数学序論講義ノート

佃修一

2024 年 3 月 28 日

凡例

- $\mathbb{N}$: 自然数全体
  $\mathbb{Z}$: 整数全体
  $\mathbb{Q}$: 有理数全体
  $\mathbb{R}$: 実数全体
  $\mathbb{C}$: 複素数全体

- $A \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} B$ は, 左辺 A を右辺 B で定義することを意味する.

ギリシア文字

大文字	小文字	読み	英語綴
A	α	アルファ	alpha
B	β	ベータ	beta
Γ	γ	ガンマ	gamma
Δ	δ	デルタ	delta
E	ϵ, ε	イプシロン, エプシロン	epsilon
Z	ζ	ゼータ	zeta
H	η	エータ, イータ	eta
Θ	θ, ϑ	シータ, テータ	theta
I	ι	イオタ	iota
K	κ	カッパ	kappa
Λ	λ	ラムダ	lambda
M	μ	ミュー	mu
N	ν	ニュー	nu
Ξ	ξ	グザイ, クシー	xi
O	o	オミクロン	omicron
Π	π, ϖ	パイ	pi
P	ρ, ϱ	ロー	rho
Σ	σ, ς	シグマ	sigma
T	τ	タウ	tau
Υ	υ	ユプシロン, ウプシロン	upsilon
Φ	ϕ, φ	ファイ	phi
X	χ	カイ	chi
Ψ	ψ	プサイ	psi
Ω	ω	オメガ	omega

(注) 読みは日本の数学において一般的と思われるものを示したが, 他の読み方をする人もあると思う.

数学の勉強について

自分の頭でたくさん考えることが大事. 具体的には

- 数学の本 (やノート, 論文) を**読む**,
- 手を動かして (鉛筆とノートを手に) 計算する,

ということをやる.

数学の本を読む際には

- 証明を読むときは
  - なぜ？
  - 本当か?
  - 条件はどこで使っている?
  - もっと簡単に?
  - もっとすっきり?
  - 条件は必要か?
- 何か新しい概念が出てきたら
  - 例は?
  - これまで学んだこととの関係は?
- さらに
  - 似たようなことは知らないか?
  - 一般化?

といったことを考え, 考えたことをノートに書く.

目次

前期

1 何をやるか

大学に入って数学の講義を受けると, 大抵の人は, 最初はさっぱり分からない. 高校での数学と大学での数学に大きなギャップを感じることがその理由のひとつであろう（実際のところは, それほど大きなギャップがあるわけではないのだけれど）. そのギャップ, あるいは分からなさの中心となるのは, 概ね次のようなものではないかと思う.

1. 微積分の最初にやる実数論.
2. やっていることがよく分からない.
   (i) そもそも何をやっているのか分からない.
   (ii) やっていることが抽象的すぎて, つかみどころがない.
   (iii) やけに細かいことをいろいろやっているが, 何のためか分からない.
3. 使っている言葉や記号がさっぱりわからない.

この講義では主にこの 3, つまり大学の数学で使う独特の言い回し, 用語あるいは記号 (教科書 [9, p.2] では「数学語」と言っている) について解説し, 「数学語」の読み書きが出来るようになってもらうことを目標とする. (「数学語」については [6] も参考になる.) もちろん, 「数学語」で読み書きする内容は数学なので, 数学に一切ふれずに「数学語」を使うことは出来ない. この講義では集合論の初歩 (大学でやる全ての数学で使う, これもある意味, 数学における言葉といってもよいかもしれない) と微積分学の初歩, 概ね微分積分学の教科書 [3, pp.1–25] の内容に相当する部分（特に上の 1 を含む）を題材にする. 「数学語」だけでなく, この講義であつかう数学は, 大学で数学を学ぶ際の基本となる事柄である.

1 および 2 についてコメント.

1. ギャップを感じる大きな原因のひとつは, 微積分学の一番最初に実数論をやることにあるのではないかと思う. もちろん, これには以下で述べるような理由があるのであるが, この部分は当面, 適当に聞いておくというのもひとつの手かと思う. そこ

を過ぎると, 高校までやっていた内容をもう一度少し/かなり深くやりなおしているという感じになっているはずである.

なお, 上で述べたように, 微積分学の最初の方でやる内容をこの講義で1年かけてゆっくりやる. また, 2年次の幾何学序論や解析学序論でも, もう一度扱うことになるであろう.

2. (i) この大きな理由は, 高校までの数学と大学での数学ではやっていることがそもそも違う, ということにあるのではないかと思う.

   高校までは**数学の使い方**を学んでいたのに対し, 大学では**数学そのもの**を学ぶ, と考えるとよいかもしれない.

   自動車で例えてみよう. (自動車教習所に通っている人も多いでしょう.)

   高校までの数学が,

   自動車の運転の仕方や交通法規を習うようなもの

   だとすると, 大学での数学は,

   自動車の構造や, エンジンが何故動くのかといったことを学び, それをふまえたうえで, よりよい運転の方法を学ぶようなもの

   というような感じの違いがある.

   (ii) 抽象的になるのは, それが必要かつ, その方が物事が分かりやすくなるから.

   初めは抽象的でつかみどころがないように思えるものも, いろいろと例を考えたり計算したりしていると, 段々と具体的なものとしてとらえることが出来るようになる.

   (そもそも数学というのは抽象的なものである. 1とか2とかいった数にしても, これらがその辺を走り回っていたり, どこかに置いてあったりするわけではない.)

   (iii) 細かいことをやるのは, それが必要だから.

   微積分において ε-δ 論法のような議論が生まれてくる歴史的経緯について書かれた本はいろいろとあるが, [2] は読みやすく面白いと思う.

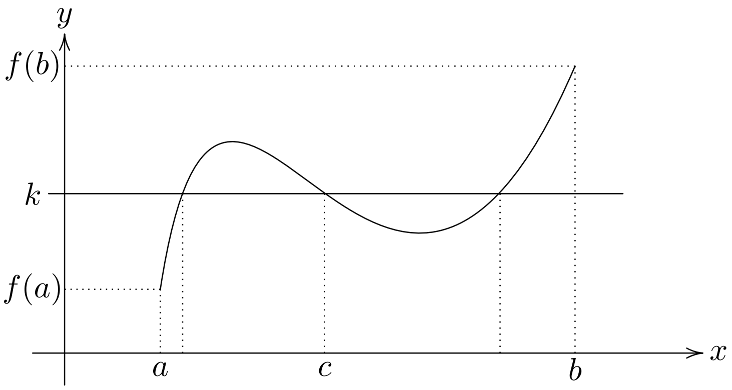
例 1.1. 1. 『$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が数列であるとき, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるならば, $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ である』という事実は高校数学では明らかな事として, これを使って極限の計算をしたりするが, 決して明らかではなく, 大学ではきちんと証明をする. 大学での数学の講義は, その多くの時間を何某かの事実の証明にあてることになる. おそらく微積の講義でこの事実の証明をすると思うが, この講義でも後期に証明を与える予定である.

2. **中間値の定理** 『関数 $y = f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続であり, $f(a) \neq f(b)$ であると

する. k を $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値とすると

$$f(c) = k, \quad a < c < b$$

となるような c が少なくとも 1 つ存在する』



これも, 高校数学では明らかな事として使うが, 決して明らかではない.
中間値の定理の証明は (これも微積の講義でやるかもしれないが) この講義では後期の最後にやる予定である.

2 特別な記号

大学の講義では次の記号をよく用いる．これらの記号は特に断らなくても以下の様に使う．

定義 2.1 ([9, p.19])**.**

$\mathbb{N}$: 自然数 (natural number) の全体．つまり, $1, 2, 3, \ldots$ の集まり．
0 を自然数に含めることもあるが, この講義では含めないものと約束する．

$\mathbb{Z}$: 整数 (Zahlen, ドイツ語) の全体．つまり, $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ の集まり．

$\mathbb{Q}$: 有理数の全体．ここで有理数とは $\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$ (分母は 0 ではない) の形で表される実数のことである．

$\mathbb{R}$: 実数 (real number) の全体.

$\mathbb{C}$: 複素数 (complex number) の全体.

有理数は英語だと rational number だが, この頭文字 r は実数の頭文字 r と同じなのでドイツ語の商 (Quotient) からとって q を使っているらしい．特に意味は無いという説もある．ちなみに整数は英語だと integer.

注意 2.2. 「定義 (definition)」とは, 記号や用語をこのように定めますという決めごとである．決めごとなので証明は必要ないし, 証明のしようもない*1.

*1 定義の妥当性 (そういう決めごとをして何か変なことがおきないか) を検証することは出来るし, 状況によっては必要である．

3 「任意の〜に対して」と「ある〜が存在して」

この講義でしばしば使うので命題, 述語というものを定義しておく.

定義 3.1. 真偽 (正しいか正しくないか) を判断できる文章を命題 (proposition) という.
命題を表すのに p, q, P, Q といった文字を使うことが多い.

例 3.2.

1. 「$1+1$ は 0 である」という文章は (偽の) 命題である[*2].
2. 「$1+1=2$」という式 (式も文章である) は (真の) 命題である.
3. 「琉球大学のキャンパスは広い」という文章は命題ではない.
   広いかどうかというのは, どういう観点でみるかとか判断する人とかによって変わる.
4. x を実数を表す変数とするとき, 「$x^2=2$」という式は命題ではない.
   この式が正しいかどうかは x の値 (x に何を代入するか) によって変わる.

この例 3.2 の 4 は命題ではないが, 変数 x に値を代入すれば真偽を判断できる, つまり命題になる.

定義 3.3. 変数を含んでいる文章で, 変数に値を代入すれば真偽が判断できる文章を述語 (predicate) という. 変数 x に関する述語を表すのに $P(x)$, $Q(x)$ といった記号を使う.

注意 3.4. 「$x^2=2$」という式において, x に「りんご」を代入した「$\text{りんご}^2=2$」という式を考えると, これは（何らかの約束事をしないかぎり）意味をなさない, 特に真偽を判定できるようなものではない. このように, 多くの場合, 述語を考える際にはあらかじめ変数に代入できるものの範囲を決めておく必要がある.

命題, 述語についてはもう少し詳しいことを後期にやるので, 当面, なんとなくこんなものという程度にとらえておいてもらえばよい.

述語は変数に値を代入すると命題となるが, 述語から命題を作る別の方法がある. 変数 x に関する述語 $P(x)$ に対し, x に値 a を代入したときに $P(a)$ が真となるような a がどれくらいの量, 個数あるかを考えてみる.

例 3.5. 実数を表す変数 x に関する述語 $P(x)=$「$x^2=2$」に対し以下の文章を考える.

1. $P(x)$ が真となるような x は 1 個である.

[*2] $1+1=0$ となるような代数系 (数のようなもの) もあるので, 本当は 1 とか $+$ とかをどこで考えているかを明示しなければ真偽の判定が出来ないけれども, ここでは整数の普通の足し算と考えて下さい.

2. $P(x)$ が真となるような x は 2 個である.
3. $P(x)$ が真となるような x はない.
4. $P(x)$ が真となるような x が（少なくとも 1 個は）ある.
5. 全ての x に対し, $P(x)$ は真である.

$P(x)$ が真となる実数 x, つまり $x^2 = 2$ となる実数 x は $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ の 2 個だから 1, 5, 3 は偽, 2, 4 は真である. 特にこれらの文章は全て命題である.

なお, これらの文章は別の（馴染みのある）言い方をすれば

1. 方程式 $x^2 = 2$ の実数解は 1 個である.
2. 方程式 $x^2 = 2$ の実数解は 2 個である.
3. 方程式 $x^2 = 2$ は実数解を持たない.
4. 方程式 $x^2 = 2$ は実数解を持つ.
5. 全ての実数は方程式 $x^2 = 2$ の解である.

ということである.

注意 3.6. x は（実数を表す）変数なので, 本来は「x に値 a を代入したときに $P(a)$ が真となるような a は 1 個である」, 「x に実数 a を代入したときに $P(a)$ が真となるような a は 1 個である」等と書くべきであるが, 煩雑になるし, かえって読みにくくなるので, 上記のように書くことが多い.

注意 3.7. 上の例において, 変数 x のとりうる範囲を変えると真偽が変わることに注意せよ. 演習 3.15 参照.

このように述語 $P(x)$ に対し, それが真となるような x がどれくらいの量あるかを指定することで命題を作ることができる. 指定する量として最も基本的であるのは「全部」と「無い」であろう. 実際に数学で使う際には「無い」よりはその否定である「(少なくとも 1 個は）ある」の方が使いよい.

用語 3.8. $P(x)$ を変数 x に関する述語とする.

1. 「全ての x に対し, $P(x)$ が真である」, つまり「変数 x に, 考えている範囲のどの値 a を代入しても, $P(a)$ は真である」という命題を

   「任意の x に対して, $P(x)$ が成り立つ」
   「任意の x に対して, $P(x)$」

   と表す.
   数学で使う「任意の」は, 普通の日本語の (「任意出頭」などで使う)「任意」とは

少し意味合いが違う. 「任意の x に対して, $P(x)$ が成り立つ」をもう少しひらたく言えば,
「全ての x に対して, $P(x)$ が成り立つ」,
「どんな x に対しても, $P(x)$ が成り立つ」,
等となる. 実際このような言い方をすることも多い.
英語では “for all x, $P(x)$” あるいは “given any x, $P(x)$” 等という.

2. 「$P(x)$ が真であるような x が少なくとも 1 個はある」という命題を

「ある x が存在して, $P(x)$ が成り立つ」
「ある x が存在して, $P(x)$」

と表す.
別の言い方として
「$P(x)$ が成り立つ x がある」,
「適当な x に対して, $P(x)$ が成り立つ」
というような言い方をすることも多い.
英語では “there exists x such that $P(x)$” あるいは “for some x, $P(x)$” 等という.

注意 3.9. 1. 「任意の」は上の 3.8.1 とは別の状況でも, しばしば証明中などで
「任意の x をとる」,
「任意に x をとる」,
「任意の x をひとつ固定する」
等といった形で使われることがある. このときの「任意の」は,
「なんでもよいので適当に x をひとつとる」
という意味で使われる.

2. 上の説明や 3.8.2 で「適当な〜」という言葉を使った. 数学ではしばしば「適当な」を使うが, 数学で使うときの「適当」には「いい加減」という意味は無く, 次の 1 に近い.

広辞苑第五版 てきとう【適当】

(i) ある状態や目的などに、ほどよくあてはまること。「—した人物」「—な広さ」

(ii) その場に合せて要領よくやること。いい加減。「—にあしらう」

数学ではあまり使わない言い方だが「適切な〜について」, 「ふさわしい〜について」あるいは「うまく〜を選べば」と言い換えると分かりやすいかもしれない.

注意 3.10. 上で述べたように「任意の〜に対して」や「ある〜が存在して」と同じ意味

の言い回しがいろいろとあるし, 慣れればどれを使っても誤解を生じることはないけれど, 慣れるまではあまりいろいろな言い方をしない方がよい. (実際に使う状況では, この標準的言い回し以外のものだと, うまく言い方を考えないと誤解が生じる場合があったりする)

次の文章を考えてみよう.

全ての学生に最適なアルバイトがある.

これは普通に読めば, 次の 2 通りに解釈出来てしまうだろう.

1. 全ての学生に (最適なアルバイトがある).
   全ての学生それぞれに, それぞれに応じた最適なアルバイトがある.
2. (全ての学生に最適) なアルバイトがある.
   少なくともひとつの何か特別なアルバイトがあって, そのアルバイトはどんな学生にも最適だ.

これを「任意の〜に対して」と「ある〜が存在して」を使って書いてみる. (下の注意 3.11 および例 3.12 を参照.)

a. 任意の学生に対して, あるアルバイトが存在して, そのアルバイトはその学生に最適だ.
   これは日本語として自然に解釈すれば「任意の学生に対して, (あるアルバイトが存在して, そのアルバイトはその学生に最適だ)」となるから, 上の 1 の意味になる.
b. あるアルバイトが存在して, 任意の学生に対して, そのアルバイトはその学生に最適だ.
   これは日本語として自然に解釈すれば「あるアルバイトが存在して, (任意の学生に対して, そのアルバイトはその学生に最適だ)」となるから, 上の 2 の意味になる.

このように, 「任意の〜に対して」と「ある〜が存在して」を使うと, 普通の日本語としては少し (というか, かなり) 違和感のある文章になってしまいはするが, 語順に注意すれば, 誤解の生じない文章を書くことが出来る.

—注意おわり—

変数がたくさんある述語についても同じようなことが出来る. 例えば, $P(x, y)$ が変数 x, y についての述語であるとき,

任意の x に対して, $P(x, y)$ が成り立つ

という文章は変数 y についての述語である. よって,

ある y が存在して, 任意の x に対して, $P(x, y)$ が成り立つ

という文章は命題である.

注意 3.11. この最後の命題は, 上で述べた作り方から

ある y が存在して, (任意の x に対して, $P(x, y)$ が成り立つ)

というつくりをしている. このように, 変数をいくつか含む述語に「任意の〜に対して」, 「ある〜が存在して」をつけて出来る命題は, 後ろの方から括弧でくくって考える. (日本語の文章として自然に解釈すればこのようになるであろう.)

このような命題の例とその真偽をみてみよう.

例 3.12 ([9, p.12–13])**.**

1. 任意の実数 x に対して, $x^2 \geq 0$ が成り立つ.
   「$x^2 \geq 0$」は全ての実数 x に対して成立する. よって, この命題は真である.
2. ある実数 x が存在して, $x^2 = 2$ が成り立つ.
   $x = \sqrt{2}$ とすれば $x^2 = 2$ である. つまり「$x^2 = 2$」が成立するような実数 x が少なくとも 1 個はある. よって, この命題は真である.
3. 任意の正の実数 x に対して, ある実数 y が存在して, $y^2 = x$ が成り立つ.
   これは括弧をつけて書けば
   「任意の正の実数 x に対して, (ある実数 y が存在して, $y^2 = x$ が成り立つ) 」
   ということ.
   括弧の中身「ある実数 y が存在して, $y^2 = x$ が成り立つ」は, 「$y^2 = x$ となるような実数 y が少なくとも 1 つある」ということである.
   x が正の実数であるならば, $y = \sqrt{x}$ とすれば, y は実数で, $y^2 = x$ となる. つまり「ある実数 y が存在して, $y^2 = x$ が成り立つ」は全ての正の実数 x に対して真.
   よってこの命題は真である.
4. ある実数 y が存在して, 任意の正の実数 x に対して, $y^2 = x$ が成り立つ.
   これも括弧をつけて書けば
   「ある実数 y が存在して, (任意の正の実数 x に対して, $y^2 = x$ が成り立つ)」
   すなわち
   「(任意の正の実数 x に対して, $y^2 = x$ が成り立つ) というような実数 y がある」
   ということ.
   括弧の中身「任意の正の実数 x に対して, $y^2 = x$ が成り立つ」は, 「x がどんな正の実数であっても $y^2 = x$ である」, 「全ての正の実数 x に対して $y^2 = x$ が成り立つ」ということ.
   もちろんそんな実数 y は無いから, この命題は偽である. 実際, そのような実数 y

があったとしよう．1 は正の実数だから $y^2 = 1$ である．また 2 も正の実数だから $y^2 = 2$ である．つまり $1 = y^2 = 2$ となるが, $1 \neq 2$ なので矛盾.

注意 3.13. $\leq, \geq$ について．$\leq$ は $\leqq$ と, $\geq$ は $\geqq$ と同じ意味である．大学では $\leq, \geq$ を使うことが多い.

警告 3.14. 例 3.12.3,4 から分かるように, 「任意の〜に対して」と「ある〜が存在して」の順序を入れ替えると全く内容の異なる命題になる.

「任意の〜に対して」と「ある〜が存在して」の順序を勝手に**交換してはいけない!**

演習 3.15. 変数 x に関する述語 $P(x) =$「$x^2 = 2$」を考える．変数 x の範囲が以下のそれぞれの場合に, 例 3.5 の 1〜5 の真偽を**理由をつけて**判定せよ.

1. x が自然数を表す変数であるとき.
2. x が正の実数を表す変数であるとき.
3. x が複素数を表す変数であるとき.

演習 3.16. 次の命題の真偽を**理由をつけて**判定せよ．ただし偶数や奇数は 0 以下のものも考えることとする.

1. 任意の偶数 x と, 任意の奇数 y に対して, $x < y$ が成り立つ.
2. ある偶数 x が存在して, 任意の奇数 y に対して, $x < y$ が成り立つ.
3. 任意の偶数 x に対して, ある奇数 y が存在して, $x \geq y$ が成り立つ.
4. ある偶数 x と, ある奇数 y が存在して, $x \geq y$ が成り立つ.

問 3.1.
1. 演習 3.16 の 1 と 2, 演習 3.16 の 3 と 4 の関係について考察せよ.
2. 演習 3.16 の 1 と 4, 演習 3.16 の 2 と 3 の関係について考察せよ.

問 3.2. 次の命題の真偽を理由をつけて判定せよ．また演習 3.16.1 と次の命題の関係について考察せよ (警告 3.14 参照).

1. ある奇数 y が存在して, 任意の偶数 x に対して, $x < y$ が成り立つ.

問 3.3. 次の命題の真偽を理由をつけて判定せよ.

1. 任意の偶数 x に対して, ある奇数 y が存在して, $x < y$ が成り立つ.
2. ある偶数 x と, ある奇数 y が存在して, $x < y$ が成り立つ.

問 3.4. 次の命題の真偽を理由をつけて判定せよ.

1. 任意の整数 x に対し, ある整数 y が存在して, 任意の自然数 z に対し, $z(x + y) = 0$

が成り立つ.

2. ある整数 x が存在して, 任意の整数 y に対し, ある自然数 z が存在して, $z(x+y)=0$ が成り立つ.

注意 3.17. 上の各問題では, 述語の変数という気分を出すため x, y, z という文字を使ったが, 普通整数を表す文字としては i, j, k, l, m あたり, 自然数を表す文字としては m, n あたりを使う. ([6] 参照.)

4 「でない」,「または」,「かつ」

命題の内容を考えず真偽だけを問題にする際に次の定義は有用である.

定義 4.1 ([9, p.3])**.**

1. 二つの命題 p, q は, その真偽が一致するとき論理同値であるといって, $p \equiv q$ と書く.
2. 同じ変数をもつ二つの述語 P, Q は, 変数にどのような値を代入しても, その真偽が一致するとき論理同値であるといって, $P \equiv Q$ と書く.

注意 4.2. 教科書 [9] では「同値」といっているが, 後で混乱することがおこるかもしれないので, この講義では「論理同値」ということにする. この用語と記号は [5] にならった.

p,q が命題であるとき,「p でない」,「p または q」,「p かつ q」といった文もまた命題となる. しかし, このようにして出来る文をそのまま日本語として読むと少し困ったことが起きることがある.

ランチにはパンまたはライスがついています

という店でランチを注文して, パンとライスの両方が出てきたら, 怒りはしなくとも, きっとびっくりするであろう. 一方, 支払いの際に

現金またはプリペイドカードがご利用になれます

とあるのだがプリペイドカードの残額が足りないので残りは現金で支払おうとしたところ,「現金かプリペイドカード, どちらか一方だけしか使えません」といわれたら, ちょっとムッとするのではなかろうか.

数学の命題を考える際にこのようなあいまいさがあると困ってしまうので,「でない」,「または」,「かつ」を使って作られる命題の意味をはっきりさせたい. しかし, 命題の内容まで踏み込んで考えると結構面倒なことになるので, 出来た命題の真偽だけを考えることにする.

命題「p でない」,「p または q」,「p かつ q」の真偽を, 命題 p, q の真偽に応じて, 以下で定義する.

注意 4.3. このように**定義する**のである. 数学の文章で「でない」,「または」,「かつ」が出てきたら, その真偽は以下の定義で定まるものである.

定義 4.4 ([9, pp.3–5])**.** 以下の表中, T, F はそれぞれ真, 偽をあらわす.

1.「p でない」

p が真のとき「p でない」は偽である.

p が偽のとき「p でない」は真である.

p	p でない
T	F
F	T

(この表を「p でない」の真理表 (truth table) という.)

