分割されていて、各帯の中では速さが一定であると考えことにしましょう。無限に細い帯というのはよくわからないので、とても細い帯に分割されているという状況を考えます。このような状況での最速経路を考えて、帯の幅を0に近づけた極限を考えると求める曲線が得られるであろうというわけです。

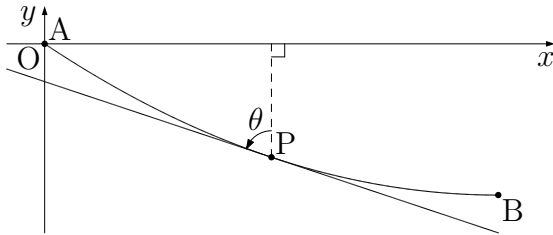


点Aと点Bの間を幅 $\delta = b/n$ の、 $x$ 軸に平行な帯に $n$ 等分し、上から $i$ 番目の帯での速さは $v_i$ であるとして、最速な経路は各帯の中では直線であるはずですから、AとBを結ぶ折れ線になるはずで、 $i$ 番目の折れ点での入射角を $\theta_i$ とすると（図参照、図は $n = 4$ のとき）、

前節での考察からこの状況での最速の経路は等式

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \dots = \frac{\sin \theta_i}{v_i} = \dots = \frac{\sin \theta_n}{v_n}$$

を満たす, すなわち  $\sin \theta_i / v_i$  が定数となるような折れ線であることがわかります.



ここで  $n \rightarrow \infty$ , あるいは  $\delta \rightarrow 0$  とすると, 入射角  $\theta$  は  $y$  軸 (に平行な直線) と曲線の接線とのなす角になるでしょう.

したがって曲線  $y = f(x)$  が最速降下線であるならば, その曲線上

$$\frac{\sin \theta}{v} = K \text{ (定数)} \dots\dots\dots ③$$

という条件を満たしているはずですが. ここで  $\theta$  は上で述べたように  $y$  軸と曲線の接線とのなす角です. さて接線の傾きは  $y'$  で与えられるので

$$y' = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan \theta} \dots\dots\dots ④$$

という関係があります. 速さ  $v$  は  $v = \sqrt{-2gy}$  ..... ⑤ で与えられたことを思い出すと, ③, ④, ⑤をまとめて

$$\begin{aligned} (y')^2 &= \frac{1}{\tan^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} - 1 \\ &= \frac{1}{K^2 v^2} - 1 = \frac{1}{-2gK^2 y} - 1 \end{aligned}$$

となり,  $C = 1 / -2gK^2$  とおくと

$$(y')^2 = \frac{C - y}{y} \dots\dots\dots ⑥$$

あるいは同じことですが

$$y(1 + (y')^2) = C \text{ (定数)} \dots\dots\dots ⑥'$$

が得られます. ここで得られた⑥, ⑥' のように関数  $y$  の微分が含まれるような方程式を微分方程式といい, その条件を満たすような関数を求めることを微分方程式を解くといいます. 求める曲線が点 A, B を通るという条件を加えると, 曲線  $y = f(x)$  が最速降下線であるならば次の関係式を満たさなくてはなりません.



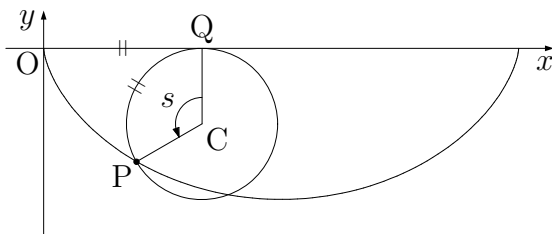
⑦ 最速降下線の微分方程式

$$\begin{cases} (y')^2 = \frac{C-y}{y} \\ y(0) = 0 \\ y(l) = -b \end{cases} \quad \begin{array}{l} \dots\dots\dots \textcircled{8} \\ \dots\dots\dots \textcircled{9} \end{array}$$

この微分方程式はわりと簡単な形をしているので具体的に解くことができますが、少し積分の知識が必要になりますので、天下りの的ですが次節でこの方程式を満たす曲線を紹介することにしましょう。

### 3 サイクロイド (cycloid)

直線上を円がすべることなくころがるとき円周上の一点の描く軌跡をサイクロイドといいます. サイクロイドが微分方程式⑥を満たすことを以下で見てみましょう.