2.「p または q」

p か q の少なくとも一方が真のとき「p または q」は真である.

p, q ともに偽のとき「p または q」は偽である.

p	q	p または q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(この表を「p または q」の真理表 (truth table) という.)

3.「p かつ q」

p, q ともに真のとき「p かつ q」は真である.

それ以外, すなわち,

p か q の少なくとも一方が偽のとき「p かつ q」は偽である.

p	q	p かつ q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(この表を「p かつ q」の真理表 (truth table) という.)

警告 4.5. ここで定義した「または」は, どちらか一方でも真であれば真である. 数学で使われる「または」は, ここで定義した意味の「または」であり, どちらか**一方だけ**という意味では**ない**.

注意 4.6. ここでの定義はあまり厳密なものではない. この定義では「p ではない」,「p じゃない」や「p か q」,「p あるいは q」等はどう考えるのかというのが気になってくる.

(当然「p でない」や「p または q」と同じ意味だと考えるべきではあるが.) このようなあいまいさをさけるため, こういった問題を扱う際は「でない」,「または」,「かつ」といった日本語ではなく $\neg$, $\vee$, $\wedge$ といった記号を導入する方がよい. これらの記号については後期にやるかもしれない. またこういった内容の厳密な扱いは, ある程度数学に慣れてからでないとなにをやっているのかさっぱり分からなくなってしまうので, この講義では (こういった内容については) あまり厳密にはやらない.

例 4.7. 1.「「p でない」でない」$\equiv p$

真理表を書いてみると

p	p でない	「p でない」でない
T	F	T
F	T	F

となり, 「「p でない」でない」と p の真偽は一致する.

2.「p または q」 $\equiv$ 「q または p」

真理表を書いてみると

p	q	q	p	q または p	p または q
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F

となり二つの真偽は p, q の真偽によらず一致する.

もちろん, これは真理表を書くまでもない. 「p または q」は, p, q ともに偽のときだけ偽で, あとは真. 「q または p」は, q, p ともに偽のときだけ偽で, あとは真. よって, この二つの真偽は p, q の真偽によらず一致する.

3.「p または「q かつ r」」の真理表

p	q	r	q かつ r	p または「q かつ r」
T	T	T	T	T
T	T	F	F	T
T	F	T	F	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F
F	F	F	F	F

述語についても定義 4.4 と同様なことができる．例えば, $P(x)$ が変数 x に関する, $Q(y)$ が変数 y に関する述語であれば, 変数 x に関する述語「$P(x)$ でない」および変数 x, y に関する述語「$P(x)$ または $Q(y)$」,「$P(x)$ かつ $Q(y)$」を作ることができる．

「$P(x)$ または $Q(y)$」の場合を考えてみる．「$P(x)$ または $Q(y)$」の x, y にある値 (a と b としよう) を代入した文章「$P(a)$ または $Q(b)$」は $P(a)$ という命題と $Q(b)$ という命題を「または」でつないで得られる命題だと考える．$P(x)$, $Q(y)$ は述語なので, $P(a)$, $Q(b)$ の真偽が定まり,「$P(a)$ または $Q(b)$」の真偽も定義 4.4.2 の真理表にしたがって定まる．つまり「$P(x)$ または $Q(y)$」という文章は, 変数 x, y に値を代入すれば真偽が定まるので述語である．

述語に「任意の〜に対して」と「ある〜が存在して」をつけると命題が出来るのだったから,

任意の x に対して, ある y が存在して, $P(x)$ または $Q(y)$

であるとか

任意の x に対して, $P(x)$ または $Q(x)$

といった文章は命題である．(一つ目のものはあまり意味がある命題ではないが.) これらの文章を

任意の x に対して,『「ある y が存在して, $P(x)$」または $Q(y)$』

であるとか

「任意の x に対して, $P(x)$」または $Q(x)$

といった文章と誤解してしまう可能性がある場合, この講義では必要に応じて括弧をつけて書くことにする．上記のものは, 正しくは, もちろん (読点の打ち方からわかるように)

任意の x に対して, ある y が存在して,「$P(x)$ または $Q(y)$」
任意の x に対して,「$P(x)$ または $Q(x)$」

である．

例 4.8. 任意の実数 x に対して, $x^2 > 0$ または $x \geq 0$.
x を実数とする．$x \neq 0$ のときは $x^2 > 0$ である．$x = 0$ のときは $x \geq 0$ である．いずれにしても「$x^2 > 0$ または $x \geq 0$」が成り立つ．よってこの命題は真である．

(このような命題を証明する際, $x^2 \not> 0$(つまり $x^2 \leq 0$) ならば $x = 0 \geq 0$ というのがよくやる手である．これについては次節で考える.)

演習 4.9. 次の命題の真理表を書け.

1. p または「p でない」.
2. p かつ「p でない」.
3. 「「p または q」かつ「p または r」」.

演習 4.10. 次の命題の真偽を**理由をつけて**判定せよ. ただし偶数や奇数は 0 以下のものも考えることとする. (必要なら演習 3.16 の結果を使ってよい.)

1. $1+1=2$ または $1+1=3$.
2. $1+1=2$ または $1+2=3$.
3. 「任意の偶数 x と, 任意の奇数 y に対して, $x<y$」または「ある偶数 x と, ある奇数 y が存在して, $x<y$」.
4. 「ある偶数 x が存在して, 任意の奇数 y に対して, $x<y$」かつ「任意の偶数 x に対して, ある奇数 y が存在して, $x<y$」.
5. 「任意の偶数 x に対して, ある奇数 y が存在して, $x<y$」でない.
6. 任意の偶数 x に対して, ある奇数 y が存在して, 「$x<y$ でない」.
7. 任意の偶数 x と, 任意の奇数 y に対して, 「$x<y$ または $x>y$」.

5 「ならば」

p, q が命題であるとき, 「p ならば q」という文もまた命題となる. この文は, もう少しくどくいうと, 「p が真ならば q も真」ということである. これについては, 前節の「または」以上に, 普通の日本語としてとらえると混乱を生じることがある.

命題というからには真偽が判定できるはずである. p も q も真であるときは, 「p が真ならば q も真」は真である. p が真で q が偽であるときには, 「p が真ならば q も真」は偽である. では p が偽の場合「p が真ならば q も真」という文の真偽はどう考えればよいだろうか.

父ちゃんがビル・ゲイツくらい金持ちなら, なんでも買ってやるけどなー

という父親の言葉を, その子供は信じるべきか否か…
ということを考えることになるのだが, われわれは, 命題 p, q の内容によらず, その真偽だけに依存して「p ならば q」という命題の真偽を確定したい. 日本語の「ならば」のままだと誤解が生じるかもしれないので, ここでは $\to$ という記号を使うことにする.

定義 5.1 ([9, p.5]). 命題 p, q に対し, 「$p \to q$」 (読むときには, 「p ならば q」と読む) という命題の真偽を次のように<u>**定義する**</u>.
p が真で q が偽のとき「$p \to q$」は偽である.
それ以外の場合は「$p \to q$」は真である.

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(この表を「$p \to q$」の<u>真理表 (truth table)</u> という.)

この定義から p が偽の場合「$p \to q$」は (q の真偽によらず) 真である. すなわち, 先の父親の言葉は正しいというのが数学者の見解である. (この定義を覚える, イメージする方法の一例が [9, p.5 脚注] にある. 先の父親の言葉もこの例と同じようなものである. 父親のことを信じるかどうかはともかくとして, 父親が嘘を言っているかどうかというと, 嘘は言っていないと考える.)

参考 . 実際のところ「ならば」の定義には, 他に選択肢はない.
p も q も真であるときは, $p \to q$ は真, p が真で q が偽であるときには, $p \to q$ は偽であ

るように $p \to q$ の真偽を定めるということは, 下の表の色付きの部分に T か F をいれるということであり,

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	
F	F	

$\to$ の定義として採用できそうなのは次の 4 つ $\star, \dagger, \ddagger, \bullet$ のいずれかということになる.

p	q	$p \star q$	$p \dagger q$	$p \ddagger q$	$p \bullet q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	F	F

表からすぐわかるように, $(p \ddagger q) \equiv q$, $(p \bullet q) \equiv (p$ かつ $q)$ である. $p \to q$ の真偽が q や「p かつ q」の真偽と一致するというのはかなり違和感があるであろう. 残るのは $\star$ と $\dagger$ であるが, $\dagger$ の方は p と q について対称, すなわち, $(p \dagger q) \equiv (q \dagger p)$ である. つまり $p \dagger q$ を $p \to q$ の定義として採用すると, $p \to q$ と $q \to p$ が論理同値ということになってしまう. これもちょっとまずいであろう. というわけで残る選択肢は $p \star q$ しかない.

この講義では導入しなかったが $p \dagger q$ は $p \Leftrightarrow q$ あるいは $p \leftrightarrow q$ 等と書かれ, 「同値」とよばれる ([9, p.6]).

定理 5.2 ([9, p.17])**.** 命題「$p \to q$」, 「p でない, または q」, 「q でない $\to p$ でない」は全て論理同値である.

「q でない $\to p$ でない」を, 「$p \to q$」の対偶 (contraposition) という.

証明. 真理表を書いてみると

p	q	q でない	p でない	$p \to q$	p でない, または q	q でない $\to p$ でない
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

となり p, q の真偽によらず, これら 3 つの命題の真偽は一致する.

別証) 真理表

p	q	p でない	$p \to q$	p でない，または q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

より，「$p \to q$」$\equiv$「p でない，または q」．

これを使って

$$\begin{aligned}\text{「}q\text{ でない} \to p\text{ でない」} &\equiv \text{「}(q\text{ でない) でない，または }(p\text{ でない)]}\\ &\equiv \text{「}q\text{ または }(p\text{ でない)]}\\ &\equiv \text{「}p\text{ でない，または }q]\\ &\equiv \text{「}p \to q\text{」}.\end{aligned}$$

ただし例 4.7.1, 2 を用いた． □

注意 5.3. 「定理 (theorem)」とは，真であることが証明された (数学的) 命題．
数学書や講義では，真であることが証明された命題のうち，大事なものを「定理」，定理よりは大事でないものを「命題 (proposition)」，定理や命題を証明するのに使うものを「補題 (lemma)」，定理や命題から簡単に分かるものを「系 (corollary)」ということが多い．
なお，ここでいう「命題」は定義 3.1 でいう命題とは違っていることに注意．この講義では「命題」は定義 3.1 の意味でのみ使う．

前節 (§4) と同様に，述語についても，二つの述語を「ならば」でつなぐことで新しい述語を作ることが出来る．しかし，これを日本語で読む際には，さらに注意が必要である．

例 5.4. x を，実数を表す変数とする．このとき次は，変数 x に関する述語である．

1. $x > 2 \to x > 0$.
2. $x > 0 \to x > 2$.

例 5.4.1,2 は述語なので，このままでは真偽は判定できないはずである．しかし，これらを日本語で読むと

i. $x > 2$ ならば $x > 0$.
ii. $x > 0$ ならば $x > 2$.

となり，普通の感覚だと i は真，ii は偽となり真偽が判定できる，つまり命題のようである．どういうことだろうか．

例 5.4.1,2 は変数 x に関する述語なので，x に値をいれると真偽が定まる．また，これら

に「任意の x に対して」あるいは「ある x が存在して」をつけると命題になる. x に実数 a を代入して調べてみよう. a の範囲に応じて, 命題「$a > 2 \to a > 0$」,「$a > 0 \to a > 2$」の真偽は次の様になる.

a の範囲	$a > 2$	$a > 0$	$a > 2 \to a > 0$	$a > 0 \to a > 2$
$a \leq 0$	F	F	T	T
$0 < a \leq 2$	F	T	T	F
$a > 2$	T	T	T	T

したがって

1. $x > 2 \to x > 0$.
   a がどんな実数であっても $a > 2 \to a > 0$ は真である. すなわち, 命題
   任意の実数 x に対して, $x > 2 \to x > 0$
   が真である. もちろん
   ある実数 x が存在して, $x > 2 \to x > 0$
   も真である.
   (後者のような命題, つまり, 「ある x が存在して, $P(x) \to Q(x)$」といった命題は, 文としてかなり不自然で, まず使われることはない.)
2. $x > 0 \to x > 2$.
   a によって, 真の場合も偽の場合もある. この場合, 命題
   任意の実数 x に対して, $x > 2 \to x > 0$
   は偽であり, 命題
   ある実数 x が存在して, $x > 2 \to x > 0$
   は真である.

つまり, 日本語で書かれた上記 i, ii は, (述語ではなく) それぞれ

i. 任意の実数 x に対して, $x > 2 \to x > 0$
ii. 任意の実数 x に対して, $x > 2 \to x > 0$

という命題であると解釈するのが自然である.
「ならば」に対するこういう解釈は, 数学的命題に限らず, 日本語 (他の言語もきっとそうだと思いますが) としてもごく自然なものであろう. 例えば

数理科の学生ならば, 微積なんて楽勝

という文の (真偽はともかく) 意味は,

数理科の学生なら誰だって, 微積なんて楽勝

だと考えるのが普通であろう．というわけで

警告 5.5. $P(x)$, $Q(x)$ が x に関する**述語**であるとき

$P(x)$ ならば $Q(x)$

という文は, 多くの場合 (特にこれが命題として述べられているときには) 述語ではなく,

任意の x に対して, $P(x) \to Q(x)$

という命題のことである．

日本語として自然に読めば, たいていこういう意味になるので, この文の意味を誤解することはあまりないと思うが, この文の否定を考えるときに, この警告が重要になる．

注意 5.6. 「任意の実数 x に対して, $P(x) \to Q(x)$」という命題の真偽を調べるには, 上でやったように, 変数 x に実数 a を代入して得られる命題「$P(a) \to Q(a)$」の真偽を調べるという手続きをとるのであるが, 新たな記号 a を導入すると読みにくくなったりするので, これまでにやっていたように x をそのまま使うことが多い．

また「$P(a) \to Q(a)$」は, $P(a)$ が偽のときは真なので, $P(a)$ が真のときだけ考えればよい．すなわち, $P(a)$ が真のときの $Q(a)$ の真偽を調べればよい．

(こういったことは [5], [6] などにかなり丁寧に書いてある.)

例 5.7. 任意の実数 x に対して, $x^2 > 0$ または $x \geq 0$.
例 4.8 で見たように, この命題は真である．ここでは, これが真であることを定理 5.2 を使って示してみよう．定理 5.2 より, この命題は

任意の実数 x に対して, $x^2 \not> 0 \to x \geq 0$

と論理同値であるから, これが真であることを示せばよい．

x を実数とする．$x^2 \not> 0$ とすると, $x = 0$ だから, $x \geq 0$ である．よって真．

演習 5.8. 「$((p \to q)$ かつ $p) \to q$」の真理表を書け．

演習 5.9. 次の命題の真偽を**理由をつけて**判定せよ．ただし偶数や奇数は 0 以下のものも考えることとする．

1. $1 + 1 = 2 \to 1 + 1 = 3$.
2. $1 + 1 = 3 \to 1 + 1 = 4$.
3. 任意の偶数 x と, 任意の奇数 y に対して, $x \leq y \to x < y$.
4. 任意の整数 x と, 任意の奇数 y に対して, $x \leq y \to x < y$.

6　集合

定義 6.1 ([9, p.28])**.**

1. 我々の思考の対象で条件のはっきりしたものの集まりを集合 (set) とよぶ．集合は普通 A, B, S, T などと大文字で書く．
2. S を集合とするとき，S を構成する個々のものを S の元（げん）または要素 (element) という．
   - x が S の元であることを，「x が S に属する」，「x が S に含まれる」，「S が x を含む」 等といって，$x \in S$ または $S \ni x$ と表す．
   - x が S の元でないことを，「x は S に属さない」，「x は S に含まれない」，「S は x を含まない」等といって，$x \notin S$ または $S \not\ni x$ と表す．

定義 6.2 ([9, pp.28–30])**.** A, B を集合とする．

1. A の任意の元 x に対して，$x \in B$ であるとき，A は B の部分集合 (subset) であるといって，$A \subset B$ または $B \supset A$ と表す．
   いいかえると，$A \subset B$ とは，A の元は全て B の元であるということ．
   また，このとき「A は B に含まれる」，「B は A を含む」等という．
2. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるとき，集合 A と集合 B は等しいといって，$A = B$ と書く．
   いいかえると，集合 A と集合 B とが等しいとは，A に含まれる元と B に含まれる元とがまったく同じであるということ．

警告 6.3. 定義 6.2.1 について，高校数学とは記号が違うことに注意せよ．定義より明かに $A \subset A$ **である**(A の任意の元 x に対して，$x \in A$ である)．

A が B の部分集合であり，かつ $A \neq B$ であるとき，A は B の真部分集合 (proper subset) という．高校数学での記号と，数学でよく使われる記号との対応は次の様になる．

	A は B の部分集合	A は B の真部分集合
高校数学	$A \subseteqq B$	$A \subset B$
数学	$A \subset B$	$A \subsetneq B$

注意 6.4. 定義 6.1.2, 定義 6.2.1 において「含む」，「含まれる」という言葉を使ったが，$\in, \ni$ と $\subset, \supset$ は異なる概念であるから，混同のおそれのあるときには 「含む」，「含まれる」は使わない方がよい．

定義 6.5 (集合の表し方. [9, pp.28–29]).

1. 外延的(がいえんてき)(extensional) 記法
   集合の元を全て列挙し, それを括弧 $\{\}$ でくくる.
   例. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
   元が無限個ある場合, あるいは有限個でも全てを列挙出来ない場合, 誤解を生じるおそれが無ければ $\ldots$ を使う.
   例. $\{1, 2, 3, \ldots, 10000\}$ (10000 以下の自然数全体のなす集合)
2. 内延的(ないえんてき)(intensional) 記法
   何某かの条件をみたすもの全体として集合を表す方法. $P(x)$ を変数 x に関する述語とする. $P(x)$ が真となるような全ての x からなる集合を $\{x \mid P(x)\}$ と表す.
   変数 x のとる値がある集合 U に制限されているとき, $P(x)$ が真となるような全ての x (ただし $x \in U$) からなる集合を $\{x \in U \mid P(x)\}$ と表す.
   例. $\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10000\}$ (10000 以下の自然数全体のなす集合)

例 6.6 ([9, p.31 (3)]). 定義 2.1 は次の様に表現される.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \left\{n \;\middle|\; n \text{ は自然数}\right\}$$
$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = \left\{n \;\middle|\; n \text{ は整数}\right\}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{r \;\middle|\; r \text{ は有理数}\right\} = \left\{\frac{m}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z} \text{ かつ } n \neq 0\right\}$$

例 6.7. 集合として以下はそれぞれ等しい.

1. $\{1, 2, 3\} = \{2, 3, 1\} = \{3, 1, 2\} = \{1, 3, 2\} = \{3, 2, 1\} = \{2, 1, 3\}$
2. $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$
3. $\{1, 2, 3, \ldots, 10000\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10000\}$
4. $\left\{x \;\middle|\; \text{ある } i \in \mathbb{N} \text{ が存在して, } x = (-1)^i \text{ となる}\right\} = \{1, -1\}$
5. $\left\{x \in \mathbb{C} \;\middle|\; x^2 = -1\right\} = \{\pm\sqrt{-1}\}$

注意 6.8.
1. 外延的記法において, 例 6.7.2 の左辺のように, 同じ元を二度以上書いても, それは, その元がこの集合の元だということをいっているだけなので, 一度だけ書いたのと同じことである. 話がややこしくなるだけなので, 普通このような書き方はしない.
2. 例 6.7.4 の左辺を, 普通 $\left\{(-1)^i \;\middle|\; i \in \mathbb{N}\right\}$ と書く. 今後とくにことわりなくこのような記法も使う.

例 6.7.5 において $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ に変えたもの $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = -1\right\}$ を考える. $x^2 = -1$ となるような実数はないので, この “集合” には元がひとつもない. このようなものも集合と考え

ると都合がよい.

定義 6.9 (空集合 [9, p.31])**.** 構成するものが一つもないものも集合と考える. この集合を空集合 (empty set) といい, $\emptyset$ と表す.

また, 任意の集合 S に対し, $\emptyset \subset S$ と考える. (部分集合の定義 (6.2.1) から $\emptyset \subset S$ となるのだが, これについては後期の系 12.9 を参照のこと. 当面, このように約束すると考えてよい.)

演習 6.10. 以下に挙げる集合のうち, どれとどれが等しいか, どれがどれの部分集合かを調べよ.

$S_1 = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$
$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$
$S_3 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$
$S_4 = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 1\}$
$S_5 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = 1\right\}$
$S_6 = \left\{x \in \mathbb{N} \;\middle|\; x^2 = 1\right\}$
$S_7 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = \frac{1}{2} \text{ かつ } x > 0\right\}$
$S_8 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 = \frac{1}{4} \text{ かつ } x > 0\right\}$
$S_9 = \left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 = \frac{1}{2} \text{ かつ } x > 0\right\}$
$S_{10} = \left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 = \frac{1}{4} \text{ かつ } x > 0\right\}$
$S_{11} = \{1\}$
$S_{12} = \emptyset$
$S_{13} = \left\{(-1)^i \;\middle|\; i \in \mathbb{N}\right\}$

演習 6.11. 以下に挙げる集合を外延的記法で表せ.

1. $\left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \text{ かつ } n \leq 10\right\}$
2. $\left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; 0 < x < 100 \text{ かつ } \sqrt{x} \in \mathbb{N}\right\}$
3. $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 \in \mathbb{Z} \text{ かつ } |x| \leq 3\right\}$

7　共通部分と和集合

定義 7.1 ([9, pp.32–33])**.** S, T を集合とする.

1. 集合 $S \cap T$ を
$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ かつ } x \in T\}$$
と定義し, S と T の共通部分 (intersection) または交わりとよぶ.
2. 集合 $S \cup T$ を
$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ または } x \in T\}$$
と定義し, S と T の和集合 (union) または結びとよぶ.

補題 7.2. A, B, A_1, A_2, B_1, B_2 を集合とする. このとき次が成り立つ.

1. $A \cap B \subset A$.
2. $A \subset A \cup B$.
3. $A \subset B_1$ かつ $A \subset B_2$ ならば, $A \subset B_1 \cap B_2$.
4. $A_1 \subset B$ かつ $A_2 \subset B$ ならば, $A_1 \cup A_2 \subset B$.

証明. いずれも定義から明らかだが, 4 を少し丁寧に証明してみる.
$A_1 \subset B$ かつ $A_2 \subset B$ であると仮定する.
$x \in A_1 \cup A_2$ とする. 定義より, $x \in A_1$ または $x \in A_2$ である.

(i) $x \in A_1$ のとき.
仮定より $A_1 \subset B$ なので, $x \in B$ である.

(ii) $x \in A_2$ のとき.
仮定より $A_2 \subset B$ なので, $x \in B$ である.

いずれの場合も $x \in B$ となる. よって $A_1 \cup A_2 \subset B$ である. □

系 7.3.
1. $A \subset B$ ならば,
   (i) $A \cap B = A$.
   (ii) $A \cup B = B$.
2. $A_i \subset B_i$ $(i = 1, 2)$ ならば,
   (i) $A_1 \cap A_2 \subset B_1 \cap B_2$.
   (ii) $A_1 \cup A_2 \subset B_1 \cup B_2$.

証明. 定義からほとんど明らかであるが, 補題 7.2 を使って証明しよう.

1. (i) 補題 7.2.1 より, $A \cap B \subset A$ である.
   一方, 定義より $A \subset A$ であり, また仮定より $A \subset B$ だから, 補題 7.2.3 より, $A \subset A \cap B$ である.
   よって, (集合が等しいことの定義 6.2.2 より) $A \cap B = A$.
2. (i) 補題 7.2.1 より, $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ であり, 仮定より $A_1 \subset B_1$ であるから, $A_1 \cap A_2 \subset B_1$ である. 同様にして $A_1 \cap A_2 \subset B_2$ であることもわかる. したがって, 補題 7.2.3 より, $A_1 \cap A_2 \subset B_1 \cap B_2$.

□

これ以降, これらの事実はとくに断り無く使う.

警告 7.4. ある集合が別の集合の部分集合になっていることを示す際, ベン図 (Venn diagram) は, 証明を考えるための補助手段としてしばしば有効ではあるが, ベン図を書くことでは**証明にはならない**.

- ベン図をうまく書くことが出来ない集合もある.
  - $A = \{1, 2\}, B = \{\{1, 2\}, 1\}, C = \{1, 2, 3\}$ の様子を表すベン図を考えてみよ.
  - 空集合はどう表せばよい?
- そもそも, ベン図を正確に書くためには, 考えている集合の包含関係を正確に把握する必要がある. 例えば, $A = \mathbb{Q}$, $B = \left\{ r + s\sqrt{2} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{Q} \right\}$, $C = \left\{ r + s\sqrt{3} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{Q} \right\}$ の様子を表すベン図を書いてみよ.

定理 7.5. 次の公式が成立する.

1. (交換法則)
$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$
2. (結合法則)
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
3. (分配法則)
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

証明. 1, 2 は, 左辺 $\subset$ 右辺および右辺 $\subset$ 左辺を示すことにより証明することも出来るが, いずれも定義より明らかである．例えば 2 のひとつめの等式は, 両辺とも

$$\{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \text{ かつ } x \in C\}$$

である. (厳密には「$(p$ かつ $q)$ かつ r」$\equiv$「p かつ $(q$ かつ $r)$」であることを使っている.)

分配法則を示そう.

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  (a) $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ であること.
  $x \in A \cap (B \cup C)$ とする. 定義より, $x \in A$ かつ「$x \in B$ または $x \in C$」である.
  (i) $x \in B$ のとき.
  $x \in A$ かつ $x \in B$ であるから, $x \in A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  (ii) $x \in C$ のとき.
  $x \in A$ かつ $x \in C$ であるから, $x \in A \cap C \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  いずれの場合も $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ となる. よって $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ である.
  (b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ であること.
  $B \subset B \cup C$ であるから, $A \cap B \subset A \cap (B \cup C)$.
  同様に, $C \subset B \cup C$ であるから, $A \cap C \subset A \cap (B \cup C)$.
  よって $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  今示したことを使うと,

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A \cup C) &= \big((A \cup B) \cap A\big) \cup \big((A \cup B) \cap C\big) \\ &= A \cup \big((A \cup B) \cap C\big) \\ &= A \cup \big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) \\ &= \big(A \cup (A \cap C)\big) \cup (B \cap C) \\ &= A \cup (B \cap C).\end{aligned}$$

- ふたつめの等式を, ひとつめの等式を使わず直接示すことも, もちろん可能である.
  (a) $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ であること.
  $B \cap C \subset B$ であるから, $A \cup (B \cap C) \subset A \cup B$.
  同様に, $B \cap C \subset C$ であるから, $A \cup (B \cap C) \subset A \cup C$.
  したがって, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
  (b) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$ であること.
  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする. 定義より, $x \in A \cup B$ かつ $x \in A \cup C$ である.

(i) $x \in A$ のとき.

$x \in A \subset A \cup (B \cap C)$.

(ii) $x \notin A$ のとき.

$x \in A \cup B$, すなわち $x \in A$ または $x \in B$ であるが, $x \notin A$ なので, $x \in B$. また, $x \in A \cup C$, すなわち $x \in A$ または $x \in C$ であるが, $x \notin A$ なので, $x \in C$.

よって, $x \in B$ かつ $x \in C$ となり, $x \in B \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.

いずれの場合も, $x \in A \cup (B \cap C)$ となる. よって $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

- ふたつめの等式を, §4 の結果を使って示す.
  例 4.7.3 と, 演習 4.9 により, 「p または (q かつ r)」と「(p または q) かつ (p または r)」は論理同値である. したがって,

$$\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B \cap C\} \\
&= \{x \mid x \in A \text{ または } (x \in B \text{ かつ } x \in C)\} \\
&= \{x \mid (x \in A \text{ または } x \in B) \text{ かつ } (x \in A \text{ または } x \in C)\} \\
&= \{x \mid x \in A \cup B \text{ かつ } x \in A \cup C\} \\
&= (A \cup B) \cap (A \cup B).
\end{aligned}$$

□

注意 7.6. 分配法則のふたつめの等式のふたつめの証明の後半 (b) の場合分けについて.

1. $x \in A$ のときと, $x \notin A$ のときとに場合分けをした. これは次のような考え方によるものである.
   ここで示したかったのは $x \in A \cup (B \cap C))$, つまり, 「$x \in A$ または $x \in B \cap C$」ということである. これは, $x \in A$ のときには当然成り立っている. 問題は $x \notin A$ のときはどうかということである.
   「$x \in A$ または $x \in B \cap C$」を (論理同値な) 「$x \notin A \to x \in B \cap C$」に置き換えると分かりやすいかもしれない.
2. $x \in A \cup B$ に注目して, $x \in A$ のときと, $x \in B$ のときとに場合分けをするという方法もあるが, これはミスをしやすいので注意が必要である. $x \in A$ の場合は上と同様だが, $x \in B$ の場合に, $x \in A \cup C$ という条件から $x \in C$ は結論出来ない. こ

こでもう一度, $x \in A$ と $x \in C$ とに場合分けをする必要がある.

$$\begin{cases} x \in A \\ \\ x \in B & \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \end{cases}$$

注意 7.7. 分配法則のひとつめの等式も, 真理表を使って示すことが出来る. この場合,「p かつ (q または r)」と「(p かつ q) または (p かつ r)」が論理同値であることを確かめることになる.

演習 7.8.

1. 補題 7.2.3 を示せ.
2. 系 7.3.2.(i) を, 補題 7.2 を**使わず**示せ.
3. 系 7.3.2.(ii) を, 補題 7.2 を**使って**示せ.
4. 定理 7.5 の分配法則ひとつめの等式を, ふたつめの等式を用いて示せ.

8 補集合

定義 8.1 ([9, p.34])**.** 1. 考えている集合が全て, あるひとつの固定された集合 X の部分集合である場合, X をその考察における普遍集合 (universal set) あるいは全体集合という.

2. $S \subset X$ のとき, 集合 S^c を

$$S^c = \{x \in X \mid x \notin S\}$$

と定義し, S の補集合 (complementary set) という.

定理 8.2 ([9, p.35])**.** X を普遍集合とし, $S, T \subset X$ とする. このとき次が成立する.

1. $S \cap S^c = \emptyset$, $S \cup S^c = X$.
2. $(S^c)^c = S$.
3. $\emptyset^c = X$, $X^c = \emptyset$.
4. $S \subset T \Leftrightarrow S^c \supset T^c$.
   とくに $S = T \Leftrightarrow S^c = T^c$.
5. $S \cap T = \emptyset \Leftrightarrow S \subset T^c \Leftrightarrow S^c \supset T$.
6. (de Morgan (ド・モルガン) の法則)

$$(S \cap T)^c = S^c \cup T^c$$
$$(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$$

注意 8.3. 記号 $\Leftrightarrow$ は, 左辺と右辺が同値であることを表す. すなわち, 左辺が成り立てば右辺も成り立ち, 右辺が成り立てば左辺も成り立つ, ということ.

証明. 1〜4 は定義に戻って確かめればわかる.

5. (i) $S \cap T = \emptyset$ とする. このとき

$$\begin{aligned} S &= S \cap X \\ &= S \cap (T \cup T^c) \\ &= (S \cap T) \cup (S \cap T^c) \\ &= \emptyset \cup (S \cap T^c) \\ &= S \cap T^c \subset T^c. \end{aligned}$$

   (ii) $S \subset T^c$ とする. このとき $S \cap T \subset T^c \cap T = \emptyset$ ゆえ $S \cap T = \emptyset$.

6. • $(S \cap T)^c = S^c \cup T^c$

(i) $(S \cap T)^c \subset S^c \cup T^c$ であること．
$((S \cap T)^c \cap S) \cap T = (S \cap T)^c \cap (S \cap T) = \emptyset$ ゆえ $(S \cap T)^c \cap S \subset T^c$．
したがって

$$\begin{aligned}(S \cap T)^c &= (S \cap T)^c \cap X \\ &= (S \cap T)^c \cap (S^c \cup S) \\ &= ((S \cap T)^c \cap S^c) \cup ((S \cap T)^c \cap S) \\ &\subset S^c \cup T^c.\end{aligned}$$

(もう少しひらたくやると,
$x \in (S \cap T)^c$, すなわち $x \notin S \cap T$ とする．
示したいことは $x \in S^c \cup T^c$, すなわち, $x \in S^c$ または $x \in T^c$ であるということである．
$x \in S^c$ の場合はよい[*3]．
$x \notin S^c$ の場合を考える．このとき $x \in S$ である[*4]．もし $x \in T$ だとすると, $x \in S \cap T$ となってしまい仮定に反する．よって $x \notin T$, すなわち $x \in T^c$ である[*5].)

(ii) $S^c \cup T^c \subset (S \cap T)^c$ であること．
$S \supset S \cap T$ ゆえ $S^c \subset (S \cap T)^c$．同様に, $T \supset S \cap T$ ゆえ $T^c \subset (S \cap T)^c$．
よって $S^c \cup T^c \subset (S \cap T)^c$．

- 別の (より直接的) 方法
真理表, あるいは意味を考えれば,「(p かつ q) でない」と「(p でない) または (q でない)」は論理同値である．よって

$$\begin{aligned}(S \cap T)^c &= \{x \in X \mid x \notin S \cap T\} \\ &= \big\{x \in X \bigm| x \in S \cap T \text{ でない}\big\} \\ &= \big\{x \in X \bigm| (x \in S \text{ かつ } x \in T) \text{ でない}\big\} \\ &= \big\{x \in X \bigm| (x \in S \text{ でない}) \text{ または } (x \in T \text{ でない})\big\} \\ &= \big\{x \in X \bigm| x \notin S \text{ または } x \notin T\big\} \\ &= \big\{x \in X \bigm| x \in S^c \text{ または } x \in T^c\big\} \\ &= S^c \cup T^c.\end{aligned}$$

- $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$
ひとつめの等式と同様に示してもよいが, ひとつめの等式を使えば $(S^c \cap T^c)^c = (S^c)^c \cup (T^c)^c = S \cup T$．よって $(S \cup T)^c = S^c \cap T^c$．

---

*3 これが上の $(S \cap T)^c \cap S^c \subset S^c$ に対応している．
*4 つまり $x \in (S \cap T)^c \cap S$.
*5 つまり $(S \cap T)^c \cap S \subset T^c$.

$\square$

定義 8.4 ([9, p.34])**.** A, B を集合とする．集合 $A - B$ を

$$A - B = \left\{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B \right\}$$

と定義し A と B の差集合 (set difference) という．差集合を $A \setminus B$ と書くことも多い．

(${A \supset B}$ とは仮定していないことに注意せよ.)

補題 8.5. X を普遍集合とし, $S, T \subset X$ とする．このとき $S - T = S \cap T^c$ である．とくに, $S^c = X - S$ である．

証明．定義よりあきらか． $\square$

演習 8.6. X を普遍集合とし, $A, B, C \subset X$ とする．このとき次を示せ．

1. $A \subset B \cup C \Leftrightarrow A \cap B^c \subset C$.
2. $A \cup B = X \Leftrightarrow A^c \subset B \Leftrightarrow A \supset B^c$.

9　写像

定義 9.1 ([9, p.36]). 1. X, Y を空でない集合とする．X の各元 $x \in X$ それぞれに対して Y の元をただひとつ対応させる規則を X から Y への写像 (map) という．規則 f が X から Y への写像であるとき，

$$f\colon X \to Y$$

と表す．$X \xrightarrow{f} Y$ という記法を使う場合もある．

2. $f\colon X \to Y$ を写像とする．f により，$x \in X$ が $y \in Y$ に対応しているとき，f は x を y に写すといい，$f\colon x \mapsto y$ と表す．また，f が x を y に写すとき，y を $f(x)$ と書く．
3. $f, g\colon X \to Y$ を写像とする．任意の $x \in X$ に対し，$f(x) = g(x)$ であるとき，f と g は等しいといって，$f = g$ と書く．

警告 9.2. 1. $\to$ と $\mapsto$ を**混同しない**こと．

2. 写像は「関数」とは呼ばない．$Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ などの場合のみ関数と呼ぶこともあるが，この講義では (少なくとも前期の間は) 写像と呼ぶこと．
3. 微積分等では関数を $f(x)$ と書くが，それ以外では f というふうに (x) をつけずに書く．$f(x)$ というのは f により x に対応する Y **の元**である．よって $f(x)\colon X \to Y$ とは**書かない**．

参考 . Y を集合とする．空集合から Y への写像はただひとつ存在する (と考える)．とくに，空集合から空集合へは写像が (ただひとつ) 存在する．($X \neq \emptyset$ であるとき，X から空集合への写像は存在しない.)

例 9.3. $S = \{0, 1, 2\}$, $T = \{0, 1\}$ とする．

1. $$\begin{aligned} f\colon S &\longrightarrow T \\ 0 &\longmapsto 0 \\ 1 &\longmapsto 1 \\ 2 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$
2. $$\begin{aligned} g\colon T &\longrightarrow S \\ 0 &\longmapsto 0 \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

3. $h\colon T \longrightarrow T$
$$\begin{aligned} 0 &\longmapsto 0 \\ 1 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

4. $h'\colon T \to T$ を $h'(x) = x^2$ で定める.

$$h'(0) = 0^2 = 0 = h(0)$$
$$h'(1) = 1^2 = 1 = h(1)$$

だから $h = h'$.

定義 9.4 ([9, p.37]). X を集合, $S \subset X$ を部分集合とする.

1. 写像 $f\colon X \to X$ が恒等写像 (identity map) であるとは, 任意の $x \in X$ に対して, $f(x) = x$ が成り立つこと. X の恒等写像を id_X または id で表す.
2. 写像 $f\colon S \to X$ が包含写像 (inclusion map) であるとは, 任意の $s \in S$ に対して, $f(s) = s$ (右辺は s を X の元とみている) が成り立つこと. (普通, $S = X$ のときは包含写像とは呼ばない.)

例 9.5. 例 9.3 の $g\colon T \to S$ は包含写像であり, $h\colon T \to T$ は T の恒等写像である.

定義 9.6 ([9, p.37]). X, Y, Z を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする. このとき, $x \in X$ に対して, $g(f(x)) \in Z$ を対応させる写像を f と g の合成写像 (composite map) といって, $g \circ f$ で表す. すなわち $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ である.

$$\begin{aligned} g \circ f\colon X &\longrightarrow Z \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

合成写像を
$$g \circ f\colon X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$
と図示することもある.

演習 9.7. $S = \{0, 1, 2\}$, $T = \{0, 1\}$ とし, 写像 f, g, h は, 例 9.3 のものとする.

1. $g \circ f$, $f \circ g$ はそれぞれどのような写像か?
2. S から T への写像を全て挙げよ.

問 9.1. $f\colon X \to Y$ を写像とする. このとき $f \circ \mathrm{id}_X = f$, $\mathrm{id}_Y \circ f = f$ が成り立つ.

10 単射, 全射, 全単射

定義 10.1 ([9, p.36])**.** 写像 $f\colon X \to Y$ が単射 (injection, injective map) である.
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して, $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$.
対偶をとれば, 写像 $f\colon X \to Y$ が単射であることと,
「任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して, $f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$」
とは同値であることが分かる. こちらの方が使いやすいことが多い.

注意 10.2. $A \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B$ は, 左辺 A を右辺 B で定義することを意味する.

注意 10.3. 単射を次のように誤解する人がいる.
「任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して, $x_1 = x_2 \to f(x_1) = f(x_2)$.」
しかし, これは f が写像であれば必ず成り立つことであり, 何の制約にもなっていないことに注意せよ.

例 10.4.
1. 恒等写像は単射である.
2. 包含写像は単射である.

例 10.5.
1. $f(x) = x^2$ で与えられる写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単射でない.
   理由：$f(1) = f(-1)$ だから.

2. $g(x) = x^2$ で与えられる写像 $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ は単射である. ただし $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

   理由：$x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ とする. $g(x_1) = g(x_2)$ とすると, $0 = g(x_1) - g(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ ゆえ $x_1 - x_2 = 0$ または $x_1 + x_2 = 0$. 今, $x_1, x_2 \geq 0$ なので, $x_1 + x_2 = 0$ となるのは $x_1 = x_2 = 0$ のときのみ. よって (いずれの場合も) $x_1 = x_2$.
3. $$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 \end{aligned}$$
   単射である.
   理由： $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ とする. $x_1 \neq x_2$ ならば, $x_1 < x_2$ または $x_1 > x_2$ である. h は単調増加であるので, このとき $h(x_1) < h(x_2)$ または $h(x_1) > h(x_2)$ であり, とくに $h(x_1) \neq h(x_2)$ である.
   あるいは

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ とする．$h(x_1) = h(x_2)$ とすると $0 = h(x_1) - h(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$ だから $x_1 = x_2$[*6]．

例 10.6.

1. 例 9.3 の f は単射でない．
   理由：$f(1) = f(2)$ だから．
2. 例 9.3 の g は単射である．
   理由：$g(0) \neq g(1)$ だから．
3. 例 9.3 の h は単射である．
   理由：$h(0) \neq h(1)$ だから．

定義 10.7 ([9, p.36])**.** 写像 $f\colon X \to Y$ が全射 (surjection, surjective map) である．

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $y \in Y$ に対して，ある $x \in X$ が存在して，$y = f(x)$.

例 10.8.

1. 恒等写像は全射である．
2. 真部分集合の包含写像は全射でない．

例 10.9.

1. $f(x) = x^2$ で与えられる写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は全射でない．
   理由：任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$f(x) = x^2 \geq 0$ であることに注意する．$-1 < 0$ だから，$f(x) = -1$ となるような $x \in \mathbb{R}$ は存在しない．
2. $f(x) = x^2$ で与えられる写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は全射である．ただし $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.
   理由：任意の $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し，$x = \sqrt{y}$ とおくと，$x \in \mathbb{R}$ であり，$f(x) = x^2 = y$.

例 10.10. $S = \{0, 1, 2, 3\}$ とする．次の写像 f は単射か，全射か．

$$
\begin{aligned}
f\colon S &\longrightarrow S \\
0 &\longmapsto 0 \\
1 &\longmapsto 0 \\
2 &\longmapsto 2 \\
3 &\longmapsto 3
\end{aligned}
$$

単射でない．

理由：$f(0) = f(1)$ だから．

全射でない．

理由：$f(x) = 1$ となるような $x \in S$ が存在しないから．

定理 10.11 ([9, p.39] 参照)**.** X, Y, Z を集合，$f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする．このとき次が成立する．

[*6] $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$ となるのは $x_1 = x_2 = 0$ のときだけである．

1. $g \circ f$ が単射ならば f も単射である.
2. $g \circ f$ が全射ならば g も全射である.

証明. 1. $x_1, x_2 \in X$ とする. $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ であることを示そう.
$f(x_1) = f(x_2)$ とする. このとき

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2)$$

である. 仮定より, $g \circ f$ は単射なので $x_1 = x_2$.

2. $z \in Z$ とする. ある $y \in Y$ が存在して $z = g(y)$ となることを示そう.
仮定より, $g \circ f$ は全射なので, ある $x \in X$ が存在して, $(g \circ f)(x) = z$ となる.
$y = f(x) \in Y$ とおくと,

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z.$$

$\square$

定義 10.12. 写像 $f\colon X \to Y$ が全単射 (bijection, bijective map) である.
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ f は全射かつ単射である.

定理 10.13 ([9, p.37])**.** $f\colon X \to Y$ を全単射とする. このとき次が成り立つ.

1. 任意の $y \in Y$ に対し, $y = f(x)$ となる $x \in X$ がただひとつ存在する.
2. 各 $y \in Y$ に対し, $y = f(x)$ となるような $x \in X$ を対応させることで写像 $Y \to X$ が定まる. この写像を f^{-1} と書く. 定め方より

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y$$

が成り立つ. この写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ について次が成り立つ.

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y.$$

定義 10.14. $f\colon X \to Y$ を全単射とする. このとき, 定理 10.13.2 の写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ を f の逆写像 (inverse map) という.

定理 10.13 の証明. 1. $y \in Y$ とする.
f は全射であるから, $y = f(x)$ となる $x \in X$ が存在する.
$x' \in X$ が $f(x') = y$ をみたせば, $f(x') = y = f(x)$ となり, f は単射なので, $x' = x$ である. よってこのような x はただひとつ.

2. (i) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$.
   $x \in X$ とする. $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$ を示せばよい. $y = f(x)$ とおくと, f^{-1} の定め方より, $f^{-1}(y) = x$. よって
   $$x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = (f^{-1} \circ f)(x).$$
   (これは明らかといえば, まあ明らかである.
   実際, $f^{-1}(f(x))$ をどう定めたかというと, f で $f(x)$ に写る (ただひとつの) 元と決めたのだった. x を f で写すと $f(x)$ となるので $f^{-1}(f(x)) = x$.)

   (ii) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$.
   $y \in Y$ とする. $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$, すなわち $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ を示せばよいが, これは明らか. (f で写すと y になる (ただひとつの) 元を $f^{-1}(y)$ と定めたのだった.)
   少し形式的にやれば, $x = f^{-1}(y)$ とおくと, $f(x) = y$. よって
   $$y = f(x) = f\left(f^{-1}(y)\right) = (f \circ f^{-1})(y).$$

□

系 10.15. $f\colon X \to Y$ を写像とする. このとき次は同値.

1. f は全単射.
2. ある写像 $g\colon Y \to X$ が存在して, $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ をみたす.

さらに, このとき $g = f^{-1}$ である.

証明. $1 \Rightarrow 2$. 定理 10.13 より, $g = f^{-1}$ とすればよい.

$2 \Rightarrow 1$. $g \circ f = \mathrm{id}_X$ で, id_X は単射なので, 定理 10.11 より, f は単射. また, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ で, id_Y は全射なので, 定理 10.11 より, f は全射.

写像 $g\colon Y \to X$ が $g \circ f = \mathrm{id}_X$ をみたすとする.

$$g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{id}_X \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

□

また f^{-1} にこの系（の $2 \Rightarrow 1$) を適用すると,

系 10.16. f が全単射ならば f^{-1} も全単射である.

例 10.17. 写像 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ を,

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ が偶数} \\ \dfrac{-n+1}{2}, & n \text{ が奇数} \end{cases}$$

$$g(l) = \begin{cases} 2l, & l > 0 \\ -2l+1, & l \leq 0 \end{cases}$$

により定める ($f(n) \in \mathbb{Z}$, $g(l) \in \mathbb{N}$ となっていることに注意せよ) と, $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ であるから, f, g ともに全単射であり, $g = f^{-1}$ である.

演習 10.18. 1. 恒等写像は単射であることを示せ.

2. 恒等写像は全射であることを示せ.
3. 真部分集合の包含写像は全射ではないことを示せ.

(系 10.15 を使ってはいけない. 循環論法になってしまう.)

演習 10.19. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$ とする.

1. A から B への写像は全部でいくつあるか?
2. A から B への写像で全射でないものはいくつあるか?
3. A から B への全射はいくつあるか?
4. A から B への単射はあるか?
5. B から A への写像は全部でいくつあるか?
6. B から A への単射はいくつあるか?
7. B から A への全射はあるか?

演習 10.20. X, Y, Z を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする. このとき次は正しいか. 正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.

1. $g \circ f$ が単射ならば g も単射である.
2. $g \circ f$ が全射ならば f も全射である.

演習 10.21. $f\colon X \to Y$ を単射, S を集合とする. このとき, 写像 $g_1, g_2\colon S \to X$ が $f \circ g_1 = f \circ g_2$ をみたせば, $g_1 = g_2$ であることを示せ.

演習 10.22. $f\colon X \to Y$ を全射, T を集合とする. このとき, 写像 $h_1, h_2\colon Y \to T$ が $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ をみたせば, $h_1 = h_2$ であることを示せ.

演習 10.23. $f\colon X \to Y$, $g, h\colon Y \to X$ を写像とする. $g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ が成り立てば, f は全単射であり, $g = h = f^{-1}$ であることを示せ.