サイクロイドは  $x$  軸の上にある円がころがってできる曲線として描かれることが多いのですが, われわれがほしいのは  $x$  軸の下にある曲線ですので  $x$  軸の下に円がある状況を考えましょう. そこで最初中心が  $(0, -a)$  にある半径  $a$  の円が  $x$  軸にそってすべらずにころがるとき, はじめ原点にあった円周上の固定点  $P$  が描く軌跡の式を求めましょう.

図で  $OQ = \widehat{PQ} = as$  であることに注意すると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} \\ &= \begin{pmatrix} as \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos(s + \frac{\pi}{2}) \\ a \sin(s + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} as \\ -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \sin s \\ a \cos s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} as - a \sin s \\ -a + a \cos s \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり,

**サイクロイドの媒介変数表示**

$$\begin{cases} x = as - a \sin s = a(s - \sin s) \\ y = -a + a \cos s = -a(1 - \cos s) \end{cases} \dots\dots\dots ⑩$$

が得られました.

微分  $y'$  を計算すると

$$\begin{aligned}y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy/ds}{dx/ds} = \frac{-a \sin s}{a(1 - \cos s)} = \frac{-\sin s}{1 - \cos s} \\ &= \frac{-2 \sin \frac{s}{2} \cos \frac{s}{2}}{2 \sin^2 \frac{s}{2}} = -\frac{\cos \frac{s}{2}}{\sin \frac{s}{2}} \dots\dots\dots ⑪\end{aligned}$$

となりますから

$$\begin{aligned}
 (y')^2 &= \left( \frac{-\sin s}{1 - \cos s} \right)^2 = \frac{\sin^2 s}{(1 - \cos s)^2} \\
 &= \frac{1 - \cos^2 s}{(1 - \cos s)^2} = \frac{(1 - \cos s)(1 + \cos s)}{(1 - \cos s)^2} \\
 &= \frac{1 + \cos s}{1 - \cos s} = \frac{-a - a \cos s}{-a(1 - \cos s)} \\
 &= \frac{-2a + a(1 - \cos s)}{-a(1 - \cos s)} \\
 &= \frac{-2a - y}{y}
 \end{aligned}$$

となり確かに微分方程式⑥（で  $C = -2a$  としたもの）を満たしています。

このサイクロイドは原点を通りますから条件⑧を満たしています。あとは点 B を通るという条件⑨を満たすように  $a$  の値を決めると（このような  $a$  がただひとつ存在することは容易にわかります。直観的にはあきらかでしょう。）サイクロイド⑩は最速降下線の微分方程式を満たすことがわかります。