演習 10.24. X, Y, Z を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする．このとき次を示せ．

1. f, g がどちらも単射ならば $g \circ f$ も単射である．
2. f, g がどちらも全射ならば $g \circ f$ も全射である．
3. f, g がどちらも全単射ならば $g \circ f$ も全単射である．

演習 10.25. $m, n \in \mathbb{N}$ とし, $A = \{1, 2, \ldots, m\}$, $B = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする．

1. A から B への写像は全部でいくつあるか?
2. $m \leq n$ であるとき, A から B への単射はいくつあるか?
3. $n = 2$ かつ $m \geq n$ であるとき, A から B への全射はいくつあるか?

実は上の演習 10.21, 10.22 について, 逆も成り立つ．興味のある人は次の問題を考えてみよ．

問 10.1. $f\colon X \to Y$ を写像とする．「任意の集合 S と, 任意の写像 $g_1, g_2\colon S \to X$ に対し, $f \circ g_1 = f \circ g_2 \to g_1 = g_2$」が成り立てば, f は単射である．

問 10.2. $f\colon X \to Y$ を写像とする．「任意の集合 T と, 任意の写像 $h_1, h_2\colon Y \to T$ に対し, $h_1 \circ f = h_2 \circ f \to h_1 = h_2$」が成り立てば, f は全射である．

11　像, 逆像

定義 11.1 ([9, p.36]). $f\colon X \to Y$ を写像, $A \subset X$ を部分集合とする. このとき, Y の部分集合 $f(A)$ を

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(a) \mid a \in A\} \\ &= \bigl\{y \in Y \bigm| \text{ある } a \in A \text{ が存在して}, y = f(a)\bigr\} \subset Y \end{aligned}$$

により定義し, f による A の像 (image) という.

定義 11.2. $f\colon X \to Y$ を写像, $B \subset Y$ を部分集合とする. このとき, X の部分集合 $f^{-1}(B)$ を

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$$

により定義し, f による B の逆像 (inverse image) という.

（定義より $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$ である. つまり, $f^{-1}(B)$ は, f で写すと B に入るような X の元全体.）

注意 11.3. $f(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ である.

警告 11.4. 定義 10.14 の逆写像と, 定義 11.2 の逆像の違いを理解すること.

$f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. f の逆写像は, f が全単射のときにはじめて定義できる**写像** $f^{-1}\colon Y \to X$ のことである.
2. 逆像は, f が全単射でなくとも, Y の部分集合 B に対し定義される**X の部分集合** $f^{-1}(B)$ である.

注意 11.5. $f\colon X \to Y$ を全単射, $B \subset Y$ を部分集合とする. このとき, $f^{-1}(B)$ と書くと

1. f による B の逆像 $f^{-1}(B)$
2. 逆写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ による B の像 $(f^{-1})(B)$

のどちらであるかはっきりしないが, 実はこれらは一致する, つまり $f^{-1}(B) = (f^{-1})(B)$ となるので問題ない.

定理 11.6 ([9, p.41]). $f\colon X \to Y$ を写像, $A_1, A_2 \subset X$ を部分集合とする. このとき, 次が成り立つ.

1. $A_1 \subset A_2$ ならば $f(A_1) \subset f(A_2)$.

2. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
3. $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
4. 上で, 等号は必ずしも成り立たない.

証明. 1. $A_1 \subset A_2$ であるとする.
$y \in f(A_1)$ とする. このとき, ある $a \in A_1$ が存在して, $y = f(a)$ が成り立つ. $A_1 \subset A_2$ だから, $a \in A_2$. よって, $y = f(a) \in f(A_2)$.

2. (i) $f(A_1 \cup A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$ であること.
   $y \in f(A_1 \cup A_2)$ とする. このとき, ある $a \in A_1 \cup A_2$ が存在して, $y = f(a)$ が成り立つ. $a \in A_1$ のときは, $y = f(a) \in f(A_1) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. 同様に, $a \in A_2$ のときは $y \in f(A_2) \subset f(A_1) \cup f(A_2)$. いずれにしても $y \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

   (ii) $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$ であること.
   $A_1 \subset A_1 \cup A_2$ だから, 1 より $f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. 同様に, $A_2 \subset A_1 \cup A_2$ だから,$f(A_1) \subset f(A_1 \cup A_2)$. よって $f(A_1) \cup f(A_2) \subset f(A_1 \cup A_2)$.

3. $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ より, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1)$. 同様に, $A_1 \cap A_2 \subset A_2$ より, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_2)$. よって, $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

4. 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を, $f(x) = x^2$ により定め, $\mathbb{R}$ の部分集合 $A_1 = (-\infty, 0]$, $A_2 = [0, \infty)$ を考える.
   - $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ であるから
   $$f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{f(x) \mid x \in \{0\}\} = \{f(0)\} = \{0\}.$$
   ($f(\{0\})$ と $f(0)$, $\{0\}$ と 0 の違いに注意.)
   - $$\begin{aligned} f(A_1) &= \{f(x) \mid x \in A_1\} \\ &= \left\{x^2 \;\middle|\; x \leq 0\right\} \\ &= [0, \infty) \end{aligned}$$
   同様に $f(A_2) = [0, \infty)$.
   よって, $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, \infty)$.
   - 以上から $f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2)$.

$\square$

参考 . $f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2)$ となる別の例.

$$\begin{aligned} f\colon \{0,1\} &\longrightarrow \{0\} \\ 0 &\longmapsto 0 \\ 1 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

という写像を考える．$\{0\}, \{1\} \subset \{0,1\}$ に対し，$\{0\} \cap \{1\} = \emptyset$ ゆえ，$f(\{0\} \cap \{1\}) = \emptyset$. 一方，$f(\{0\}) = f(\{1\}) = \{0\}$ だから，$f(\{0\}) \cap f(\{1\}) = \{0\}$.

定理 11.7 ([9, p.37])**.** 写像 $f\colon X \to Y$ が全射であるための必要十分条件は $f(X) = Y$ となることである．

証明.
- f が全射であるとする．
  像の定義より $f(X) \subset Y$ である．
  $Y \subset f(X)$ であることを示そう．$y \in Y$ とする．仮定より f は全射であるから，ある $x \in X$ が存在して，$y = f(x)$ となる．よって，$y = f(x) \in f(X)$.
- $f(X) = Y$ とする．
  $y \in Y$ とする．
  $$y \in Y = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$
  であるから，ある $x \in X$ が存在して，$y = f(x)$ となる．よって f は全射である．

□

定理 11.8 ([9, p.41])**.** $f\colon X \to Y$ を写像，$B_1, B_2 \subset Y$ を部分集合とする．このとき，次が成り立つ．

1. $B_1 \subset B_2$ ならば $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
2. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
3. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

像の場合 (定理 11.6.3) と異なり，この 3 では等号が成り立つことに注意せよ．

証明.
1. $x \in f^{-1}(B_1)$ とする．逆像の定義より $f(x) \in B_1$．仮定より $B_1 \subset B_2$ だから，$f(x) \in B_2$．よって，$x \in f^{-1}(B_2)$.
2. (i) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ であること．
   $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ とする．このとき $f(x) \in B_1 \cup B_2$ である．$f(x) \in B_1$ のときは，$x \in f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$．$f(x) \in B_2$ のときは，$x \in f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$．いずれにしても $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

   (ii) $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ であること．
   $B_1 \subset B_1 \cup B_2$ だから，1 より $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$．同様に，$B_2 \subset B_1 \cup B_2$ だから，$f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$．よって，$f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

- 別の方法.

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= \{x \in X \mid f(x) \in B_1 \cup B_2\} \\ &= \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) \in B_1 \text{ または } f(x) \in B_2\right\} \\ &= \left\{x \in X \;\middle|\; x \in f^{-1}(B_1) \text{ または } x \in f^{-1}(B_2)\right\} \\ &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

3. (i) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ であること.
   $B_1 \cap B_2 \subset B_1$ だから, 1 より $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1)$. 同様に, $B_1 \cap B_2 \subset B_2$ だから, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_2)$. よって, $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subset f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

   (ii) $f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \subset f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ であること.
   $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ とする. このとき $x \in f^{-1}(B_1)$ かつ $x \in f^{-1}(B_2)$. $x \in f^{-1}(B_1)$ であるから $f(x) \in B_1$. $x \in f^{-1}(B_2)$ であるから $f(x) \in B_2$. よって, $f(x) \in B_1 \cap B_2$. ゆえに, $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$.

- 別の方法.

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= \{x \in X \mid f(x) \in B_1 \cap B_2\} \\ &= \left\{x \in X \;\middle|\; f(x) \in B_1 \text{ かつ } f(x) \in B_2\right\} \\ &= \left\{x \in X \;\middle|\; x \in f^{-1}(B_1) \text{ かつ } x \in f^{-1}(B_2)\right\} \\ &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

□

定理 11.9. $f\colon X \to Y$ を写像, $A \subset X$, $B \subset Y$ を部分集合とする. このとき, 次が成り立つ.

1. $f(A) \subset B \Leftrightarrow A \subset f^{-1}(B)$.
2. $f^{-1}(f(A)) \supset A$.
3. f が単射ならば $f^{-1}(f(A)) = A$.
4. $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
5. f が全射ならば $f(f^{-1}(B)) = B$.

証明. 1. どちらも「A の元を f で写すと B にはいる」ということなのであきらか. 一応丁寧にやってみると,
$\Rightarrow$. $f(A) \subset B$ であるとする. $a \in A$ とすると, $f(a) \in f(A)$. 仮定より $f(A) \subset B$ なので $f(a) \in B$. よって $a \in f^{-1}(B)$. ゆえに $A \subset f^{-1}(B)$.
$\Leftarrow$. $A \subset f^{-1}(B)$ であるとする. $y \in f(A)$ とすると, ある $a \in A$ が存在して $y =$

$f(a)$ となる．仮定より $A \subset f^{-1}(B)$ なので $a \in f^{-1}(B)$．よって $y = f(a) \in B$．ゆえに $f(A) \subset B$.

2. あきらか．(A の元を f で写すと $f(A)$ にはいる.) なお, これは 1 の特別な場合 ($B = f(A)$ のとき) である．
   等号は一般には成立しない．例えば
   $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ について, $f^{-1}(f(\{1\}))$ を考えてみよ．
3. f を単射とする．このとき, $f^{-1}(f(A)) \subset A$ であることを示そう．
   $x \in f^{-1}(f(A))$ とする．このとき $f(x) \in f(A)$ であるから, ある $a \in A$ が存在して, $f(x) = f(a)$ となる．仮定より f は単射であるから, $x = a \in A$.
4. 明らか．($f^{-1}(B)$ の元を f で写すと B にはいる.) なお, これは 1 の特別な場合 ($A = f^{-1}(B)$ のとき) である．
   等号は一般には成立しない．例えば
   $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ について, $f(f^{-1}(\mathbb{R}))$ を考えてみよ．
5. f を全射とする．このとき, $B \subset f(f^{-1}(B))$ であることを示そう．
   $b \in B$ とする．仮定より f は全射であるから, ある $x \in X$ が存在して, $f(x) = b$ となる．$f(x) = b \in B$ であるから, $x \in f^{-1}(B)$．よって, $b = f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

□

演習 11.10. $f\colon X \to Y$ を全単射, $B \subset Y$ を部分集合とする．このとき, f による B の逆像 $f^{-1}(B)$ と, 逆写像 $f^{-1}\colon Y \to X$ による B の像 $(f^{-1})(B)$ は一致する, つまり $f^{-1}(B) = (f^{-1})(B)$ となることを示せ．

演習 11.11. $f\colon X \to Y$ を写像, $A_1, A_2 \subset X$ を部分集合とする．f が単射であれば, $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ であることを示せ．

演習 11.12. $f\colon X \to Y$ を写像, $B \subset Y$ を部分集合とする．このとき, $B \cap f(X) = f(f^{-1}(B))$ を示せ．

演習 11.13. $f\colon X \to Y$ を写像, $A \subset X$ を部分集合とする．

1. $f(X - A) \supset f(X) - f(A)$ を示せ．
2. f が単射ならば, 上で等号が成立する, つまり, $f(X - A) = f(X) - f(A)$ が成り立つことを示せ．
3. $f(X - A) \neq f(X) - f(A)$ となる例を挙げよ．

演習 11.14. $f\colon X \to Y$ を写像, $B \subset Y$ を部分集合とする．このとき, $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$ を示せ．

後期

12 論理記号と論理式

定義 12.1. p, q を命題とする.

1. 命題「p でない」を $\neg p$ と表す.
2. 命題「p または q」を $p \vee q$ と表す.
3. 命題「p かつ q」を $p \wedge q$ と表す.

記号 $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ を論理結合子 (logical connective) という.

注意 12.2. 教科書 [9] では「p でない」を表すのに, 主に $\overline{p}$ を用いている. 長い文章や式の上に線を引くのは大変なので, この講義では $\neg$ を用いる.

参考 .

- $\neg$ は否定 (negation) と呼ばれる.
- $\vee$ は選言(せんげん) (disjunction) あるいは論理和と呼ばれる.
- $\wedge$ は連言(れんげん) (conjunction) あるいは論理積と呼ばれる.
- $\rightarrow$ は含意(がんい) (implication) 等と呼ばれる.

定義 12.3 ([9, p.7])**.** $P(x)$ を変数 x に関する述語とする.

1. 「任意の x に対して, $P(x)$ が成り立つ」という命題を
$$\forall x : P(x)$$
と表す.
   - $\forall$ は **A**ll の A からきている.
   - 板書等では, $\forall$ は少し上気味に書く.
2. 「ある x が存在して, $P(x)$ が成り立つ」という命題を
$$\exists x : P(x)$$
と表す.

- $\exists$ は **E**xist の E からきている.
- 板書等では, $\exists$ は少し上気味に書く.

記号 $\forall, \exists$ を量化子 (quantifier) という.

参考．
- $\forall$ は全称量化子 (universal quantifier), あるいは全称記号と呼ばれる.
- $\exists$ は存在量化子 (existential quantifier), あるいは存在記号と呼ばれる.

量化子という言葉は何やら厳しい感じがするが, 別に量子力学等とは（直接には）関係なく, 文字通り, 「量」化する記号ということである．述語 $P(x)$ に対して, 例えば

　3 個の x に対して, $P(x)$ が成り立つ

という文は命題である．このように述語の変数に代入する値の個数や量を指定すると, 述語を命題にすることができる．この, 個数や量を指定することを「量化」と言う．量化のなかで, 普通によく使われるものが, 「全て」と「少なくとも 1 個」, つまり $\forall$ と $\exists$ である.

注意 12.4. 変数がたくさんある述語についても同じような記法を使うが, 次の規約に従う.

$P(x, y)$ が変数 x, y についての述語であるとき,

　任意の x に対して, $P(x, y)$ が成り立つ

という文章は変数 y についての述語である．定義 12.3 に従えば, これは

$$\forall x : P(x, y)$$

となる．よって

　ある y が存在して, 任意の x に対して, $P(x, y)$ が成り立つ

という命題は定義 12.3 に従えば,

$$\exists y : \forall x : P(x, y)$$

あるいは読みやすいように括弧をつけると

$$\exists y : (\forall x : P(x, y))$$

となるが, このような場合はコロン（:）は二重にせず,

$$\exists y, \forall x : P(x, y)$$

と書くことにする.

定義 12.5. 論理結合子 $(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow)$ と量化子 $(\forall, \exists)$ をまとめて論理記号 (logical symbol) といい, 論理記号を用いて表した命題を論理式という.

注意 12.6. この論理式の定義は全く正確ではない. が, 正確な定義をするには準備がたくさん必要だし, 多分, 多くの人が分からなくなる. 興味のある人は数理論理学（一階述語論理）の本を見てみてください.

「任意の x に対して」や「ある x が存在して」を使った命題を考える際,

任意の実数 x に対して, $x^3 \geq 0$,
ある実数 x が存在して, $x^2 = 2$

等のように, 変数 x に条件（この例では「x は実数」）をつけたものを考えることがよくある.

定義 12.7. $P(x), Q(x)$ を変数 x に関する述語とする.

1. 「$P(x)$ が成り立つような任意の x に対して, $Q(x)$ が成り立つ」という命題を
$$\forall x(P(x)) : Q(x)$$
と表す. すなわち, 変数 x に関する条件を括弧の中に書く.
2. 「$P(x)$ が成り立つようなある x が存在して, $Q(x)$ が成り立つ」という命題を
$$\exists x(P(x)) : Q(x)$$
と表す. すなわち, 変数 x に関する条件を括弧の中に書く.

参考 . 論理式は正式な書き方をすると非常に読みにくくなることがあるので, 読みやすくするために便宜的な書き方をすることがよくある. この講義で用いているコロンもそうだし, 変数に関する条件を括弧のなかに入れるという書き方もそうである. こういった便宜的な書き方については, いろいろと流儀があり, 人によって違う書き方をすることがあるので注意が必要である. 例えば, この講義における $\forall x : P(x) \vee Q(x)$ を $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ と書くという流儀もある (後者の方が一般的かもしれない).

意味を考えると（左辺を右辺で定義する, あるいは左辺は右辺の簡略記法であるという方が正確であるが）次が分かる.

定理 12.8. $P(x), Q(x)$ を変数 x に関する述語とする. 次が成立する.

1. $\forall x(P(x)) : Q(x) \quad \equiv \quad \forall x : P(x) \rightarrow Q(x)$.
2. $\exists x(P(x)) : Q(x) \quad \equiv \quad \exists x : P(x) \wedge Q(x)$.

□

いろいろな定義や定理を考える際に, 空集合の場合はどうなるのかということが気になることがある. 実際に定理等を使う状況では, 空集合の場合を扱うことはほとんどないので, たいして気にする必要はないし, 空集合だけは別扱いにするということにしても問題はないことが多いが, 多くの場合, 次の事実に注意すれば空集合を特別扱いする必要はない.

系 12.9. $P(x)$ を変数 x に関する述語とする. 次が成立する.

1. 命題「$\forall x \in \emptyset : P(x)$」は真である.
2. 命題「$\exists x \in \emptyset : P(x)$」は偽である.

証明.

1. 命題「$\forall x : x \in \emptyset \to P(x)$」の真偽を考えればよい. x に何を代入しても, 「$x \in \emptyset$」は偽である. よって x に何を代入しても, 「$x \in \emptyset \to P(x)$」は真である. よって, 「任意の x に対して, $x \in \emptyset \to P(x)$」は真である.
2. 命題「$\exists x : (x \in \emptyset) \wedge P(x)$」の真偽を考えればよい. 「$x \in \emptyset$」が真となるような x は存在しない. よって「$(x \in \emptyset) \wedge P(x)$」が真となるような x は存在しない. よって, 「ある x が存在して, $(x \in \emptyset) \wedge P(x)$」は偽である.

□

例 12.10 ([9, p.12–13], 前期例 3.12)**.**

1. 任意の実数 x に対して, $x^2 \geq 0$ が成り立つ.
   論理式で表すと
   $$\forall x(x \in \mathbb{R}) : x^2 \geq 0.$$
   これは普通, 少し省略して
   $$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$
   と書くことが多い. 定理 12.8 を使うと
   $$\forall x : x \in \mathbb{R} \to x^2 \geq 0$$
   としてもよい. これを日本語で書けば「任意の x に対して, x が実数ならば $x^2 \geq 0$ である」となるが, 「x が実数ならば $x^2 \geq 0$ である」と書かれることが多い（警告 5.5）. このこと（警告 5.5）は論理式を日本語に直す際にはあまり問題にならないが, 日本語を論理式になおす際には注意が必要である.
   この命題は真である.

2. ある実数 x が存在して, $x^2 = 2$ が成り立つ.
   論理式で表すと
   $$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = 2$$
   あるいは
   $$\exists x : (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = 2).$$
   この命題は真である.
3. 任意の正の実数 x に対して, ある実数 y が存在して, $y^2 = x$ が成り立つ.
   論理式で表すと
   $$\forall x (x \in \mathbb{R} \wedge x > 0), \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$$
   あるいは
   $$\forall x \in \mathbb{R} (x > 0), \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$$
   である. 文脈にもよるが, 例えば, 微分積分学においては, 不等号が出てきた場合, とくに断りがなければ普通, 実数をあつかっていると考える [9, p.13, 脚注]. よって, 誤解がおこらない状況では
   $$\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$$
   としてよい.
   この命題は真である.
4. ある実数 y が存在して, 任意の正の実数 x に対して, $y^2 = x$ が成り立つ.
   論理式で表すと
   $$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x > 0 : y^2 = x.$$
   この命題は偽である.

警告 12.11.　1. 前期も注意した（警告 3.14）が,
$$\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$$
と
$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall x > 0 : y^2 = x$$
は内容が異なる命題である. (この場合真偽も異なる.)
∀ と ∃ の順序を勝手に**交換してはいけない!**

2. 論理式で書かれたものを, 意味の通る日本語で表現できるよう訓練すること. その逆も (逆の方が難しいことが多い).
3. 集合の内延的記法（定義 6.5) において ∀ をむやみに使わないこと.

(i) 内延的記法およびそのバリエーション（注意 6.8）において, 縦棒（$|$）の左側に $\forall$ がくることはない．よって, 例えば, 次の書き方はおかしい（意味が無い）．
写像 $f\colon X \to Y$ と $B \subset Y$ に対して

$$f^{-1}(B) = \{\forall x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

(ii) 内延的記法 $\{x|P(x)\}$ において, $P(x)$ は x に関する述語である．よって, 例えば, 次の書き方はおかしい（意味が無い）．
写像 $f\colon X \to Y$ と $A \subset X$ に対して

$$f(A) = \{f(x) \mid \forall x \in A\}.$$

実際,「$\forall x \in A$」というのは文として完結していない, あるいは意味をなさない．「$\forall x$」という記号は x に関する述語（の前）につけたときにだけ意味をなす．

(iii) もちろん, $\forall$ を絶対に使わないということはない．例えば

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : x \leq \varepsilon\}$$

というのは意味があり,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : x \leq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

である．

注意 12.12. 例 12.10.3,4 も, 定理 12.8 を使って, $\to$ を使った式で表すこともできるが, 若干の注意が必要である．3 を考えてみる．

$$\begin{aligned}
\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x \quad &= \quad \forall x(x > 0) : \exists y(y \in \mathbb{R}) : y^2 = x \\
&\equiv \quad \forall x(x > 0) : \exists y : (y \in \mathbb{R}) \wedge (y^2 = x) \\
&\equiv \quad \forall x : (x > 0) \to (\exists y : (y \in \mathbb{R}) \wedge (y^2 = x))
\end{aligned}$$

これを日本語に直せば「x が正の実数ならば, $y^2 = x$ となるような実数 y が存在する」となる．さらに $\exists y$ を前に出すには次の定理 12.14 を使う．

$$\begin{aligned}
&\equiv \quad \forall x : \exists y : (x > 0) \to ((y \in \mathbb{R}) \wedge (y^2 = x)) \\
&= \quad \forall x, \exists y : (x > 0) \to ((y \in \mathbb{R}) \wedge (y^2 = x)).
\end{aligned}$$

3 行目から 4 行目への変形以外は記法の約束と定理 12.8 による．この例や例 12.10.1 のように,「ならば」を使うと日本語としてこなれた表現になることも多いが, 論理式に直した場合, 変数に条件をつけた形の方がすっきりすることも多いし, 次節でやるが, 否定命題を作るのも簡単なことが多い．また, 何度も繰り返すが, 警告 5.5 で述べたように,「ならば」を含む命題を論理式に直す際には注意が必要である．

—**注意おわり**—

警告 12.13. 以下に, $\forall, \exists$ を含む論理式の変形に関する公式をいくつか挙げる． しかし，これらの定理 12.14,12.15 や系 12.18,12.16 は覚えようとすると大変なので<u>**覚えるべきではない**</u>. 必要に応じて意味を考えて変形できるようになるべきである．

次の定理は, p が変数 x を含まなければ, $\forall x$, $\exists x$ と $p \to$, $p\wedge$, $p\vee$ の順番を入れ替えてよい (1〜6), あるいは $\forall x$, $\exists x$ と $\wedge p$, $\vee p$ は結合的である (7〜10) ということを言っている．

定理 12.14. p を命題 (あるいは, 変数 x を含まない述語), $Q(x)$ を変数 x に関する述語とする．次が成立する．

1. $\forall x : p \to Q(x) \quad\equiv\quad p \to \bigl(\forall x : Q(x)\bigr).$
2. $\exists x : p \to Q(x) \quad\equiv\quad p \to \bigl(\exists x : Q(x)\bigr).$
3. $\forall x : p \vee Q(x) \quad\equiv\quad p \vee \bigl(\forall x : Q(x)\bigr).$
4. $\exists x : p \vee Q(x) \quad\equiv\quad p \vee \bigl(\exists x : Q(x)\bigr).$
5. $\forall x : p \wedge Q(x) \quad\equiv\quad p \wedge \bigl(\forall x : Q(x)\bigr).$
6. $\exists x : p \wedge Q(x) \quad\equiv\quad p \wedge \bigl(\exists x : Q(x)\bigr).$
7. $\forall x : \bigl(Q(x) \vee p\bigr) \quad\equiv\quad \bigl(\forall x : Q(x)\bigr) \vee p.$
8. $\exists x : \bigl(Q(x) \vee p\bigr) \quad\equiv\quad \bigl(\exists x : Q(x)\bigr) \vee p.$
9. $\forall x : \bigl(Q(x) \wedge p\bigr) \quad\equiv\quad \bigl(\forall x : Q(x)\bigr) \wedge p.$
10. $\exists x : \bigl(Q(x) \wedge p\bigr) \quad\equiv\quad \bigl(\exists x : Q(x)\bigr) \wedge p.$

証明．まず 3 を示そう．命題 q に対し, p が真のとき $p \vee q$ は真, p が偽のとき $p \vee q$ の真偽は q の真偽と一致することに注意する．

- p が真のとき．
  このとき, 右辺「$p \vee \bigl(\forall x : Q(x)\bigr)$」は真である．
  一方, x に何を代入しても, $p \vee Q(x)$ は真であるから, 左辺「$\forall x : p \vee Q(x)$」も真である．
- p が偽のとき．
  - 「$\forall x : Q(x)$」が真の場合．
    このとき, 右辺「$p \vee \bigl(\forall x : Q(x)\bigr)$」は真である．
    一方，「$\forall x : Q(x)$」が真であるから, x に何を代入しても, $Q(x)$ は真である． よって, x に何を代入しても, $p \vee Q(x)$ は真である． すなわち, 左辺「$\forall x : p \vee Q(x)$」も真である．
  - 「$\forall x : Q(x)$」が偽の場合．
    このとき, 右辺「$p \vee \bigl(\forall x : Q(x)\bigr)$」は偽である．

一方,「$\forall x : Q(x)$」が偽であるから, $Q(x_0)$ が偽となるような x_0 が存在する. この x_0 に対し, $p \vee Q(x_0)$ は偽である. すなわち, 左辺「$\forall x : p \vee Q(x)$」も偽である.

命題 q に対し, p が真のとき $p \wedge q$ の真偽は q の真偽と一致し, p が偽のとき $p \wedge q$ は偽であることに注意すれば, 同様にして 4 が示せる.

6, 7 は, $p \vee q \equiv q \vee p$ に注意すれば, 3, 4 から分かる.

1, 2 は, $p \to q \equiv \neg p \vee q$ に注意すれば, 3, 4 から分かる.

5, 6, 9,10 は 3, 4 と同様に示せる. また, 次節の定理 13.1, 13.4 を使えば, 3, 4 から次のようにして示すこともできる. 5 を考える.

$$
\begin{aligned}
\neg\Big(\forall x : p \wedge Q(x)\Big) &\equiv \exists x : \neg\big(p \wedge Q(x)\big) && \text{定理 13.4} \\
&\equiv \exists x : \neg p \vee \neg Q(x) && \text{定理 13.1} \\
&\equiv \neg p \vee \big(\exists x : \neg Q(x)\big) && 4 \\
&\equiv \neg p \vee \neg\big(\forall x : Q(x)\big) && \text{定理 13.4} \\
&\equiv \neg\Big(p \wedge \big(\forall x : Q(x)\big)\Big) && \text{定理 13.1.}
\end{aligned}
$$

よって定理 13.1 より

$$
\begin{aligned}
\forall x : p \wedge Q(x) &\equiv \neg\neg\Big(\forall x : p \wedge Q(x)\Big) \\
&\equiv \neg\neg\Big(p \wedge \big(\forall x : Q(x)\big)\Big) \\
&\equiv p \wedge \big(\forall x : Q(x)\big).
\end{aligned}
$$

□

定理 12.15. $P(x), Q(x)$ を変数 x に関する述語とする. 次が成立する.

1. $\forall x : P(x) \wedge Q(x) \quad\equiv\quad \big(\forall x : P(x)\big) \wedge \big(\forall x : Q(x)\big).$
2. $\exists x : P(x) \vee Q(x) \quad\equiv\quad \big(\exists x : P(x)\big) \vee \big(\exists x : Q(x)\big).$

証明. 1 を示そう.

左辺「$\forall x : P(x) \wedge Q(x)$」が真であるとする. このとき, x に何を代入しても $P(x) \wedge Q(x)$ は真である. $P(x) \wedge Q(x)$ が真であるから, $P(x), Q(x)$ どちらも真である. したがって, 特に, x に何を代入しても $P(x)$ は真である. すなわち $\forall x : P(x)$ は真である. 同様に $\forall x : Q(x)$ も真である. よって, 右辺「$(\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$」も真である.

逆に右辺「$(\forall x : P(x)) \wedge (\forall x : Q(x))$」が真であるとする. このとき,「$\forall x : P(x)$」,「$\forall x : Q(x)$」どちらも真である.「$\forall x : P(x)$」が真であるから, x に何を代入しても $P(x)$ は真である. 同様に x に何を代入しても $Q(x)$ は真である. よって, x に何を代入しても,

$P(x), Q(x)$ どちらも真, すなわち $P(x) \wedge Q(x)$ が真. よって, 左辺「$\forall x : P(x) \wedge Q(x)$」も真である.

2 も同様に, あるいは定理 13.1, 13.4 を使って 1 から示せる. □

変数 x に条件をつけた場合も同様なことが成立する.

系 12.16. $P(x), Q(x), R(x)$ を変数 x に関する述語とする. 次が成立する.

1. $\forall x(R(x)) : P(x) \wedge Q(x) \quad \equiv \quad \big(\forall x(R(x)) : P(x)\big) \wedge \big(\forall x(R(x)) : Q(x)\big).$
2. $\exists x(R(x)) : P(x) \vee Q(x) \quad \equiv \quad \big(\exists x(R(x)) : P(x)\big) \vee \big(\exists x(R(x)) : Q(x)\big).$

証明. 命題 p, q, r に対し,

$$r \to (p \wedge q) \equiv (r \to p) \wedge (r \to q)$$
$$r \wedge (p \vee q) \equiv (r \wedge p) \vee (r \wedge q)$$

が成り立つことに注意すればよい. □

警告 12.17. 定理 12.15 や系 12.16 で $\forall$ と $\exists$ を入れ替えたものは一般には正しくない. 例えば, 次を比較してみよ.

1. (i) $\exists x \in \mathbb{R} : (x > 0) \wedge (x \leq 0)$.
   (ii) $(\exists x \in \mathbb{R} : x > 0) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} : x \leq 0)$.
2. (i) $\forall x \in \mathbb{R} : (x > 0) \vee (x \leq 0)$.
   (ii) $(\forall x \in \mathbb{R} : x > 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R} : x \leq 0)$.

定理 12.14 の変数 x に条件をつけたバージョンも考えることができるが, 少し注意が必要である. (下記 2, 4, 5, 8, 9 参照)

系 12.18. p を命題 (あるいは, 変数 x を含まない述語), $Q(x), R(x)$ を変数 x に関する述語とする. 次が成立する.

1. $\forall x(R(x)) : p \to Q(x) \quad \equiv \quad p \to \big(\forall x(R(x)) : Q(x)\big).$
2. $\exists x(R(x)) : p \to Q(x) \quad \equiv \quad \Big(p \to \big(\exists x(R(x)) : Q(x)\big)\Big) \wedge (\exists x : R(x)).$
3. $\forall x(R(x)) : p \vee Q(x) \quad \equiv \quad p \vee \big(\forall x(R(x)) : Q(x)\big).$
4. $\exists x(R(x)) : p \vee Q(x) \quad \equiv \quad \Big(p \vee \big(\exists x(R(x)) : Q(x)\big)\Big) \wedge (\exists x : R(x)).$
5. $\forall x(R(x)) : p \wedge Q(x) \quad \equiv \quad \Big(p \wedge \big(\forall x(R(x)) : Q(x)\big)\Big) \vee (\forall x : \neg R(x)).$
6. $\exists x(R(x)) : p \wedge Q(x) \quad \equiv \quad p \wedge \big(\exists x(R(x)) : Q(x)\big).$
7. $\forall x(R(x)) : \big(Q(x) \vee p\big) \quad \equiv \quad \big(\forall x(R(x)) : Q(x)\big) \vee p.$
8. $\exists x(R(x)) : \big(Q(x) \vee p\big) \quad \equiv \quad \Big(\big(\exists x(R(x)) : Q(x)\big) \vee p\Big) \wedge (\exists x : R(x)).$

<u>9</u>. $\forall x(R(x)) : \big(Q(x) \wedge p\big) \quad \equiv \quad \Big(\big(\forall x(R(x)) : Q(x)\big) \wedge p\Big) \vee (\forall x : \neg R(x)).$

10. $\exists x(R(x)) : \big(Q(x) \wedge p\big) \quad \equiv \quad \big(\exists x(R(x)) : Q(x)\big) \wedge p.$

証明. 定理 12.14 と同様に両辺の真偽を比較してもよいが, 定理 12.8, 12.14, 12.15 を使って式を変形して示すこともできる. 7,8 を示してみよう.

7.
$$r \to (q \vee p) \equiv \neg r \vee (q \vee p) \equiv (\neg r \vee q) \vee p \equiv (r \to q) \vee p \tag{1}$$

に注意する.

$$\begin{aligned}
\forall x(R(x)) : \big(Q(x) \vee p\big) \quad &\equiv \quad \forall x : \Big(R(x) \to \big(Q(x) \vee p\big)\Big) && \text{定理 } 12.8 \\
&\equiv \quad \forall x : \Big(\big(R(x) \to Q(x)\big) \vee p\Big) && (1) \\
&\equiv \quad \Big(\forall x : \big(R(x) \to Q(x)\big)\Big) \vee p && \text{定理 } 12.14 \\
&\equiv \quad \big(\forall x(R(x)) : Q(x)\big) \vee p && \text{定理 } 12.8.
\end{aligned}$$

8.
$$(r \wedge q) \vee r \equiv r \tag{2}$$

に注意する.

$$\begin{aligned}
& \exists x(R(x)) : \big(Q(x) \vee p\big) \\
\equiv \quad & \exists x : R(x) \wedge \big(Q(x) \vee p\big) && \text{定理 } 12.8 \\
\equiv \quad & \exists x : \big(R(x) \wedge Q(x)\big) \vee \big(R(x) \wedge p\big) \\
\equiv \quad & \Big(\exists x : R(x) \wedge Q(x)\Big) \vee \Big(\exists x : R(x) \wedge p\Big) && \text{定理 } 12.15 \\
\equiv \quad & \Big(\exists x : R(x) \wedge Q(x)\Big) \vee \Big(\big(\exists x : R(x)\big) \wedge p\Big) && \text{定理 } 12.14 \\
\equiv \quad & \Big(\big(\exists x : R(x) \wedge Q(x)\big) \vee \big(\exists x : R(x)\big)\Big) \wedge \Big(\big(\exists x : R(x) \wedge Q(x)\big) \vee p\Big) \\
\equiv \quad & \Big(\exists x : \big(R(x) \wedge Q(x)\big) \vee R(x)\Big) \wedge \Big(\big(\exists x : R(x) \wedge Q(x)\big) \vee p\Big) && \text{定理 } 12.15 \\
\equiv \quad & \Big(\exists x : R(x)\Big) \wedge \Big(\big(\exists x : R(x) \wedge Q(x)\big) \vee p\Big) && (2) \\
\equiv \quad & \Big(\exists x : R(x)\Big) \wedge \Big(\big(\exists x(R(x)) : Q(x)\big) \vee p\Big) && \text{定理 } 12.8 \\
\equiv \quad & \Big(\big(\exists x(R(x)) : Q(x)\big) \vee p\Big) \wedge \Big(\exists x : R(x)\Big).
\end{aligned}$$

他も同様, あるいは 7, 8 から分かる. □

注意 12.19. 定理 12.14 の 7 とこの定理の 7 とは同じ形をしているが, 定理 12.14 の 8 とこの定理の 8 とは形が違うことに注意せよ. この違いは, $\to$ が $\vee$ に対して

結合的 $(r \to (q \vee p) \equiv (r \to q) \vee p)$ であるのに対して, $\wedge$ は $\vee$ に対して分配的 $(r \wedge (q \vee p) \equiv (r \wedge q) \vee (r \wedge p))$ であるという違いからきている.

演習 12.20. $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ は偶数}\}$, $O = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ は奇数}\}$ とおく.

1. 次の論理式を意味の通る日本語で表せ.
   (i) $\exists x \in E, \exists y \in O : x \geq y$.
   (ii) $\forall x \in E, \exists y \in O : x \geq y$.
   (iii) $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : (n \geq N) \wedge (|a_n - a| \geq \varepsilon)$.
2. 次の命題を論理式を用いて表せ.
   (i) 任意の偶数 x と, 任意の奇数 y に対して, $x < y$ が成り立つ.
   (ii) ある偶数 x が存在して, 任意の奇数 y に対して, $x < y$ が成り立つ.
   (iii) 任意の正の数 ε に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|a_n - a| < \varepsilon$ となる.
   (iv) 任意の正の数 ε に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ となる.

13 否定命題

定理 13.1. [9, pp.14–16] p, q を命題とする．次が成り立つ．

1. $\neg(\neg p) \equiv p$.
2. (de Morgan (ド・モルガン) の法則)
   (i) $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.
   (ii) $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.
3. $\neg(p \to q) \equiv p \wedge (\neg q)$.

証明．いずれも真理表を書けばわかる．（1 は例 4.7.1 でやった．2, 3 は演習問題.）
なお, 2 については, 1 を使えば, 一方を示せば他方はすぐわかる (定理 8.2 の証明参照).
また 3 は, 定理 5.2 と 1,2 を使えば次のように示すこともできる．

$$
\begin{aligned}
\neg(p \to q) &\equiv \neg((\neg p) \vee q) \\
&\equiv (\neg\neg p) \wedge (\neg q) \\
&\equiv p \wedge (\neg q)
\end{aligned}
$$

□

注意 13.2. この定理は, いずれも意味を考えれば, 真理表を書かずともわかるかと思うが, 3 については注意が必要である．3 を日本語で読めば

『p ならば q』の否定は，『p かつ「q でない」』

ということになるが, ここでの「ならば」は $\to$ であるということを忘れてはならない．日本語の「ならば」の語感に引きずられて意味を考えるとうまく否定文を作れないことがある．

警告 13.3. $p \to q$ の否定は $p \to \neg q$ **ではない！** (演習問題参照.)

定理 13.4. [9, p.14] $P(x)$ を変数 x に関する述語とする．次が成り立つ．

1. $\neg\bigl(\forall x : P(x)\bigr) \quad \equiv \quad \exists x : \neg P(x)$.
2. $\neg\bigl(\exists x : P(x)\bigr) \quad \equiv \quad \forall x : \neg P(x)$.

証明．意味を考えれば明らか． □

変数に条件をつけた場合も同様である．

定理 13.5. [9, p.16] $P(x), Q(x)$ を変数 x に関する述語とする．次が成り立つ．

1. $\neg\bigl(\forall x(P(x)) : Q(x)\bigr) \quad \equiv \quad \exists x(P(x)) : \neg Q(x).$
2. $\neg\bigl(\exists x(P(x)) : Q(x)\bigr) \quad \equiv \quad \forall x(P(x)) : \neg Q(x).$

証明. これも意味を考えればわかると思うが, 少し形式的にやると,

$$\begin{aligned}\neg\bigl(\forall x(P(x)) : Q(x)\bigr) &\equiv \neg\bigl(\forall x : P(x) \to Q(x)\bigr)\\ &\equiv \exists x : \neg\bigl(P(x) \to Q(x)\bigr)\\ &\equiv \exists x : P(x) \land \neg Q(x)\\ &\equiv \exists x(P(x)) : \neg Q(x).\end{aligned}$$

2 も同様, あるいは, 1 からすぐわかる. □

定理 13.1,13.4,13.5 を使えば与えられた論理式の否定を次の手順で作ることができる.

手順 13.6. [9, p.15]

Step 1 式に含まれるコロン (:) のうち, 一番左側にあるものに注目する.

Step 2 コロンが無ければ, 次の Step 3 にすすむ.
コロンがあれば一番左側にあるコロンより前にある $\forall$ を全て $\exists$ に, $\exists$ を全て $\forall$ に変える. (一番左側にある**コロンの前に関してはこれ以外は変更しない**.)

Step 3 (コロンがある場合は一番左側にある**コロンより後ろの部分を**) 定理 13.1 を使って**否定する**. (この過程でコロンを含む命題があれば Step 1 に戻る.)

例 13.7. 式 $\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$ の否定を作ってみる.

$$\begin{aligned}&\neg\left(\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x\right)\\ \equiv\ &\exists x > 0, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \neq x\end{aligned}$$

注意 12.12 でみたように, $\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R} : y^2 = x$ を, 変数に条件をつけない形で書くと, $\forall x : (x > 0) \to (\exists y : (y \in \mathbb{R}) \land (y^2 = x))$ となるのであった[*7]. この形で否定を作ると

$$\begin{aligned}&\neg\left(\forall x : (x > 0) \to (\exists y : (y \in \mathbb{R}) \land (y^2 = x))\right)\\ \equiv\ &\exists x : \neg\left((x > 0) \to (\exists y : (y \in \mathbb{R}) \land (y^2 = x))\right)\\ \equiv\ &\exists x : x > 0 \land \neg(\exists y : (y \in \mathbb{R}) \land (y^2 = x))\end{aligned}$$

[*7] 日本語で書かれた命題を素直に論理式に直すと, こういった形になりがちである.

ここで,

$$
\begin{aligned}
& \neg(\exists y : (y \in \mathbb{R}) \wedge (y^2 = x)) \\
\equiv\ & \forall y : \neg((y \in \mathbb{R}) \wedge (y^2 = x)) \\
\equiv\ & \forall y : \neg(y \in \mathbb{R}) \vee \neg(y^2 = x) \\
\equiv\ & \forall y : (y \notin \mathbb{R}) \vee (y^2 \neq x)
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
& \neg\left(\forall x : (x > 0) \to (\exists y : (y \in \mathbb{R}) \wedge (y^2 = x))\right) \\
\equiv\ & \exists x : x > 0 \wedge \neg(\exists y : (y \in \mathbb{R}) \wedge (y^2 = x)) \\
\equiv\ & \exists x : x > 0 \wedge \forall y : (y \notin \mathbb{R}) \vee (y^2 \neq x)
\end{aligned}
$$

となり結構大変である．もちろん，これは，次のように，変数に条件をつけた形に変形できる．

$$
\begin{aligned}
\equiv\ & \exists x > 0 : \forall y : (y \notin \mathbb{R}) \vee (y^2 \neq x) \\
\equiv\ & \exists x > 0 : \forall y : (y \in \mathbb{R}) \to (y^2 \neq x) \\
\equiv\ & \exists x > 0 : \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \neq x \\
\equiv\ & \exists x > 0, \forall y \in \mathbb{R} : y^2 \neq x
\end{aligned}
$$

今後，数学の学習を円滑にすすめていくためには，日本語で書かれた命題の否定命題を日本語で書くということが自由に出来るようになることが必要である．

手順 13.8. 否定命題の作り方．

Step 1 与えられた命題を論理式で書く．

Step 2 手順 13.6 に従い論理式を否定する．

Step 3 Step 2 で得られた論理式を意味の通る日本語にする．

注意 13.9. 実際にこの手順にのっとって否定命題を作る際に，(なれていないと) 一番難しいのはたいてい Step 1 である．

参考． こういうのが得意な人は，こういう手順をふまずとも否定命題をきちんと作ることができるだろうし，むしろ，こういう手順をふむとかえってわからなくなるかもしれない．が，複雑な命題になると，このような手順をふまないと間違えることもあるし，論理式と日本語を自由に行き来できる能力は重要なので，こういった手順にのっとって変形する訓練もやっておくことをすすめる．

例 13.10. 次の命題の否定命題を日本語で述べよ．

1. 「$A \subset B$」

   定義 6.2 より, 与えられた命題を日本語で書けば「A の任意の元 x に対して, $x \in B$ である」となる.

   Step 1 これを論理式で書くと $\forall x \in A : x \in B$.

   Step 2 否定命題は $\exists x \in A : x \notin B$.

   Step 3 日本語にすると,

   　　ある $x \in A$ が存在して, $x \notin B$ が成り立つ.

   　あるいは, 同じことであるが,

   　　A の元であるが, B の元ではない x が存在する.

   　(「$\exists x \in A : x \notin B$」$\equiv$「$\exists x : x \in A \wedge x \notin B$」.)

   (「$A \subset B$」を日本語で書けば, 「A は B の部分集合である」だから, その否定命題は「A は B の部分集合ではない」, というのも間違いとは言わないけれども...)

2. 「実数 α が $x^4 = 1$ の解ならば, $x^3 = 1$ の解である.」

   このような文 (における α) の意味は文脈によって違ってくる. が, ここでは文脈というものは全然無いし, この文が命題だと言っているので, これは「任意の実数 α に対して」こうだと解釈するのが妥当である (警告 5.5).

   Step 1 論理式で書けば, $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha^4 = 1 \to \alpha^3 = 1$.

   Step 2 否定すると, $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \alpha^4 = 1 \wedge \alpha^3 \neq 1$.

   Step 3 日本語にすると,

   　　ある実数 α が存在して, $\alpha^4 = 1$ かつ $\alpha^3 \neq 1$ となる.

   　あるいは, もう少しもとの命題の文を尊重すれば,

   　　ある実数 α が存在して, α は $x^4 = 1$ の解であるが, $x^3 = 1$ の解ではない.

   　ないし

   　　$x^4 = 1$ の解であるが, $x^3 = 1$ の解ではない実数 α が存在する.

   経験的に言って, $\to$ の入った命題の否定をうまく作れない人が多いようである. 論理式には $\to$ を使わないというのも 1 つの方法である. この例であれば, 与えられた命題は「$\alpha^4 = 1$ をみたすような任意の実数 α に対して, $\alpha^3 = 1$ が成り立つ」ということだから,

   Step 1 論理式にすると, $\forall \alpha \in \mathbb{R}(\alpha^4 = 1) : \alpha^3 = 1$.

   Step 2 否定すると, $\exists \alpha \in \mathbb{R}(\alpha^4 = 1) : \alpha^3 \neq 1$.

   Step 3 日本語にすると,

   　　$\alpha^4 = 1$ をみたすようなある実数 α が存在して, $\alpha^3 \neq 1$ となる.

   　あるいは

   　　$x^4 = 1$ の解であるが, $x^3 = 1$ の解ではない実数 α が存在する.

命題の否定を使う例として次を示してみよう．

定理 13.11. a を実数とする[*8]．このとき，任意の実数 α に対して次が成り立つ．

1. 任意の $x > a$ に対して $\alpha \leq x$ ならば，$\alpha \leq a$.
2. 任意の $x < a$ に対して $\alpha \geq x$ ならば，$\alpha \geq a$.

注意． 読点の位置に注意．もう少し誤解のないように書けば

「任意の $x > a$ に対して $\alpha \leq x$」ならば，$\alpha \leq a$.
「任意の $x < a$ に対して $\alpha \geq x$」ならば，$\alpha \geq a$.