したがって<sup>†</sup>

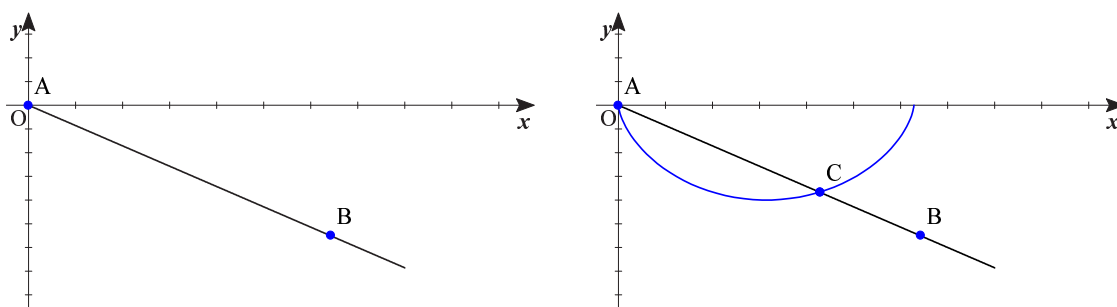
最速降下線はサイクロイドである

ことがわかりました。

~~~~~

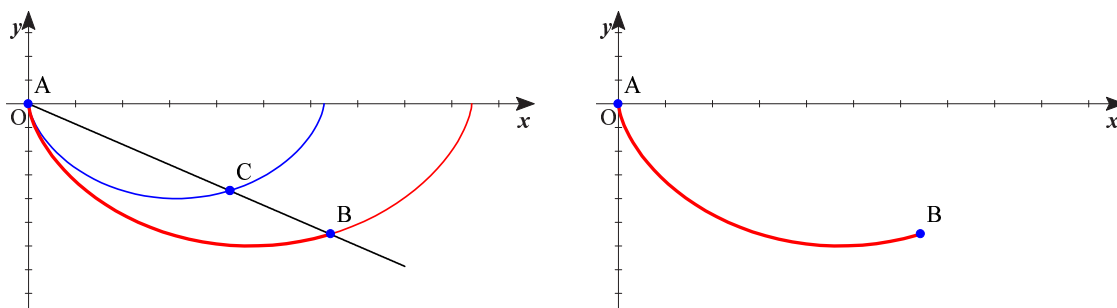
与えられた 2 点 A, B をとおる最速降下線を作図する方法を見ておきましょう。

まず A, B を結ぶ直線をひきます。次に点 A を始点とする適当な大きさのサイクロイドを描き、直線 AB との交点を C とします。



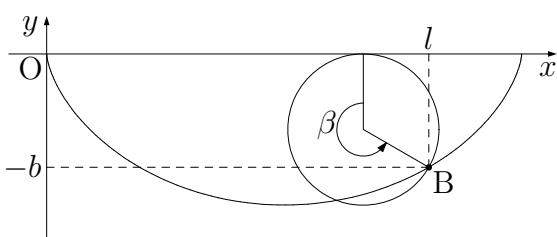
[†] というとインチキなのですが…気になる人は次節を。

このサイクロイドを AB/AC 倍したものを描くとちょうど点 B をとおり、求める最速降下線がえられます。



以下では積分も少し使うことにしましょう。

さてサイクロイドが最速降下線であることが分かったわけですが、点 A から点 B まで到達するのにどれくらいの時間がかかるでしょうか。



いつものように点 A を原点とする座標を考えます。点 B の座標を $(l, -b)$ とし、最速降下線（サイクロイド）は式⑩

$$\begin{cases} x = a(s - \sin s) \\ y = -a(1 - \cos s) = -2a \sin^2(s/2) \end{cases} \dots\dots\dots (12)$$

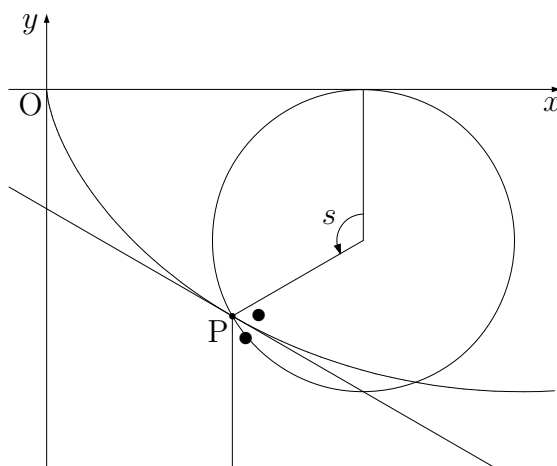
で与えられ、点 B は

$$\begin{cases} l = a(\beta - \sin \beta) \\ -b = -a(1 - \cos \beta) \end{cases}$$

と媒介変数表示されとしましょう。サイクロイド上の点

$$P = (a(s - \sin s), -a(1 - \cos s))$$

における接線の傾きは式⑪で表されるので、接線方向の (x 成分が正である) 単位ベクトルは $(\sin(s/2), -\cos(s/2))$ となり、点 P における速さを v とすると速度ベクトルは $(v \sin(s/2), -v \cos(s/2))$ となります。



したがって原点から点 B までの所要時間は

$$\int_0^l \frac{1}{v \sin \frac{s}{2}} dx \quad \dots\dots\dots \textcircled{13}$$

で与えられます. 考える s のは $0 \leq s \leq 2\pi$ を満たしますから $\sin(s/2) \geq 0$ なので $\textcircled{12}$ より

$$\sin \frac{s}{2} = \sqrt{\frac{-y}{2a}}$$

となります. 速さ v は式 $\textcircled{5}$ $v = \sqrt{-2gy}$ で与えられたことを思い出すと

$$\begin{aligned} \textcircled{13} &= \int_0^l \frac{1}{\sqrt{-2gy}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{-y}} dx \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^l \frac{1}{-y} dx \end{aligned}$$

ここで $x = a(s - \sin s)$ と置換すると $dx/ds = a(1 - \cos s) = -y$ ですから

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_0^\beta ds = \sqrt{\frac{a}{g}} \cdot \beta$$

となります.