ということ．

証明．1 を示そう．示したいことを論理式で書くと

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : (\forall x > a : \alpha \leq x) \to \alpha \leq a.$$

対偶 $((p \to q) \equiv (\neg q \to \neg p))$ を考えると，これは

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \not\leq a \to \neg(\forall x > a : \alpha \leq x)$$

と論理同値となる．「$\forall x > a : \alpha \leq x$」の否定は「$\exists x > a : \alpha \not\leq x$」だから，結局

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha > a \to (\exists x > a : \alpha > x)$$

を示せばよい．

$\alpha > a$ とせよ．$x = (\alpha + a)/2$ とおけば，$x > a$ であり，$\alpha > x$ が成り立つ．

2 も同様．あるいは 1 を使って示すこともできる． □

参考． 論理式

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha > a \to (\exists x > a : \alpha > x)$$

を日本語にすれば

$\alpha > a$ ならば，$x > a$ であるような実数 x が存在して，$\alpha > x$ が成り立つ

となる．もう少しひらたくいえば[*i]

$\alpha > a$ ならば，$\alpha > x > a$ となるような x がある

ということ．つまり 1 は，これを違う形で述べたものである．

[*8] このように書くと，実数 a をひとつ選んで固定する，ということ．

もう少し論理式を変形して簡単な形にすると

$$
\begin{aligned}
& \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha > a \to (\exists x > a : \alpha > x) \\
\equiv\ & \forall \alpha > a : (\exists x > a : \alpha > x) \\
\equiv\ & \forall \alpha > a, \exists x > a : \alpha > x
\end{aligned}
$$

となる.

---

*i 日本語での言い換えを論理式の変形で書くと

$$
\begin{aligned}
& \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha > a \to (\exists x > a : \alpha > x) \\
\equiv\ & \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha > a \to (\exists x : (x > a) \wedge (\alpha > x)) \\
\equiv\ & \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha > a \to (\exists x : \alpha > x > a).
\end{aligned}
$$

系 13.12. 任意の実数 α に対して次が成り立つ.
任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\alpha \leq \varepsilon$ ならば, $\alpha \leq 0$.

証明. 定理 13.11 で $a = 0$ とすればよい. □

系 13.13. 任意の実数 α に対して次が成り立つ.
任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\alpha < \varepsilon$ ならば, $\alpha \leq 0$.

証明. $\alpha < \varepsilon$ ならば $\alpha \leq \varepsilon$ だから. □

系 13.14. 集合として

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0 : x \leq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

である.

証明. 右辺が左辺に含まれることは明らか ($x \leq 0$ かつ $0 < \varepsilon$ ならば, $x \leq \varepsilon$.) 左辺が右辺に含まれるというのが系 13.12 の主張である. □

系 13.15 ([9, p.50])**.** 任意の実数 α に対して次が成り立つ.

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|\alpha| < \varepsilon$ ならば, $\alpha = 0$.
2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $|\alpha| \leq \varepsilon$ ならば, $\alpha = 0$.

証明. $|\alpha| \geq 0$ であり, $|\alpha| = 0$ ならば $\alpha = 0$ だから. □

演習 13.16. p, q を命題とする. 次の論理同値を真理表を書いて確かめよ.

1. $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$.

2. $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$.
3. $\neg(p \to q) \equiv p \wedge (\neg q)$.

演習 13.17. p, q を命題とする．$p \to \neg q$ の真理表を書いて，$\neg(p \to q)$ の真理表と比較せよ．

演習 13.18. 次の命題の否定命題を日本語で述べよ．

1. 写像 $f\colon X \to Y$ は単射である．
2. 写像 $f\colon X \to Y$ は全射である．
3. 任意の正の数 ε に対して，ある自然数 N が存在して，$n \geq N$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$|a_n - a| < \varepsilon$ となる．
4. 任意の正の数 ε に対して，ある自然数 N が存在して，$n \geq N$ ならば $|a_n - a| < \varepsilon$ となる．
5. 任意の正の数 ε に対して，ある正の数 δ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，$0 < |x - x_0| < \delta$ ならば $|f(x) - a| < \varepsilon$ となる．

14　最大数, 最小数

これ以降, 微積分の最初にやる実数の性質を題材に, これまでに学んできたことを実際に使ってみよう.

ちなみに, 2 年次前期の幾何学序論 [4],[8] で, ほとんど同じ内容を, （まったく同じことをやるのも芸が無いので）少し体裁を変えてもう一度やることになるであろう. 多分.

数の大小関係についてまとめておこう. $\mathbb{R}$ における数の大小関係 $(\leq)$ は次の 3 条件をみたす.

1. (反射律) $\forall a \in \mathbb{R} : a \leq a$
2. (反対称律) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \ \wedge \ b \leq a \to a = b$
3. (推移律) $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b \ \wedge \ b \leq c \to a \leq c$

一般にこの 3 つをみたす関係を<u>順序 (order)</u> といい, 順序の与えられた集合を<u>順序集合 (ordered set)</u> という.

さらに $\mathbb{R}$ における $\leq$ は次もみたす.

4. 任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対し $a \leq b$ か $b \leq a$ の少なくとも一方が必ず成立する.

4 をみたす順序を<u>全順序 (total order)</u> あるいは<u>線型順序 (linear order)</u> という. $\mathbb{R}$ は数の大小関係 $\leq$ により全順序集合である.

- $a \leq b$ かつ $a \neq b$ であるとき, $a < b$ と書く.
- $a \leq b$ であるとき $b \geq a$ と書く.

注意 14.1. [9, p.10] では, $a < b$ または $a = b$ のときに $a \leq b$ と書くと定義しているが, 一般に順序を扱う場合, $<$ を基本にするよりも, $\leq$ を基本にして考えた方が都合がよいので, 普通は上のように定める. なお, このように定めても, $a \leq b$ と「$a < b$ または $a = b$」とは同じことである.

$$
\begin{aligned}
a \leq b &\Leftrightarrow a \leq b \wedge (a \neq b \vee a = b) \\
&\Leftrightarrow (a \leq b \wedge a \neq b) \vee (a \leq b \wedge a = b) \\
&\Leftrightarrow a < b \vee a = b
\end{aligned}
$$

—注意おわり—

これまでも使ってきたが, $\mathbb{R}$ における区間についてまとめておく.

定義 14.2. 実数 a, b $(a < b)$ に対し

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

を a, b を端点とする閉区間 (closed interval) という．

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

を a, b を端点とする開区間 (open interval) という．

また

$$\begin{aligned}
(-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\
(-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} \\
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}
\end{aligned}$$

と定める．

定義 14.3 ([9, p.57])**.** $A \subset \mathbb{R}$ を部分集合とする．

1. $m \in \mathbb{R}$ が A の上界（じょうかい）(upper bound) である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x \in A$ に対し，$x \leq m$ が成り立つ．
   m が A の上界であるということを論理式で書けば次のようになる．
   $$\forall x \in A : x \leq m \quad (\text{あるいは} \quad \forall x : x \in A \to x \leq m).$$
2. $l \in \mathbb{R}$ が A の下界（かかい）(lower bound) である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $x \in A$ に対し，$l \leq x$ が成り立つ．
   l が A の下界であるということを論理式で書けば次のようになる．
   $$\forall x \in A : l \leq x.$$
3. A が上界をもつとき A は上に有界 (bounded from above) であるという．論理式で書けば
   $$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A : x \leq m.$$
4. A が下界をもつとき A は下に有界 (bounded from below) であるという．論理式で書けば
   $$\exists l \in \mathbb{R}, \forall x \in A : l \leq x.$$
5. 上に有界かつ下に有界であるとき有界 (bounded) であるという．
   A が有界であることを論理式で書けば
   $$\exists l \in \mathbb{R}, \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A : l \leq x \leq m.$$

警告 14.4. 上界, 下界とも 1 つだけというわけではない.

補題 14.5. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする. 開区間 (a, b) の上界全体を $U((a, b))$, 下界全体を $L((a, b))$ とする. すなわち

$$U((a,b)) := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \text{ は } (a,b) \text{ の上界}\right\}$$
$$L((a,b)) := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \text{ は } (a,b) \text{ の下界}\right\}$$

と定める. このとき, $U((a,b)) = [b, \infty)$, $L((a,b)) = (-\infty, a]$ である.

証明. $L((a,b)) \supset (-\infty, a]$ は明らか.

実際, $l \in (-\infty, a]$ とすると, $l \leq a$. 任意の $x \in (a,b)$ に対し, $a < x$ であるから, $l \leq x$. よって l は (a,b) の下界, すなわち, $l \in L((a,b))$.

$L((a,b)) \subset (-\infty, a]$ を示す. $l \in L((a,b))$, すなわち l は (a,b) の下界であるとする.

このとき, 任意の $x > a$ に対して $l \leq x$ が成り立つ.

実際, $x < b$ のときは, $x \in (a,b)$ であるから, 下界の定義より, $l \leq x$. $x \geq b$ のときは, $c = (a+b)/2$ とおくと, $c \in (a,b)$ だから, $l \leq c$ である. $c < b$ であるから, $l \leq c < b \leq x$ ゆえ $l \leq x$.

したがって, 定理 13.11 より, $l \leq a$, すなわち $l \in (-\infty, a]$.

よって $L((a,b)) = (-\infty, a]$.

$U((a,b)) = [b, \infty)$ も同様に示せる. □

定義 14.6 ([9, p.44])**.** $A \subset \mathbb{R}$ を部分集合とする.

1. $M \in \mathbb{R}$ が A の<u>最大数 (maximum number)</u> である
$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & M \in A \\ \text{(ii)} & M \text{ は } A \text{ の上界である.} \end{cases}$$
M が A の最大数であるということを論理式で書けば
$$(M \in A) \wedge (\forall x \in A : x \leq M).$$
$$\text{あるいは} \quad (M \in A) \wedge (\forall x : x \in A \to x \leq M).$$
このとき $M = \max_{x \in A} x = \max_A x = \max A$ 等と書く.
2. $m \in \mathbb{R}$ が A の<u>最小数 (minimum number)</u> である
$$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & m \in A \\ \text{(ii)} & m \text{ は } A \text{ の下界である.} \end{cases}$$
m が A の最小数であるということを論理式で書けば
$$(m \in A) \wedge (\forall x \in A : m \leq x).$$

このとき $m = \min_{x \in A} x = \min_{A} x = \min A$ 等と書く．

例 14.7. a, b を実数，$a < b$ とする．$\max[a,b] = b$，$\min[a,b] = a$ である．$\max(a,b)$，$\min(a,b)$ はともに存在しない．

証明．$\max[a,b] = b$，$\min[a,b] = a$ を示すのは演習問題．

$\min(a,b)$ が存在しないことを示そう．

任意の $m \in (a,b)$ に対し，ある $x \in (a,b)$ が存在して，$x < m$ が成り立つことを示せばよい．[*i]

$m \in (a,b)$ とする．このとき，$a < m < b$ である．$x = (a+m)/2$ とおけば，$a < x < m$ となる．とくに，$x < m$ である．また，$m < b$ なので，$a < x < b$，すなわち，$x \in (a,b)$．

なお，本質的には同じだが，背理法を使って示すこともできる．

最大数についても同様．

[*i] 「$\min(a,b)$ が存在する」を論理式で書けば，

$$
\begin{aligned}
&\exists m \in \mathbb{R} : m \in (a,b) \wedge (\forall x \in (a,b) : m \leq x) \\
\equiv\ &\exists m \in (a,b) : (\forall x \in (a,b) : m \leq x) \\
\equiv\ &\exists m \in (a,b), \forall x \in (a,b) : m \leq x.
\end{aligned}
$$

その否定は，$\forall m \in (a,b), \exists x \in (a,b) : x < m$.

ここで言っているのは以下のようなことである．

「m が (a,b) の最小数である」とは，定義より，「$m \in (a,b)$ かつ，m は (a,b) の下界である」ということである．

よって，「(a,b) に最小数が存在しない」ということを示すには，そのような m が無いことを言えばよい．すなわち，「$m \in (a,b)$ ならば，m は (a,b) の下界ではない」ということを示せばよい．

もちろん，「m が (a,b) の下界ならば，$m \notin (a,b)$」ということを示してもよい．下記（参考）参照．

□

参考． $\min(a,b)$ が存在しないことは，補題 14.5 を使って次のように示すこともできる．

$L((a,b))$ で (a,b) の下界全体を表す．$\min(a,b)$ が存在しないことを示すには，任意の $m \in L((a,b))$ に対し，$m \notin (a,b)$ であることを示せばよい [*i] が，補題 14.5 より，$L((a,b)) = (-\infty, a]$ なので，これは明らか．

[*i] 「$\min(a,b)$ が存在する」を論理式で書けば，

$$
\begin{aligned}
&\exists m \in \mathbb{R} : m \in (a,b) \wedge m \in L((a,b)) \\
\equiv\ &\exists m \in \mathbb{R} : m \in L((a,b)) \wedge m \in (a,b) \\
\equiv\ &\exists m \in L((a,b)) : m \in (a,b).
\end{aligned}
$$

その否定は，$\forall m \in L((a,b)) : m \notin (a,b)$.

□

定理 14.8 ([9, pp.49–50])**.** $A \subset \mathbb{R}$ の最大数 (最小数) は存在すれば一意的である.

証明. 実際, M_1, M_2 をともに A の最大数とすると定義より次が成り立つ.

(i1) $M_1 \in A$

(ii1) $\forall a \in A : a \leq M_1$

(i2) $M_2 \in A$

(ii2) $\forall a \in A : a \leq M_2$

(i1) と (ii2) より $M_1 \leq M_2$. 同様に $M_2 \leq M_1$. よって順序の性質より $M_1 = M_2$. 最小数についても同様. □

演習 14.9. $A \subset \mathbb{R}$ を部分集合, $l, m, M \in \mathbb{R}$ とする.

1. m が A の上界ではないことを論理式を使って書け.
2. l が A の下界ではないことを論理式を使って書け.
3. M が A の最大数ではないことを論理式を使って書け.
4. A に最大数が存在することを論理式を使って書け. (できればコロンが 1 つだけの式にせよ.)
5. A に最大数が存在しないことを論理式を使って書け. (できればコロンが 1 つだけの式にせよ.)
6. 5 の論理式を日本語にせよ.

演習 14.10. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする.

1. $\max[a, b] = b, \ \min[a, b] = a$ を示せ.
2. $\max(a, b)$ は存在しないことを示せ.

演習 14.11. $A \subset \mathbb{R}$ を空でない有限部分集合とする. このとき, $\max A$, $\min A$ が存在することを, A の元の個数に関する帰納法を用いて示せ.

演習 14.12. $A \subset \mathbb{R}$ とする. A が有界であるための必要十分条件は $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A : |x| \leq M$.

15 上限, 下限

前節で見たように, $\mathbb{R}$ における開区間 (a,b) には最大数も最小数も存在しない. しかし, b は, 開区間 (a,b) の大きい方の端で, a は小さい方の端であり, 最大数や最小数のかわりに使えそうである. 最大数や最小数が存在しない場合にも, そのかわりに使えるものとして上限, 下限を定義しよう.

定義 15.1 ([9, p.57]). $A \subset \mathbb{R}$ とする.

1. A の上界全体の集合に最小数が存在するとき, それを A の<u>上限（じょうげん）(supremum)</u> とよび
$$\sup_{a\in A} a \text{ または } \sup A$$
で表す. すなわち A の上界全体を
$$U(A) := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \text{ は } A \text{ の上界}\right\}$$
とおくと, $\sup A = \min U(A)$.
2. A の下界全体の集合に最大数が存在するとき, それを A の<u>下限（かげん）(infimum)</u> とよび
$$\inf_{a\in A} a \text{ または } \inf A$$
で表す. すなわち A の下界全体を
$$L(A) := \left\{x \in X \;\middle|\; x \text{ は } A \text{ の下界}\right\}$$
とおくと, $\inf A = \max L(A)$.

最大数や最小数が存在しない場合に, そのかわりに使えるものを考えようとして上限, 下限を導入したわけだが, 定義によれば, 上限や下限はある集合の最小数や最大数である. 一般には最大数や最小数は存在しない. では上限や下限は存在するのであろうか？

定理 15.2 (実数の連続性, [9, p.58]). $\mathbb{R}$ において次が成り立つ.

1. 上に有界な空でない部分集合には, 上限が存在する.
2. 下に有界な空でない部分集合には, 下限が存在する.

注意 15.3. この定理を証明しようとすると, 何を前提として実数を扱うのか, ということを考える必要が出てくる.

現代の数学では普通, 実数のみたすべき性質（四則演算ができる, 数の大小関係がある, 数直線がつながっている）を公理（証明なしに正しいと了解する概念）として仮定し, そ

の公理のもとで議論をすすめるという立場をとる．この実数の性質のうち,「数直線がつながっている」という性質を表す条件として同値なものがいろいろとあるが, この定理はそのうちのひとつである．そこで, この講義ではこの定理は無条件に認めることとする．

なお, 現代の数学において標準的であると思われる立場では, 集合に関するもっと基本的な公理を前提として, $\mathbb{N}$ を構成し, $\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ を構成し, $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ を構成し, $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ を構成し, そうやって作った $\mathbb{R}$ がこの定理をみたす,（実数の公理をみたすようなものが少なくともひとつは存在する）という風に考える．例えば [7], [1] 等を参照せよ．また関連する話題を 2 年次前期の幾何学序論でも取り扱う．

注意 15.4.

1. 空集合は有界であるが, 上限, 下限は存在しない．
   実際, $m \in \mathbb{R}$ が $A \subset \mathbb{R}$ の上界であるとは, $\forall a \in A : a \leq m$ が成り立つということであった．$A = \emptyset$ のとき, 系 12.9 でみたように, 任意の $m \in \mathbb{R}$ に対して, $\forall a \in \emptyset : a \leq m$ は真である．すなわち, 任意の $m \in \mathbb{R}$ に対して, m は $\emptyset$ の上界である．よって, $\emptyset$ は上に有界であり, $U(\emptyset) = \mathbb{R}$ である．同様にして $L(\emptyset) = \mathbb{R}$ がわかる．
   $\mathbb{R}$ には最大数も最小数も存在しないので, $\sup \emptyset$, $\inf \emptyset$ は存在しない．
2. $A \subset \mathbb{R}$ が上に有界でないときは, $\sup A$ は存在しない．
   実際, 上に有界でないということは, $U(A) = \emptyset$ だということである．空集合には最小数は存在しない（最小数の定義を確認せよ）．
3. $A \subset \mathbb{R}$ が下に有界でないときは, $\inf A$ は存在しない．

定理 15.5 ([9, pp.61–62])**.** 上限, 下限ともに存在すれば一意的である．

証明．与えられた集合に対して, その上界全体の集合は一意的に定まる．上限は, 上界全体の最小数である．定理 14.8 より, 最小数は一意的．□

定理 15.6 ([9, p.62])**.** $A \subset \mathbb{R}$ とする．

1. $\max A$ が存在すれば（A は上に有界であり, 空でなく）, $\sup A = \max A$.
2. $\min A$ が存在すれば（A は下に有界であり, 空でなく）, $\inf A = \min A$.

証明．$M = \max A$ とする．A の上界全体のなす集合を $U(A)$ とかく．

最大数の定義 (ii) より M は A の上界である,*i すなわち $M \in U(A)$.

また最大数の定義 (i) より $M \in A$.*ii 従って, A の任意の上界 $m \in U(A)$ に対し $M \leq m$, すなわち M は $U(A)$ の下界である．

よって $M = \min U(A)$, すなわち A の上限である．

下限も同様．

---

*i よって A は上に有界.
*ii よって $A \neq \emptyset$.

□

例 15.7. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする. $\sup(a, b) = b$, $\inf(a, b) = a$ である.

証明. 補題 14.5 でみたように, $U((a, b)) = [b, \infty)$, $L((a, b)) = (-\infty, a]$ である. よって,

$$\sup(a, b) = \min U((a, b)) = \min[b, \infty) = b$$
$$\inf(a, b) = \max L((a, b)) = \max(-\infty, a] = a.$$

□

定理 15.8 ([9, p.58])**.** $A \subset \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ とする. このとき次が成り立つ.

1. $$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A : x \leq s \\ \text{(ii)} & \forall r < s, \exists x \in A : r < x \end{cases}$$

2. $$s = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A : x \geq s \\ \text{(ii)} & \forall r > s, \exists x \in A : r > x \end{cases}$$

証明. A の上界全体のなす集合を $U(A)$ とかく.

条件 (i) は s が A の上界である, つまり $s \in U(A)$ といっている.

一方条件 (ii) は「$r < s$ ならば, r は A の上界ではない」といっている. 対偶を考えると,「r が A の上界ならば, $s \leq r$」, いいかえれば「s は $U(A)$ の下界である」ということ. *i

すなわち (i),(ii) は s が $U(A)$ の最小元, すなわち $\sup A$ であることをいっている.

---

*i 条件 (ii) を形式的に変形すれば

$$\begin{aligned} & \forall r < s, \exists x \in A : r < x \\ \equiv \quad & \forall r \in \mathbb{R} : (r < s) \to (\exists x \in A : r < x) \\ \equiv \quad & \forall r \in \mathbb{R} : \neg(\exists x \in A : r < x) \to r \not< s \\ \equiv \quad & \forall r \in \mathbb{R} : (\forall x \in A : r \not< x) \to r \not< s \end{aligned}$$

つまり (ii) は

$$\begin{aligned} & \forall r \in \mathbb{R} : (\forall x \in A : x \leq r) \to s \leq r \\ \equiv \quad & \forall r \in \mathbb{R} : r \in U(A) \to s \leq r \\ \equiv \quad & \forall r \in U(A) : s \leq r \end{aligned}$$

となる. 日本語にすれば, 「s は $U(A)$ の下界である」となる.

注意. 演習問題に出したが, 「r は A の上界ではない」を論理式で書くと $\exists x \in A : r < x$ である.

下限の方は演習問題. □

系 15.9. $A \subset \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ とする. 次が成り立つ.

1. $$s = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A : x \leq s \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : s - \varepsilon < x \end{cases}$$

2. $$s = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \forall x \in A : x \geq s \\ \text{(ii)} & \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : s + \varepsilon > x \end{cases}$$

例 15.10. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする. $\sup(a, b) = b$ であることを定理 15.8 を使って示してみよう.

証明. 任意の $x \in (a, b)$ に対し, $a < x < b$, 特に $x \leq b$ であるから, b は定理 15.8 の条件 (i) をみたす.

条件 (ii) を調べよう. $r < b$ とする. $x = \max\{(a + b)/2, (r + b)/2\}$ とおくと, $x \geq (r + b)/2 > r$ ゆえ $x > r$. また, $x \geq (a + b)/2 > a$ ゆえ $x > a$. さらに, $(a + b)/2, (r + b)/2 < b$ であるから $x < b$. まとめると, $x \in (a, b)$ かつ $r < x$. よって条件 (ii) も成り立っている. 従って $b = \sup(a, b)$.

後半は, 補題 14.5 の証明と同様に場合分けしてもよい. すなわち, $r \leq a$ のときは, $x = (a + b)/2$ とおく. $a < r$ のときは, $x = (r + b)/2$ とおく.

$\inf(a, b) = a$ も同様に示せる. □

注意 15.11. 上の証明の後半で示したいことは, r が b より少しでも小さければ, r は (a, b) の上界ではないということである. あまり小さい r を考えても意味がないので（演習問題参照）, 実際は, $r > a$ の場合だけ考えれば十分である.

定理 15.2 から導かれる $\mathbb{R}$ の重要な性質をひとつ挙げる.

定理 15.12 (アルキメデス (Archimedes) の公理 [9, p.65])**.** $\mathbb{R}$ において次が成り立つ.

1. $\mathbb{N}$ は上に有界ではない.
2. $\forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : na > b$.
3. $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$.

さらに, これらは同値である.

証明. $\mathbb{N}$ が上に有界ではないことを背理法で示す.

$\mathbb{N}$ が上に有界であると仮定する. 定理 15.2 より, $\mathbb{N}$ には上限が存在する. $s = \sup \mathbb{N}$ とおく. 系 15.9 より, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $s-1<n$ となる. このとき $s<n+1$ となるが, $n+1 \in \mathbb{N}$ であるから, s が $\mathbb{N}$ の上界であることに反する. よって $\mathbb{N}$ は上に有界ではない.

本質的に同じことだが, 背理法を用いず示すこともできる. [*i]

次に, 1,2,3 が同値であることを示そう.

$\mathbb{N}$ が上に有界でないことを論理式で書くと, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$ であることに注意する.

1 から 2.) $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ とする. 仮定より, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $n > b/a$ となる. $a > 0$ だから, 両辺に a をかけると, $na > b$.

2 から 3.) $\varepsilon > 0$ とする. 仮定より, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $n\varepsilon > 1$ となる. $n > 0$ だから, 両辺を n で割ると, $\varepsilon > 1/n$.

3 から 1.) $x > 0$ とする. [*ii] $1/x > 0$ であるから, 仮定より, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $1/x > 1/n$ となる. $nx > 0$ だから, 両辺に nx をかけると, $n > x$.

[*i] $\mathbb{N} \neq \emptyset$ だから, 定理 15.2（の対偶）より, $\mathbb{N}$ に上限が存在しないことを示せばよい. 定理 15.8 より, $\mathbb{N}$ に上限が存在しないことを論理式で書けば,

$$
\begin{aligned}
&\neg\Big(\exists s \in \mathbb{R} : (\forall N \in \mathbb{N} : N \leq s) \wedge (\forall r < s, \exists n \in \mathbb{N} : r < n)\Big) \\
\equiv\ & \forall s \in \mathbb{R} : \neg(\forall N \in \mathbb{N} : N \leq s) \vee \neg(\forall r < s, \exists n \in \mathbb{N} : r < n) \\
\equiv\ & \forall s \in \mathbb{R} : (\forall r < s, \exists n \in \mathbb{N} : r < n) \to \neg(\forall N \in \mathbb{N} : N \leq s) \\
\equiv\ & \forall s \in \mathbb{R} : (\forall r < s, \exists n \in \mathbb{N} : r < n) \to (\exists N \in \mathbb{N} : N \not\leq s),
\end{aligned}
$$

すなわち,

$$\forall s \in \mathbb{R} : (\forall r < s, \exists n \in \mathbb{N} : r < n) \to (\exists N \in \mathbb{N} : N > s)$$

あるいは

$$\forall s \in \mathbb{R} : (\forall N \in \mathbb{N} : N \leq s) \to (\exists r < s, \forall n \in \mathbb{N} : r \geq n)$$

を示せばよい. あとは上の証明と同様.

ここで言っているのは以下のようなことである.

「s が $\mathbb{N}$ の上限である」とは, 「s は $\mathbb{N}$ の上界かつ, s より小さい数は $\mathbb{N}$ の上界ではない」ということである.

よって, $\mathbb{N}$ に上限が存在しないということを示すには, そのような s が無いことを言えばよい. すなわち, 「s より小さければ上界ではない, ならば, s は上界ではない」あるいは, 「s が上界ならば, s より小さい上界がある」ことを示せばよい.

[*ii] どんな x をもってきても, それより大きい自然数がとれるということを言いたいので, 大きい x に対して考えればよい.

□

注意 15.13. 公理と名前がついているように, これを公理として話をすすめることも出来

る．しかし, 我々の立場では, これは定理（証明出来る命題）である．これを公理として用いない場合でも, 歴史的経緯から, 「アルキメデスの公理」とよぶことが多い.

例 15.14. $E = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ とする．このとき, $\max E = \sup E = 1$, $\inf E = 0$ であり, $\min E$ は存在しない.

証明.
- $\max E = 1$ であること.
  (i) $1 \in \mathbb{N}$ だから, $1 = 1/1 \in E$.
  (ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $n \geq 1$ であるから, $1/n \leq 1$.
  よって $\max E = 1$.
- $\max E = 1$ だから, $\sup E = 1$（定理 15.6）.
- $\inf E = 0$ であること.
  定理 15.8（あるいは系 15.9）を使おう.
  (i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $n > 0$ であるから, $1/n > 0$.
  (ii) アルキメデスの公理より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $\varepsilon > 1/n$.
  よって, $\inf E = 0$.
- $\inf E = 0 \notin E$ だから, 定理 15.6 より, $\min E$ は存在しない.[*i]
  あるいは, 直接,
  任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $1/n > 1/(n+1) \in E$. ゆえ [*ii], $\min E$ は存在しない.

[*i] $\min E$ が存在すれば, $\inf E = \min E \in E$.
[*ii] $\min E$ が存在しないということを論理式で書けば, $\forall m \in E, \exists x \in E : m > x$.

□

警告 15.15. 上の例において, $E \subset (0, 1]$ ではあるが, $E = (0, 1]$ **ではない**. 前期演習 6.10 参照のこと.

演習 15.16. 定理 15.8 の下限の方を示せ.

演習 15.17. $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ で, B は有界であるとする.

1. A も有界であることを示せ.
2. $\sup A \leq \sup B$ であることを示せ.
3. $\inf A \geq \inf B$ であることを示せ.

演習 15.18. $A \subset \mathbb{R}$ とする.

1. $r \in \mathbb{R}$ が A の上界ではないとする．このとき, 任意の $x \leq r$ に対し, x は A の上界ではないことを示せ.
2. $m \in \mathbb{R}$ が A の上界であるとする．このとき, 任意の $x \geq m$ に対し, x は A の上界であることを示せ.

演習 15.19. $E = \left\{ (-1)^n \dfrac{n}{2n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ とする．$\max E$, $\sup E$, $\min E$, $\inf E$ を求めよ.

16　数列の収束

定義 16.1 ([9, p.93])**.** 自然数全体 $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への写像

$$a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

を<u>数列</u>, あるいは実数の列であることをはっきりさせたい場合, <u>実数列</u>という.

普通 $a(n)$ を a_n と書いて, 数列を $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とか $\{a_n\}$ と表す.

定義 16.2 ([9, pp.94–95])**.** 数列 $\{a_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に<u>収束</u>する

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.

論理式で書けば [*i],

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n(n \geq N) : |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

あるいは

$$a_n \to \alpha \quad (n \to \infty)$$

と書く.

α を数列 $\{a_n\}$ の<u>極限値</u>という.

数列 $\{a_n\}$ がある $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとき<u>収束列</u>という. 収束列でないときその数列は<u>発散</u>するという.

[*i] これは次のように書ける.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \to |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

日本語にすれば,

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.

何度もふれているように, このような日本語の命題を論理式で書いたり, 否定を作ったりする際は注意が必要である.

注意 16.3. 数列の極限をこのように扱う方法を ε-N 論法という.

例 16.4. 「数列 $\{a_n\}$ が発散する」ことを ε-N 論法で表してみよう.

「数列 $\{a_n\}$ が発散する」とは, 定義により, 「数列 $\{a_n\}$ は収束列ではない」ということである. 「数列 $\{a_n\}$ が収束列である」ことを論理式で書けば,

$$\exists\alpha \in \mathbb{R}, \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n(n \geq N) : |a_n - \alpha| < \varepsilon.$$

その否定は,

$$\forall\alpha\in\mathbb{R},\exists\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N},\exists n(n\geq N):|a_n-\alpha|\geq\varepsilon.$$

日本語にすると,

> 任意の実数 α に対し, ある正の数 ε が存在して, 任意の自然数 N に対し, N 以上のある自然数 n が存在して, $|a_n-\alpha|\geq\varepsilon$ が成り立つ

となる.

この文章の意味をよく考えよ. (演習 16.17, 16.18 参照)

定義 16.5 ([9, p.95]). 1. 数列 $\{a_n\}$ が<u>正の無限大に発散する</u>

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $K\in\mathbb{R}$ に対し, ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して, $n\geq N$ ならば $a_n>K$ となる.

論理式で書けば,

$$\forall K\in\mathbb{R},\exists N\in\mathbb{N},\forall n(n\geq N):a_n>K.$$

このとき, $\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$ と書く.

2. 数列 $\{a_n\}$ が<u>負の無限大に発散する</u>

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $K\in\mathbb{R}$ に対し, ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して, $n\geq N$ ならば $a_n<K$ となる.

論理式で書けば,

$$\forall K\in\mathbb{R},\exists N\in\mathbb{N},\forall n(n\geq N):a_n<K.$$

このとき, $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$ と書く.

注意 16.6. 「数列が発散する」ことと, 「数列が正（または負）の無限大に発散する」ということを定義したが, どちらにも「発散する」という言葉を使っている. 無限大に発散する数列は発散するのか？ということが気になるかもしれないが, 実際にそうであることがわかる. (演習 16.18)

数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとき, $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ と書いたが, 極限値 α は, 数列 $\{a_n\}$ に対して一意に定まるのであろうか？そうでなければ, この記法は問題があることになってしまうが, 次に示すように, そのような心配はない.

定理 16.7 ([9, p.108]). 数列 $\{a_n\}$ の極限値は, 存在すれば, 唯一つである.

証明. $\alpha\in\mathbb{R}$ を $\{a_n\}$ の極限値であるとする. $\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq\beta$ とする. β は $\{a_n\}$ の極限値ではない [*i] ことを示そう.

$\varepsilon=|\alpha-\beta|/2$ とおくと $\varepsilon>0$.

$x\in\mathbb{R}$ が $|x-\alpha|<\varepsilon$ をみたすとする. このとき,

$$|\alpha-\beta|=|\alpha-x+x-\beta|\leq|\alpha-x|+|x-\beta|<\varepsilon+|x-\beta|$$

に注意すれば,

$$|x-\beta| > |\alpha-\beta| - \varepsilon = \varepsilon$$

となる.

今 $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ であるから,（この ε に対し,）ある自然数 N_1 が存在して, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となる. 従って, $n \geq N_1$ ならば $|a_n - \beta| > \varepsilon$ となり, β は $\{a_n\}$ の極限値ではない [*ii] .

[*i] すなわち

$$\exists\varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n(n \geq N) : |a_n - \beta| \geq \varepsilon$$

[*ii] 任意の自然数 N に対し, $n := \max\{N, N_1\}$ とおけば, $n \geq N$ であり, また $n \geq N_1$ であるから, $|a_n - \beta| \geq \varepsilon$ である.

□

例 16.8.

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
2. $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

証明.

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, アルキメデスの公理（定理 15.12）より, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $1/N < \varepsilon$ となる. $n \geq N$ であるような任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $1/n \leq 1/N$ だから,
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$
となり, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
2. 任意の $K \in \mathbb{R}$ に対し, アルキメデスの公理（定理 15.12）より $\mathbb{N}$ は上に有界でないので, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $N > K$ となる. $n \geq N$ ならば $n > K$ であるから, $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

□

四則演算と極限値の間には次の関係がある.

定理 16.9 ([9, p.110])**.** 二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束列ならば $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$ も収束列で

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$.
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$.

   とくに $k \in \mathbb{R}$ とすると, $\{ka_n\}$ も収束列であり,

   $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$.

さらに $b_n \neq 0$ $(n=1,2,\dots)$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ ならば $\{a_n/b_n\}$ も収束列で

3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

証明. $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とおく.

1. $\varepsilon > 0$ とする.
   $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるから, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_1$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.
   同様に, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるから, ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_2$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ.
   $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおく. このとき, $n \geq N$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $n \geq N_1$ かつ $n \geq N_2$ であるから,
   $$\begin{aligned} |(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| &= |(a_n - \alpha) \pm (b_n - \beta)| \\ &\leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$
   よって, $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$.
2. $\varepsilon > 0$ とする.
   $$\varepsilon' := \min\left\{\frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}, 1\right\}$$
   とおくと, $\varepsilon' > 0$ である. *i $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるから, この ε' に対して, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_1$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|a_n - \alpha| < \varepsilon'$ が成り立つ.
   同様に, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるから, ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_2$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|b_n - \beta| < \varepsilon'$ が成り立つ.
   $N = \max\{N_1, N_2\}$ とおく. このとき, $n \geq N$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$n \geq N_1$ かつ $n \geq N_2$ であるから,

$$
\begin{aligned}
&|a_nb_n - \alpha\beta| \\
&= |(a_n - \alpha + \alpha)(b_n - \beta + \beta) - \alpha\beta| \\
&= |(a_n - \alpha)(b_n - \beta) + \alpha(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \\
&\leq |a_n - \alpha||b_n - \beta| + |\alpha||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \\
&< \varepsilon' \cdot \varepsilon' + |\alpha|\varepsilon' + |\beta|\varepsilon' \\
&\leq 1 \cdot \varepsilon' + |\alpha|\varepsilon' + |\beta|\varepsilon' \\
&= (1 + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon' \\
&\leq (1 + |\alpha| + |\beta|) \cdot \frac{\varepsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

よって, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = \alpha\beta$.
$b_n = k$ という数列を考えれば, 後半がわかる.

---

*i 示したいことは, 気持ちとしては, $|a_n - \alpha|$, $|b_n - \beta|$ が小さければ, $|a_nb_n - \alpha\beta|$ も小さいということである. そこで, $a_nb_n - \alpha\beta$ を, $a_n - \alpha$ と $b_n - \beta$ を使って表すことを考えて,

$$a_nb_n - \alpha\beta = (a_n - \alpha)(b_n - \beta) + \alpha(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)$$

と式変形する. すると, $|a_n - \alpha|$, $|b_n - \beta|$ が例えば ε' より小さければ, $|a_nb_n - \alpha\beta|$ は $(\varepsilon' + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon'$ よりも小さくなる. これが ε より小さくなるように ε' を決めている.

参考に, 教科書とはちょっと違う評価をしてみよう. (教科書の方がスマートではあるが.) $\varepsilon > 0$ とする.

$$\varepsilon' := \min\left\{\frac{\varepsilon}{1 + |\alpha|}, \frac{\varepsilon}{1 + |\beta|}, 1\right\}$$

とおくと, $\varepsilon' > 0$ である. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるから, この ε' に対して, ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_1$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon'}{2}$ が成り立つ.

同様に, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるから, ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N_2$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|b_n - \beta| < \frac{\varepsilon'}{2}$ が成り立つ.

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とおく. このとき, $n \geq N$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $n \geq N_1$ かつ $n \geq N_2$ であるから,

$$
\begin{aligned}
&|a_nb_n - \alpha\beta| \\
&= |a_nb_n - a_n\beta + a_n\beta - \alpha\beta| \\
&\leq |a_nb_n - a_n\beta| + |a_n\beta - \alpha\beta| \\
&= |a_n||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \\
&= |a_n - \alpha + \alpha||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \\
&\leq (|a_n - \alpha| + |\alpha|)|b_n - \beta| + |a_n - \alpha|(1 + |\beta|) \\
&\leq (1 + |\alpha|)|b_n - \beta| + |a_n - \alpha|(1 + |\beta|) \qquad (|a_n - \alpha| < \varepsilon'/2 \leq 1 \text{ だから.}) \\
&< (1 + |\alpha|)\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2}(1 + |\beta|) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

商については省略. □

次に順序と極限値の関係.

定理 16.10. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を収束列, $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ とする. $\{c_n\}$ を数列とする.

1. ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n \leq b_n$ であるとする. このとき, $\alpha \leq \beta$ である.
2. (はさみうち) $\alpha = \beta$ とする. さらに, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n \leq c_n \leq b_n$ であるとする. このとき, $\{c_n\}$ も収束して $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ である.

証明. 1. 対偶, すなわち『$\alpha > \beta$ ならば, 任意の自然数 N に対し, ある自然数 $n \geq N$ が存在して, $a_n > b_n$ となる』[*i] ことを示そう.
$\alpha > \beta$ とする. $\varepsilon = \alpha - \beta$ とおけば $\varepsilon > 0$. 定理 16.9.1 より [*ii] 数列 $\{a_n - b_n\}$ は収束列で $\alpha - \beta$ に収束するので, ある自然数 N_0 が存在して, 任意の $m \geq N_0$ に対し

$$|(a_m - b_m) - (\alpha - \beta)| < \varepsilon,$$

すなわち,

$$-\varepsilon < a_m - b_m - (\alpha - \beta) < \varepsilon$$

が成り立つ. $\varepsilon = \alpha - \beta$ であったから, 特に, 任意の $m \geq N_0$ に対し

$$a_m - b_m > \alpha - \beta - \varepsilon = 0$$

が成り立つ [*iii].
任意の自然数 N に対し, $n := \max\{N, N_0\}$ とおけば, $n \geq N$ である. また, $n \geq N_0$ だから, $a_n > b_n$ である [*iv].

やることはほとんど同じだが, 系 13.12 を使って次のように示すことも出来る.
ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $a_n \leq b_n$ であるとする. このとき, $\alpha \leq \beta$, すなわち $\alpha - \beta \leq 0$ を示そう.
系 13.12 より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\alpha - \beta \leq \varepsilon$ であることを示せばよい.
$\varepsilon > 0$ とする. 定理 16.9.1 より数列 $\{a_n - b_n\}$ は収束列で $\alpha - \beta$ に収束するので, ある自然数 N_0 が存在して, 任意の $m \geq N_0$ に対し

$$|(a_m - b_m) - (\alpha - \beta)| < \varepsilon,$$

すなわち,

$$-\varepsilon < a_m - b_m - (\alpha - \beta) < \varepsilon$$

が成り立つ．特に，任意の $m \geq N_0$ に対し

$$\alpha - \beta < a_m - b_m + \varepsilon$$

が成り立つ．$n := \max\{N, N_0\}$ とおけば，$n \geq N$ だから，$a_n - b_n \leq 0$ である．また，$n \geq N_0$ だから，$\alpha - \beta < a_n - b_n + \varepsilon$．よって，

$$\alpha - \beta < a_n - b_n + \varepsilon \leq 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

なお，背理法で示すことも出来る．

---

*i

$$(\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \to a_n \leq b_n) \to \alpha \leq \beta$$

の対偶は

$$\alpha \not\leq \beta \to (\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \land a_n \not\leq b_n)$$

つまり

$$\alpha > \beta \to (\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \land a_n > b_n).$$

*ii $\varepsilon = \frac{\alpha-\beta}{2}$ とおけば，定理 16.9.1 を使わず示せる．

*iii

$$\alpha > \beta \to (\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m(m \geq N_0) : a_m > b_m)$$

が成り立つということが示せた．対偶を考えれば，

$$(\forall N_0 \in \mathbb{N}, \exists m(m \geq N_0) : a_m \leq b_m) \to \alpha \leq \beta$$

が成り立つということが示せた．

*iv この議論で，

$$(\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall m(m \geq N_0) : a_m > b_m) \to (\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} : n \geq N \land a_n > b_n)$$

が成り立つということがわかる．なれれば明らかなことだから，このような議論は省略することが多い．

---

2. $\varepsilon > 0$ とする．

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であるから，ある $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_1$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$，とくに $-\varepsilon < a_n - \alpha$ が成り立つ．

同様に，$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ であるから，ある $N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して，$n \geq N_2$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$|b_n - \alpha| < \varepsilon$，とくに $b_n - \alpha < \varepsilon$ が成り立つ．

$N_0 = \max\{N, N_1, N_2\}$ とおく．このとき，$n \geq N_0$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$n \geq N$ かつ $n \geq N_1$ かつ $n \geq N_2$ であるから，

$$-\varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ n \geq N_1}}{<} a_n - \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ n \geq N}}{\leq} c_n - \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ n \geq N}}{\leq} b_n - \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ n \geq N_2}}{<} \varepsilon,$$

が成り立ち，$|c_n - \alpha| < \varepsilon$ である．

□

警告 16.11. 定理 16.10.2 では, 数列 $\{c_n\}$ が**収束することを仮定していない**ことに注意. 数列 $\{c_n\}$ が収束することがわかっていれば, 定理 16.10.1 を, $a_n \leq c_n$ と $c_n \leq b_n$ に 2 回適用すればよいが, ここでは, $\{c_n\}$ が収束することも示す必要がある.

一般に, ある数列が収束するかどうかを判定することは難しいが, ある特別な種類の数列については収束が保証されている.

定義 16.12 ([9, p.121]). 1. 数列 $\{a_n\}$ が上に有界
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界.
2. 数列 $\{a_n\}$ が下に有界
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が下に有界.
3. 数列 $\{a_n\}$ が有界
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が有界.
4. 集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上限のことを, 数列 $\{a_n\}$ の上限といって, $\sup a_n$ 等とかく.
5. 集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の下限のことを, 数列 $\{a_n\}$ の下限といって, $\inf a_n$ 等とかく.

定義 16.13. 数列 $\{a_n\}$ は,

1. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \leq a_{n+1}$ となっているとき単調増加列とよばれる.
2. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n < a_{n+1}$ となっているとき狭義単調増加列とよばれる.
3. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \geq a_{n+1}$ となっているとき単調減少列とよばれる.
4. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n > a_{n+1}$ となっているとき狭義単調減少列とよばれる.
5. これらをまとめて単調列という.

注意 . 当然のことながら, 狭義単調増加（減少）列は単調増加（減少）列である.

定理 16.14. $\{a_n\}$ を単調増加列とする. $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\sup a_n$ のいずれかが存在すれば他方も存在してそれらは等しい.

単調減少列の極限値と下限についても同様.

証明. $\{a_n\}$ が収束列でその極限値が α であるとき, $\alpha = \sup a_n$ であることを示す.

$N \in \mathbb{N}$ とする. 数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_N$ で定めると明らかに $\lim_{n\to\infty} b_n = a_N$ である. $\{a_n\}$ は単調増加列であるから, $n \geq N$ ならば $a_n \geq a_N = b_n$. よって定理 16.10.1 より $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \geq \lim_{n\to\infty} b_n = a_N$. 従って任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $\alpha \geq a_N$, すなわち α は $\{a_n\}$ の上界である.

b を $\{a_n\}$ の上界とする. このとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $a_n \leq b$ である. よって先と同様に定理 16.10.1 より $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \leq b$.

よって α は $\{a_n\}$ の上界の最小値, すなわち $\alpha = \sup a_n$ である.

逆に $\sup a_n$ が存在するとしてそれを α とする．

任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 N が存在して $a_N > \alpha - \varepsilon$ となる（系 15.9）．$\{a_n\}$ は単調増加であるから $n \geq N$ ならば $a_n \geq a_N$.

また，α は $\{a_n\}$ の上界であるから任意の $n \in \mathbb{N}$ について $\alpha \geq a_n$ である．

以上をあわせると，$n \geq N$ ならば $\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha$，特に $|a_n - \alpha| < \varepsilon$. 従って数列 $\{a_n\}$ は a に収束する． □

系 16.15.
1. 上に有界な単調増加数列は，その上限に収束する．
2. 下に有界な単調減少数列は，その下限に収束する．

最後に，後で使うことになるであろう次の定理を証明しておく．

定理 16.16. $A \subset \mathbb{R}$ を上に有界な部分集合とする．このとき，A の元からなる数列 $\{a_n\}$（つまり，$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in A$）で，$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$ となるものが存在する．

証明. $n \in \mathbb{N}$ とすると，$1/n > 0$ であるから，系 15.9 より，A の元 x で，$\sup A - \frac{1}{n} < x$ となるものが存在する．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，このような $x \in A$ を 1 つ選び，それを a_n とおく．このようにして作った数列 $\{a_n\}$ を考えると，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$a_n \in A$ かつ，

$$\sup A - \frac{1}{n} < a_n \leq \sup A$$

となる．$\lim_{n\to\infty} (\sup A - \frac{1}{n}) = \sup A$ であるから，はさみうちにより，$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$ がわかる． □

演習 16.17. 数列 $\{(-1)^n\}$ は発散することを示せ．

演習 16.18.
1. 数列 $\{a_n\}$ が正（または負）の無限大に発散するとき，この数列は発散することを示せ．
2. 数列 $\{a_n\}$ が正の無限大に発散するとき $\{a_n\}$ は（集合として）下に有界であり，上には有界でない．
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (-a_n) = +\infty$.

演習 16.19. 収束列は有界であることを示せ．

演習 16.20. 狭義単調増加数列 $\{a_n\}$（すなわち，$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$）が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束するとする．このとき，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$a_n < \alpha$ であることを示せ．

17 関数の極限

定義 17.1 ([9, p.141])**.** X を集合とする.

1. $f\colon X \to \mathbb{R}$ なる写像を, X を定義域とする(実数値)関数という.
2. $f\colon X \to \mathbb{R}$ を関数とする. 像 $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ を, f の値域という.