~~~~~

ついでですのでサイクロイドの持つ興味深い性質をもうひとつ示しておきましょう.

サイクロイド $\textcircled{10}$ 上の点  $A = (x_0, y_0)$  ( $0 \leq x_0 < \pi a$ ) から初速度 0 で物体をすべらせたときに最下点  $(\pi a, -2a)$  に到達するのに要する時間を求めてみます.

高さ  $y (\leq y_0)$  の点での速さを  $v$  とするとエネルギー保存則から等式

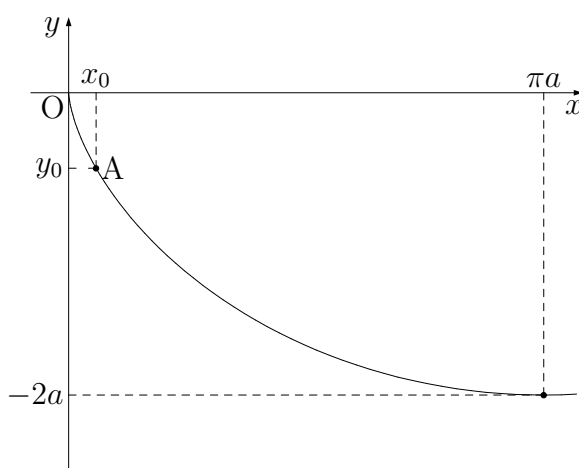
$$mgy + \frac{1}{2}mv^2 = mgy_0$$

が成り立ちますので  $v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$  .....  $\textcircled{14}$  となります.

先程は速度の  $x$  成分を用いて所要時間を計算しましたが, 今度は  $y$  成分を用いてみ

ましょう.  $y$  成分は  $-v \cos(s/2)$  であらわされたので所要時間は

$$\int_{y_0}^{-2a} \frac{1}{-v \cos \frac{s}{2}} dy \quad \dots\dots\dots \textcircled{15}$$



であたえられます。⑫から

$$\cos^2 \frac{s}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos s) = \frac{1}{2}\left(1 + 1 + \frac{y}{a}\right) = 1 + \frac{y}{2a}$$

であり，考える範囲  $0 \leq x_0 \leq x \leq \pi a$  ではパラメータの範囲は  $0 \leq s \leq \pi$  ですから  $\cos(s/2) \geq 0$  なので  $\cos(s/2) = \sqrt{(2a+y)/2a}$ . よって

$$\begin{aligned} \textcircled{15} &= \int_{y_0}^{-2a} \frac{1}{-\sqrt{2g(y_0 - y)}} \cdot \sqrt{\frac{2a}{y + 2a}} dy \\ &= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{-2a}^{y_0} \frac{1}{\sqrt{(y - (-2a))(y_0 - y)}} dy \\ &= \pi \sqrt{\frac{a}{g}} \end{aligned}$$

となりホイヘンスによって見出された等時性とよばれる次の性質が示せました。(最後の計算については付録 A.2 を参照.)

#### サイクロイドの等時性

サイクロイド⑩上の1点からサイクロイドに沿って落下する物体が最下点に到達するのに要する時間は出発点によらず一定で  $\pi\sqrt{a/g}$  である.

さらにサイクロイドは，その伸開線もまたサイクロイドであるという性質を持っています. これを利用してホイヘンスは等時振り子を開発しました.

## 4 気になる人のために

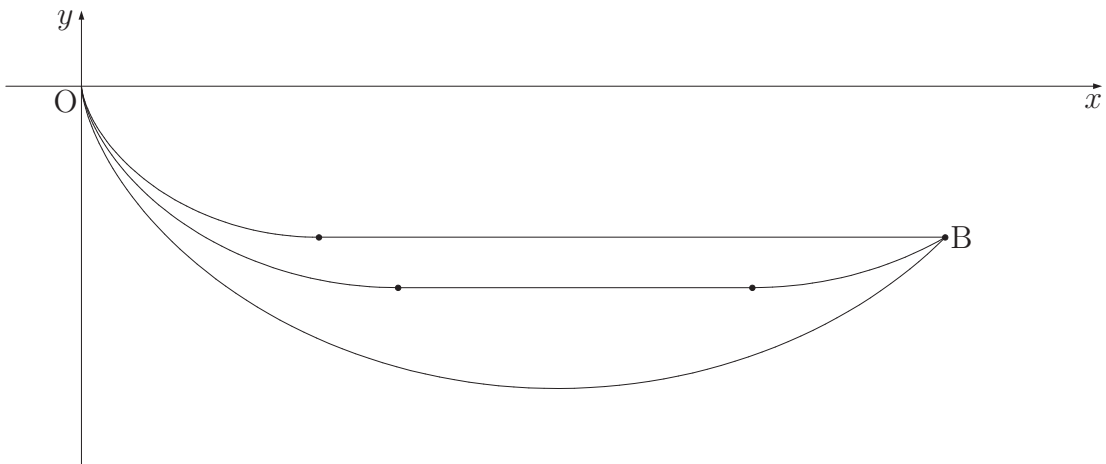
§2で、曲線  $y = f(x)$  が最速降下線ならば、最速降下線の微分方程式⑦を満たすことをみました。さらに §3 でサイクロイド⑩が微分方程式⑦を満たすことを示しました。しかし落ち着いて（落ち着かなくても）考えると、これだけでは、サイクロイドが本当に最速降下線なのかどうかはわかりません。次のふたつの点が気になるところです。

- (i) サイクロイドが⑦を満たすことは示しましたが、⑦を満たすのはサイクロイドだけなのでしょうか。
- (ii) 最速降下線ならば⑦を満たすことは示しましたが、⑦を満たせば最速降下線なのでしょうか。

実はこのふたつの問いの答えはどちらも「否」です。したがってサイクロイドが最速降下線であることを示すためにはもう少し考えを進める必要があります。

まず1番目の問題を考えてみましょう。

容易にわかるように  $y = C$  という  $x$  軸に平行な直線は微分方程式⑥を満たします。もちろんこの直線は点 A, B の高さが異なるときは条件⑧, ⑨を同時に満たすことはありませんから⑦を満たしません。しかし次のような経路を考えてみましょう（下図参照）。適当なサイクロイドを考えます。まずサイクロイドの最下点までサイクロイドに沿って進みます。そのあとしばらく水平に進みその後再びサイクロイドに沿って上がります。するとこの経路を表す曲線は⑦を満たすことがわかります。サイクロイドの他にもこのような曲線が⑦を満たすことはテイラー（Taylor）により 1715 年に指摘されました。



⑦を満たす曲線は上に挙げたようなものだけであることが（高校の範囲の数学を使えば）わかります。また前節の計算結果を使うと上に挙げた曲線の中ではサイクロイドが最速の経路であることが示せます。すなわち1番目の問いへの答えは

⑦を満たす曲線はサイクロイドだけではないが、それらの中でサイクロイドが最速である

ということになります。

⑦を満たす曲線でサイクロイドより時間がかかるものがあるわけですから、2 番目の問いの答えは「否」です。では、⑦を満たす曲線の中で最速であるサイクロイドは最速降下線でしょうか。

**もし最速降下線が存在するならば**、それは⑦を満たしているはずあり、当然、⑦を満たす曲線の中でも最速であるはずですから、それはサイクロイドであるということになります。

そこで、最速降下線が存在することを示せばよいということになるわけですが、これはかなりデリケートな問題で決してやさしくはありません。

最速降下線の存在を示すのではなく、直接、サイクロイドが最速経路であることを示すという手もあります。ここでは1969年(!)の次の論文

Benson, D.C. An elementary solution of the brachistochrone problem. American Mathematical Monthly 76(1969), 890-894

にしたがって実際にサイクロイドが最速の経路であることを示してみましよう。

簡単のため点 A と B の高さが等しいときを考えます。いつものように座標を導入し、 $A = (0, 0)$ ,  $B = (l, 0)$  とします。 $l = 2\pi a$  とすると、半径  $a$  の円がころがってできるサイクロイドが最速の経路であることを示しましよう。A と B を結ぶ曲線が

$$\begin{cases} x = \phi(s) \\ y = \psi(s) \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \phi(0) \\ 0 = \psi(0) \end{cases} \quad \begin{cases} l = \phi(L) \\ 0 = \psi(L) \end{cases}$$

と媒介変数で表されているとします。

このとき、この曲線に沿った所要時間は

$$\int_0^L \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{v} ds = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^L \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{-y}} ds \quad \dots\dots\dots \textcircled{16}$$

で与えられます。ただし  $\dot{x} = dx/ds$ ,  $\dot{y} = dy/ds$  と表しました。この曲線の最下点の  $y$  座標を  $-M$  ( $M \geq 0$ ) とします。

実数  $a, b, c, d$  に対して次のコーシーの不等式が成り立ちます。

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \geq ac + bd$$

$$\therefore (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2 \geq 0 \quad \square$$

$$a = |\dot{x}|, \quad b = |\dot{y}|, \quad c = \frac{1}{\sqrt{M}}, \quad d = \sqrt{\frac{1}{-y} - \frac{1}{M}}$$



としてコーシーの不等式を用いると,

$$\int_0^L \sqrt{\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{-y}} ds \geq \frac{1}{\sqrt{M}} \int_0^L |\dot{x}| ds + \int_0^L \sqrt{\frac{1}{-y} - \frac{1}{M}} |\dot{y}| ds \quad \dots\dots\dots (17)$$

となります. ⑬の第一項については, 不等式

$$\int_0^L |\dot{x}| ds \geq \int_0^L \dot{x} ds = \int_0^L \frac{dx}{ds} ds = \int_0^l dx = l$$

が成り立ちます.  $s_0$  を  $\psi(s_0) = -M$  となるような数とすると⑬の第二項は

$$\int_0^L \sqrt{\frac{1}{-y} - \frac{1}{M}} |\dot{y}| ds \geq \int_0^{s_0} \sqrt{\frac{1}{-y} - \frac{1}{M}} (-\dot{y}) ds + \int_0^{s_0} \sqrt{\frac{1}{-y} - \frac{1}{M}} \dot{y} ds$$

$t = -y$  と置換すると

$$\begin{aligned} &= \int_0^M \sqrt{\frac{1}{t} - \frac{1}{M}} dt - \int_M^0 \sqrt{\frac{1}{t} - \frac{1}{M}} dt \\ &= 2 \int_0^M \sqrt{\frac{1}{t} - \frac{1}{M}} dt \\ &= \pi \sqrt{M} \end{aligned}$$

と下からおさえられます. (最後の計算については付録 A.3 を参照. )

正の数  $\alpha$  に対し

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2\sqrt{\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}} = 2$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned} \textcircled{16} &\geq \frac{1}{\sqrt{2g}} \left( \frac{l}{\sqrt{M}} + \pi\sqrt{M} \right) \quad \dots\dots\dots (18) \\ &= \sqrt{\frac{\pi l}{2g}} \left( \sqrt{\frac{l}{\pi M}} + \sqrt{\frac{\pi M}{l}} \right) \\ &\geq 2\sqrt{\frac{\pi l}{2g}} = \sqrt{\frac{2\pi l}{g}} \end{aligned}$$

$l = 2\pi a$  なので

$$= 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

となり確かにサイクロイドが最速の経路を与えることがわかりました.

A と B の高さが違う場合は, A,B を通るサイクロイドを考えるとよいでしょう.

## 5 問題

いくつか問題を挙げておきます。やさしいものもありますし、かなり難しいものもあるかと思います。他にもいろいろとサイクロイドや最速降下線をネタにした問題は考えられるでしょう。自分でいろいろと問題を考えてみるとおもしろいのではないのでしょうか。微積分を学ぶ題材としてはなかなか魅力的なものではないかと思います。

**問題 1.** 同じ高さにあり 100 メートル離れた 2 点の間を、最速降下線に沿って物体をすべらせたときにかかる時間はどれくらいでしょう。重力加速度  $g$  としては  $9.8\text{m/s}^2$  がよく使われる値です。(大体のところを知るのであれば  $g$  として  $10\text{m/s}^2$  としてもよいでしょう。)

1000 メートルだとどうでしょう。

**問題 2.** 水平距離が 100 メートル離れていて、高さが  $b$  メートル違う 2 点の間を結ぶ直線に沿って物体をすべらせたときにかかる時間はどれくらいでしょう。

$b$  をどれくらいにすれば上で求めたものより短い時間で到達するでしょう。

また  $b$  をいろいろ変えると所要時間はどのように変化するでしょう。

**問題 3.** ガリレオは円弧が最速降下線であると考えました。円弧に沿って物体をすべらせたときの所要時間はどれくらいでしょう。サイクロイドの場合の所要時間と比べてみなさい。

**問題 4.** 水平距離が  $l$  だけ離れたところ (到達点の高さはいくらでもよい) に到達するための最速の経路はどのようなものでしょう。

**問題 5.** 地球が平らで重力が一樣であるとして、沖縄 - 大阪間 (約 1200km) の場合はどれくらいの時間がかかるでしょう。

**問題 6.** 実際のところは地球は平らではなく重力も一樣ではありません。地球は球であり、重力は地球の中心向き、その大きさは中心からの距離の 2 乗に反比例すると考えたとき最速降下線はどのようなものになるでしょう。(ちなみに、未解決問題というわけではないと思いますが私は答えを知りませんし、きれいな形で解が求まるのかどうかも知りません。)

**問題 7.** 微分方程式⑦を満たす曲線は §4 であげたものしかないことを示しなさい。またそれらの中でサイクロイドが最速経路であることを示しなさい。

**問題 8.** 逆に最も時間のかかる曲線はどのようなものでしょう。そもそもそのような曲線はあるのでしょうか。

**問題 9.** はじめのすべり台の問題に戻りましょう。点 B がある程度離れたところにある場合、サイクロイドすべり台を作るには床を掘らなくてはなりません。床を掘らずに作れるようなすべり台で最速なものはどのような形でしょう (§4 および⑩参照)。

## A 付録

### A.1 変分法

今回とりあげた最速降下線の問題を次のように見てみましょう.

点 A と B を結ぶ曲線  $y = f(x)$  をひとつ決めると, その曲線に対して A から B への所要時間  $T(f)$  が定まりますが,  $f$  をいろいろと動かしたとき,  $T(f)$  を最小にする  $f$  は何でしょうか. こう見るとこの問題は,  $f$  を「変数」とする「関数」 $T$  が最小値をとる「点」を求める問題だと考えられます.

普通の関数の最小値を求める際はその関数の微分が 0 になる点を求めるというのが非常に強力な手法でした. そこで  $T$  を  $f$  で「微分」する方法をうまく考え, それを利用してこのような問題を調べるという方法が生まれました. これが変分法といわれるものです.

これは非常に強力な考え方で, 様々な問題を変分法の考え方でとらえることができ, 現代の数学においても盛んに研究されています. また変分法の考え方は現代の物理学の大きな柱のひとつでもあります.

### A.2

$\alpha < \beta$  とすると

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} dx = \pi$$

$\therefore$ )

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \theta$$

とおくと,  $x$  が  $\alpha$  から  $\beta$  まで動くとき,  $\theta$  は 0 から  $\pi$  まで動く. よって  $\sin \theta \geq 0$ . また

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \theta \\ x - \alpha &= \frac{\beta - \alpha}{2} (1 - \cos \theta) \\ \beta - x &= \frac{\beta - \alpha}{2} (1 + \cos \theta) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\frac{\beta-\alpha}{2}(1-\cos\theta) \cdot \frac{\beta-\alpha}{2}(1+\cos\theta)}} \cdot \frac{\beta-\alpha}{2} \sin\theta d\theta \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} d\theta \\
 &= \int_0^{\pi} \theta = \left[ \theta \right]_0^{\pi} = \pi
 \end{aligned}$$

□

(厳密にいうと、もとの被積分関数が  $x = \alpha$  と  $x = \beta$  で定義されていないので、これは普通の定積分ではなく広義積分とよばれるものです.)

### A.3

$a > 0$  とすると

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}} dx = \frac{\pi}{2} \sqrt{a}$$

$\therefore$ )

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a-x}{ax}} dx$$

$x = a \sin^2 t$  と置換すると

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a(1-\sin^2 t)}{a^2 \sin^2 t}} \cdot 2a \sin t \cos t dt \\
 &= 2\sqrt{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\
 &= 2\sqrt{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\
 &= \sqrt{a} \left[ t - \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{2} \sqrt{a}
 \end{aligned}$$

□

(先程と同様にこれも広義積分とよばれるものです.)

## あとがき

最後にこの小文を書くにあたって参考にした文献等を紹介しましょう.

E. ハイラー, G. ワナー, (蟹江幸博 訳) 解析教程 (上), シュプリンガー・フェアラーク東京

この本は大学生向けの微積分学の教科書なのですが, 標準的な教科書と違い歴史の流れに沿った叙述になっていて, 微積分が生まれてきた背景であるとか, それが生まれた当時の興奮といったものを感じることのできるとてもおもしろい本だと思います.

ヨハン・ベルヌーイの挑戦に対して寄せられた解答のうち, ここで解説したヨハン本人のもの, ヨハンの兄ヤコブのもの, ライプニッツのもの, およびヨハンのもうひとつの解法についての解説が

松谷吉員, 酒井健, 最速降下線の問題, 数学セミナー 1997 年 7 月号, 8 月号

にあります.

より現代的な変分方に基づいた解説は「解析力学」とか「変分法」というタイトルのついた本には載っていることが多いのですが, 日本語の文献で高校生にも読みやすそうなもの, あるいは最速降下線の存在について数学的に厳密に取り扱ったものは見つけることができませんでした.

林憲二, 等時性, 最速降下線, サイクロイド振り子, 数理科学 1995 年 9 月号

には変分法の考え方に沿った解説がありますが, 短い (5 ページ) ものなので少し分かりにくいかもしれません. 変分法について勉強してみようという人は, まず微積分を勉強したあと, 例えば

高橋陽一郎, 岩波講座 現代数学への入門 力学と微分形式, 岩波書店

などを読んでみるとよいでしょう.

以下は英語のものです.

まず文献ではなく Website なのですが

Whistler Alley Mathematics ( <http://whistleralley.com/math.htm> )

このサイトは, 見ていただくとわかると思いますが, かなり参考にしています.

次に本文中でも挙げましたが

D.C.Benson, An elementary solution of the brachistochrone problem. American Mathematical Monthly 76(1969), 890-894

最後にこれも Web で検索して見つけたものですが

H.J.Sussmann and J.C.Willems, THE BRACHISTOCHRONE PROBLEM AND MODERN CONTROL THEORY, Contemporary trends in non-linear geometric control theory and its applications (<http://www.math.rutgers.edu/~sussmann/>)

この論文の後半は専門的なものですが, 前半は最速降下線問題のよい解説になっています. この小文のうち歴史に関する叙述は大体この論文を参考にしました.