以下, 定義域が $\mathbb{R}$ の部分集合である場合を扱う. 多少一般的な設定をしているが, 実際に考えるのは区間（開区間, 閉区間, 半開区間）あるいは, そのいくつかの和集合の場合がほとんどである.

定義 17.2 ([9, p.142], [3, p.16])**.** $S(\neq \emptyset) \subset \mathbb{R}$ とする.
$a \in \mathbb{R}$ が S の集積点である
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists x \in S : 0 < |x - a| < \varepsilon.$

注意 17.3. $a \in \mathbb{R}$ が S の集積点であるというのは, a のいくらでも近くに a 以外に S の点があるということである.

$a \in S$ とは限らない. 例えば 0 は $(0, 1)$ の集積点である.

$S \subset \mathbb{R}$ が区間（の和集合）であるとき, S の集積点は, S の点か, 区間の端点のいずれかである.

定義 17.4 ([9, p.142])**.** $S(\neq \emptyset) \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ は S の集積点, $\alpha \in \mathbb{R}$ とし, $f\colon S \to \mathbb{R}$ を関数とする. このとき,
$f(x)$ は $x \to a$ としたとき α に収束する
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $0 < |x - a| < \delta$ をみたす任意の $x \in S$ に対して, $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ.

論理式で書けば,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in S(0 < |x - a| < \delta) : |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

このとき

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$$

あるいは

$$f(x) \to \alpha \quad (x \to a)$$

と書く.

α を, $x \to a$ としたときの関数 f の極限値という.

注意 17.5. 以下, $x \to a$ としたときの関数 f の極限値を考えるときは, a は f の定義域の集積点であるとする.

注意 17.6. 関数の極限をこのように扱う方法を ε-δ 論法という.

警告 17.7. $x \to a$ としたときの関数 f の極限値とは, x が a に近づくときの関数のふるまいを記述するもので, **$x = a$ での f の値には一切関係がない**. （関数 f は a で定義されていなくてもよい.） よって, 定義 17.4 の $0 < |x - a| < \delta$ の**「$0 <$」の部分は必要**である. 次の例を見よ.

例 17.8. 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

により定める. グラフを見ると分かるように, $x \to 0$ としたとき, $f(x)$ は 1 に近づく, すなわち

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

である. このことを定義にのっとって確かめてみよう.

$\varepsilon > 0$ とする. このとき, $\delta = 1$ とおけば [*i], $0 < |x - 0| < \delta$ をみたす任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $x \neq 0$ であるから $f(x) = 1$ なので, $|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$ である. よって,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}(0 < |x - 0| < \delta) : |f(x) - 1| < \varepsilon$$

すなわち

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

であることが示せた.

一方, この関数 f は, 次の条件

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}(|x - 0| < \delta) : |f(x) - 1| < \varepsilon$$

はみたさない [*ii]. 実際, $\varepsilon = 1$ とする [*iii]. このとき, 任意の $\delta > 0$ に対し, $|0 - 0| = 0 < \delta$ であるが, $|f(0) - 1| = |0 - 1| = 1 \geq \varepsilon$.

[*i] 正の数なら何でもよい.

[*ii] すなわち,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}(|x - 0| < \delta) : |f(x) - 1| \geq \varepsilon$$

が成り立つ.

[*iii] $0 < \varepsilon \leq 1$ であればなんでもよい.

例 17.9. 「$f(x)$ は $x \to a$ としたとき α に収束する」ことの否定命題を考えてみよう.

「$f(x)$ は $x \to a$ としたとき α に収束する」を論理式で書けば

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in S(0 < |x-a| < \delta) : |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

その否定は

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in S(0 < |x-a| < \delta) : |f(x) - \alpha| \not< \varepsilon$$

つまり

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in S : 0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x) - \alpha| \geq \varepsilon.$$

日本語にすると

「ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ に対して, ある $x \in S$ が存在して, $0 < |x-a| < \delta$ かつ $|f(x) - \alpha| \geq \varepsilon$ をみたす」

となる.[*i]

[*i] 気持ちは, a のいくらでも近くに, $f(x)$ が α から離れているような, $x \in S$ があるということ.

数列の極限の性質（定理 16.7, 16.9, 16.10）と同様なことが関数の極限についても成立する. 証明もほとんど同様である. 以下の証明を数列の場合と比較してみよ.

定理 17.10 (定理 16.7 の関数版)**.** $x \to a$ としたときの関数 f の極限値は, 存在すれば, 唯一つである.

証明. S を f の定義域とし, $\alpha \in \mathbb{R}$ を, $x \to a$ としたときの f の極限値であるとする. $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$ とする. β は極限値ではない [*i] ことを示そう.

$\varepsilon = |\alpha - \beta|/2$ とおくと $\varepsilon > 0$.

$y \in \mathbb{R}$ が $|y - \alpha| < \varepsilon$ をみたすとする. このとき,

$$|\alpha - \beta| = |\alpha - y + y - \beta| \leq |\alpha - y| + |y - \beta| < \varepsilon + |y - \beta|$$

に注意すれば,

$$|y - \beta| > |\alpha - \beta| - \varepsilon = \varepsilon$$

となる.

今 $\alpha = \lim_{x \to a} f(x)$ であるから, (この ε に対し,) ある $\delta_1 > 0$ が存在して, $0 < |x-a| < \delta_1$ ならば $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ となる. 従って, $0 < |x-a| < \delta_1$ ならば $|f(x) - \beta| > \varepsilon$ となる.[*ii]

任意の $\delta > 0$ に対し, $\min\{\delta, \delta_1\} > 0$ であるから, ある $x \in S$ で $0 < |x-a| < \min\{\delta, \delta_1\}$ をみたすものが存在する（a は S の集積点だから）.

この $x \in S$ を考えると，あきらかに $0 < |x-a| < \delta$ であり，また $0 < |x-a| < \delta_1$ であるから $|f(x)-\beta| \geq \varepsilon$ である．よって，β は極限値ではない．

[*i] すなわち

$$\exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x \in S : 0 < |x-a| < \delta \wedge |f(x)-\beta| \geq \varepsilon.$$

上の例 17.9 参照.

[*ii] 数列の場合と同じように，これで本質的に証明は終わりである．ここまでで，示したいことよりも強いことが言えている．

□

四則演算と極限値の間には次の関係がある．

定理 17.11 ([9, p.147], 定理 16.9 の関数版)**.** 二つの関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$, $g\colon S \to \mathbb{R}$ は，それぞれ $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ をみたすとする．（ただし，$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする．）このとき，$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$, $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))$, $\lim_{x\to a}(f(x)g(x))$ はいずれも存在し，次が成り立つ．

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \alpha+\beta$, $\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \alpha-\beta$.
2. $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \alpha\beta$.

   とくに $k \in \mathbb{R}$ とすると，$\lim_{x\to a} kf(x)$ も存在し，

   $\lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha$.

さらに $\forall x \in S : g(x) \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ ならば $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ も存在し，

3. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

証明.　1. $\varepsilon > 0$ とする．

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ であるから，ある $\delta_1 > 0$ が存在して，$0 < |x-a| < \delta_1$ をみたす任意の $x \in S$ に対し，$|f(x)-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ．

同様に，$\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ であるから，ある $\delta_2 > 0$ が存在して，$0 < |x-a| < \delta_2$ をみたす任意の $x \in S$ に対し，$|g(x)-\beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つ．

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおくと $\delta > 0$ であり，$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in S$ に

対し, $0 < |x-a| < \delta_1$ かつ $0 < |x-a| < \delta_2$ であるから,

$$\begin{aligned} |(f(x) \pm g(x)) - (\alpha \pm \beta)| &= |(f(x) - \alpha) \pm (g(x) - \beta)| \\ &\leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

よって, $\lim_{n\to\infty}(f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$.

2. $\varepsilon > 0$ とする.

$$\varepsilon' := \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+|\alpha|+|\beta|}, 1\right\}$$

とおくと, $\varepsilon' > 0$ である. $\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$ であるから, この ε' に対して, ある $\delta_1 > 0$ が存在して, $0 < |x-a| < \delta_1$ をみたす任意の $x \in S$ に対し, $|f(x) - \alpha| < \varepsilon'$ が成り立つ.

同様に, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ であるから, ある $\delta_2 > 0$ が存在して, $0 < |x-a| < \delta_2$ をみたす任意の $x \in S$ に対し, $|g(x) - \beta| < \varepsilon'$ が成り立つ.

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ とおく. このとき, $0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in S$ に対し, $0 < |x-a| < \delta_1$ かつ $0 < |x-a| < \delta_2$ であるから,

$$\begin{aligned} &|f(x)g(x) - \alpha\beta| \\ &= |(f(x) - \alpha)(g(x) - \beta) + \alpha(g(x) - \beta) + \beta(f(x) - \alpha)| \\ &\leq |f(x) - \alpha||g(x) - \beta| + |\alpha||g(x) - \beta| + |\beta||f(x) - \alpha| \\ &< 1 \cdot \varepsilon' + |\alpha|\varepsilon' + |\beta|\varepsilon' \\ &= (1 + |\alpha| + |\beta|)\varepsilon' \\ &\leq (1 + |\alpha| + |\beta|) \cdot \frac{\varepsilon}{1+|\alpha|+|\beta|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

よって, $\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \alpha\beta$.

$g(x) = k$ という関数を考えれば, 後半がわかる.

商については省略. □

次に順序と極限値の関係.

定理 17.12 (定理 16.10 の関数阪). $f\colon S \to \mathbb{R}$, $g\colon S \to \mathbb{R}$ を関数, $\alpha = \lim_{x\to a} f(x)$, $\beta = \lim_{x\to a} g(x)$ とする. (ただし, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする.) $h\colon S \to \mathbb{R}$ を関数とする.

1. ある $\delta_0 > 0$ が存在して, $0 < |x-a| < \delta_0$ ならば $f(x) \leq g(x)$ であるとする. このとき, $\alpha \leq \beta$ である.

2. （はさみうち）$\alpha = \beta$ とする．さらに，ある $\delta_0 > 0$ が存在して，$0 < |x-a| < \delta_0$ ならば $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ であるとする．このとき，$\lim_{x \to a} h(x)$ も存在し，$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$ である．

証明． 1. 対偶，すなわち『$\alpha > \beta$ ならば，任意の $\delta > 0$ に対し，$0 < |x-a| < \delta$ をみたすある $x \in S$ が存在して，$f(x) > g(x)$ となる』ことを示そう．

$\alpha > \beta$ とする．$\varepsilon = \alpha - \beta$ とおけば $\varepsilon > 0$. 関数 $f(x) - g(x)$ は $x \to a$ としたとき $\alpha - \beta$ に収束するので，ある δ_0 が存在して，$0 < |x-a| < \delta_0$ をみたす任意の $x \in S$ に対し

$$|(f(x) - g(x)) - (\alpha - \beta)| < \varepsilon,$$

すなわち，

$$-\varepsilon < f(x) - g(x) - (\alpha - \beta) < \varepsilon$$

が成り立つ．$\varepsilon = \alpha - \beta$ であったから，特に，$0 < |x-a| < \delta_0$ をみたす任意の $x \in S$ に対し

$$f(x) - g(x) > \alpha - \beta - \varepsilon = 0$$

が成り立つ．

任意の $\delta > 0$ に対し，$\min\{\delta, \delta_0\} > 0$ だから，$0 < |x-a| < \min\{\delta, \delta_0\}$ をみたす $x \in S$ が存在する．

この $x \in S$ を考えると，あきらかに $0 < |x-a| < \delta$ であり，また，$0 < |x-a| < \delta_0$ だから，$f(x) > g(x)$ である．

2. $\varepsilon > 0$ とする．

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ であるから，ある $\delta_1 > 0$ が存在して，$0 < |x-a| < \delta_1$ をみたす任意の $x \in S$ に対し，$|f(x) - \alpha| < \varepsilon$, とくに $-\varepsilon < f(x) - \alpha$ が成り立つ．

同様に，$\lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ であるから，ある $\delta_2 > 0$ が存在して，$0 < |x-a| < \delta_2$ をみたす任意の $x \in S$ に対し，$|g(x) - \alpha| < \varepsilon$, とくに $g(x) - \alpha < \varepsilon$ が成り立つ．

$\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ とおく．このとき，$0 < |x-a| < \delta$ をみたす任意の $x \in S$ に対し，$0 < |x-a| < \delta_0$ かつ $0 < |x-a| < \delta_1$ かつ $0 < |x-a| < \delta_2$ であるから，

$$-\varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ 0<|x-a|<\delta_1}}{<} f(x) - \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ 0<|x-a|<\delta_0}}{\leq} h(x) - \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ 0<|x-a|<\delta_0}}{\leq} g(x) - \alpha \underset{\substack{\uparrow \\ 0<|x-a|<\delta_2}}{<} \varepsilon,$$

が成り立ち，$|h(x) - \alpha| < \varepsilon$ である．

□

18 関数の連続性

定義 18.1 ([9, p.154])**.** $S(\neq \emptyset) \subset \mathbb{R}$ とし, $f\colon S \to \mathbb{R}$ を関数とする.

1. $a \in S$ とする. f が $x = a$ で連続（continuous）である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. f が S で連続である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in S$ に対し, f は $x = a$ で連続である.

注意 18.2. 先に注意したように, $\lim_{x \to a} f(x)$ は, （a を除く）a の近くでの f の様子を表すもので, $x = a$ における f の値 $f(a)$ とは一切関係が無い. 関数 f が $x = a$ において連続であるというのは, この極限が存在して, それが $x = a$ における f の値と一致するということである.

注意 18.3. 関数 f が $x = a$ で連続であることと,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in S(|x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{3}$$

が成り立つこととは同値である.

実際, 定義により, 関数 f が $x = a$ で連続であるとは, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ということであった. これを論理式で書けば,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in S(0 < |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \tag{4}$$

となる.

あきらかに (3) が成り立てば, (4) も成り立つ. （x が $0 < |x - a| < \delta$ をみたせば, $|x - a| < \delta$ もみたすから.）

一方, $|x - a| = 0$ であるような x, すなわち $x = a$ については, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$ が常に成り立つので, (4) が成り立てば, (3) も成り立つ.

関数 f が $x = a$ で連続であるということを論理式で表す場合, 定義通りに書けば (4) となるが, 今みたように, これは (3) と同値であり, 普通 (3) の方を使う.

例 18.4. 例 17.8 の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

を考える. この関数 f は, $x = 0$ で連続ではない. また, 任意の $a \neq 0$ に対し, $x = a$ で連続である.

実際, 先に見たように $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$ であるので, $x = 0$ で連続ではない.

一方, $a \neq 0$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta = |a|$ とおけば, $\delta > 0$ である．$|x - a| < \delta$ をみたす任意の x に対し,

$$|a| = |a - x + x| \leq |a - x| + |x| < \delta + |x| = |a| + |x|$$

だから, $|x| > 0$, すなわち $x \neq 0$ である．よって,

$$|f(x) - f(a)| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon$$

となり, f は $x = a$ で連続である.

関数の連続性を数列を用いて特徴付けることが出来る.

定理 18.5. $S(\neq \emptyset) \subset \mathbb{R}$, $a \in S$ とし, $f \colon S \to \mathbb{R}$ を関数とする．このとき次は同値である.

1. f は $x = a$ で連続.
2. a に収束する, S の元からなる任意の数列 $\{a_n\}$ に対し,

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$$

が成り立つ.

証明. **1 から** 2. f は $x = a$ で連続であるとする．$\{a_n\}$ を S の元からなる数列で, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ であるものとする．このとき, $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$ であること [*i] を示そう.

$\varepsilon > 0$ とする.

f は $x = a$ で連続であるから,（この ε に対し,）ある $\delta > 0$ が存在して, $|x - a| < \delta$ をみたす任意の $x \in S$ に対し, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ.

$\lim_{n \to \infty} a_n = a$ であるから,（この δ に対し,）ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq N$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|a_n - a| < \delta$ が成り立つ.

したがって, $n \geq N$ をみたす任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ.

[*i] すなわち,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n (n \geq N) : |f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つことを示す.

---

2 から 1. 対偶 [*i], すなわち,「f が $x = a$ で連続でない」[*ii] ならば,「a に収束する, S の元からなる数列 $\{a_n\}$ で, 数列 $\{f(a_n)\}$ が $f(a)$ に収束しない [*iii] ものが存在する」[*iv] ことを示そう.

f が $x = a$ で連続ではないとする.
このとき, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 任意の $\delta > 0$ に対し, $|x - a| < \delta$ をみたすある $x \in S$ が存在して, $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ が成り立つ.
$n \in \mathbb{N}$ とすると, $1/n > 0$ であるから, $|x - a| < 1/n$ をみたすある $x \in S$ が存在して, $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ が成り立つ. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, このような $x \in S$ をひとつ選び, それを a_n とおく.
このようにして作った数列 $\{a_n\}$ を考える.
作り方から, あきらかに, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $a_n \in S$ である.
また, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $0 \leq |a_n - a| < 1/n$ であるから, はさみうちにより, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ である.
さらに, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, $|f(a_N) - f(a)| \geq \varepsilon$ が成り立つ.
したがって, この数列 $\{a_n\}$ は, S の元からなる a に収束する数列であり, かつ, $\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない.

---

*i 1 の否定が成り立てば, 2 の否定が成り立つ
*ii 例 17.9 でみたように,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in S(|x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

が成り立つということ. 注意 18.3 も参照のこと.
*iii すなわち,

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n(n \geq N) : |f(a_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

が成り立つ.
*iv

$$\forall \{a_n\}((\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in S) \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = a) : \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$$

の否定は

$$\exists \{a_n\}((\forall n \in \mathbb{N} : a_n \in S) \wedge \lim_{n\to\infty} a_n = a) : \{f(a_n)\} \text{ は } \{f(a)\} \text{ に収束しない.}$$

□

閉区間で定義された連続関数は重要な性質をふたつ持っており, 微積分における様々な定理の根拠となっている.

定理 18.6. 関数 $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ が連続ならば, 値域 $f([a, b])$ は最大数, 最小数をもつ.

注意 18.7. この定理を証明するには実数列についてもう少し準備する（ボルツァノ・ワイエルシュトラスの定理）必要があるので, この講義では省略する. 微積の教科書 [3] 等を参照のこと.

この定理は, しばしば, 「閉区間上の連続関数は最大値, 最小値をとる」という言い方で言及される.

定理 18.8 (中間値の定理)**.** $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続関数とし，$f(a) \neq f(b)$ であるとする．このとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 k に対し，

$$f(c) = k \text{ かつ } a < c < b$$

をみたす c が存在する．

証明．　1. $f(a) < f(b)$ のとき．

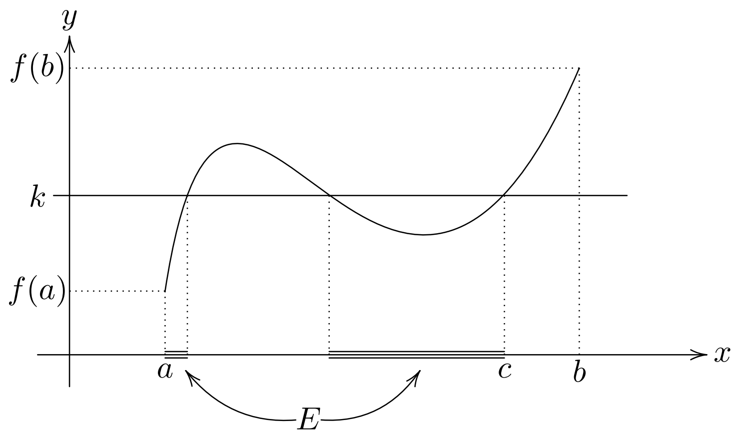
$f(a) < k < f(b)$ とし，

$$E := \{x \in [a,b] \mid f(x) \leq k\}$$

とおく．$E \subset [a,b]$ だから E は有界であり，$a \in E$ なので $E \neq \emptyset$ である．よって，E には上限が存在する．

$$c := \sup E$$

とおく．$E \subset [a,b]$ ゆえ b は E の上界．よって $c = \sup E \leq b$．また，$a \in E$ ゆえ $a \leq \sup E = c$．よって $c \in [a,b]$ である．



$f(c) = k$ であることを示そう．系 13.15 より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$|f(c) - k| < \varepsilon$，すなわち，

$$k - \varepsilon < f(c) < k + \varepsilon$$

が成り立つことを示せばよい．

$\varepsilon > 0$ とする．

f は連続であるから，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x - c| < \delta$ をみたす任意の $x \in [a,b]$ に対し，$|f(c) - f(x)| < \varepsilon$，すなわち，$f(x) - \varepsilon < f(c) < f(x) + \varepsilon$ が成り立つ．

$c = \sup E$ であるから，ある $x_0 \in E$ で，$c - \delta < x_0$ をみたすものが存在する（系 15.9）．$x_0 \in E$ であり，$c = \sup E$ だから，$x_0 \leq c$ である．よって特に

$|x_0 - c| < \delta$ である．したがって $f(c) < f(x_0) + \varepsilon$．また $x_0 \in E$ であるから，$f(x_0) \leq k$．よって，

$$f(c) < k + \varepsilon.$$

よって，特に $f(c) < f(b)$[*i] だから $c \neq b$．ゆえ，$c < b$．$\delta_0 := \min\{\delta, b - c\}/2$ とおけば，$c + \delta_0 \in [a, b]$ であり，$|c + \delta_0 - c| = \delta_0 < \delta$ だから，$f(c + \delta_0) - \varepsilon < f(c)$．また $c + \delta_0 > c = \sup E$ だから，$c + \delta_0 \notin E$ である．ゆえに，$k < f(c + \delta_0)$．よって，

$$k - \varepsilon < f(c).$$

したがって，$f(c) = k$ であることが示せた．

$f(c) = k \neq f(a)$ であるから，$a \neq c$．よって $a < c < b$ である．

2. $f(a) > f(b)$ のとき．

   $f(a) > k > f(b)$ とする．

   関数 $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ を，$g(x) := -f(x)$ により定める．このとき，g は連続であり [*ii]$g(a) < -k < g(b)$ をみたす．よって，先の議論から，

   $$g(c) = -k \text{ かつ } a < c < b$$

   をみたす c が存在する．$f(c) = -g(c) = k$ であるから，この c が求めるものである．

[*i] ε として $f(b) - k$ をとれば分かる．なお，ここまでの議論で，$f(c) \leq k$ であることが示せている．

[*ii] 何故か？

□

数列を用いた別証を与えてみよう．

$f(a) < f(b)$ のときのみ考える．$f(a) < k < f(b)$ とし，E, c を先と同様に定める．

- $f(c) \leq k$ を示す．

  $c = \sup E$ であるから，定理 16.16 より，E の元からなる数列 $\{a_n\}$ で c に収束するものが存在する．

  任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$a_n \in E$ であるから，$f(a_n) \leq k$．

  また，f は連続なので，定理 18.5 より，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(c)$．

  よって，定理 16.10.1 より，$f(c) \leq k$．

- $f(c) \geq k$ を示そう．

  $f(c) \leq k < f(b)$ であるから，$c \neq b$．よって，$c < b$ である．

  数列 $\{b_n\}$ を $b_n = c + \frac{1}{n}$ により定める．

明らかに $\lim_{n\to\infty} b_n = c$ である．
$b-c>0$ であるから，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$\frac{1}{N}<b-c$ が成り立つ．$n\geq N$ をみたす任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し，

$$a \leq c < b_n = c + \frac{1}{n} \leq c + \frac{1}{N} < b$$

であるから，$b_n\in[a,b]$ である．また，$b_n > c = \sup E$ であるから，$b_n \notin E$．よって，任意の $n\geq N$ に対し，$f(b_n)>k$．
さらに，f は連続であるから，$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(c)$[*i]．
よって，定理 16.10.1 より，$f(c)\geq k$．

よって，$f(c)=k$ であることが示せた．
$a<c<b$ であることは先と同様．

[*i] 細かいことを言えば，$n<N$ については $b_n\in[a,b]$ かどうか分からないので，$f(b_n)$ が定義されていないかもしれない．よって，数列 $\{f(b_n)\}_{n\geq N}$ を考える，あるいは，$b_n\notin[a,b]$ なる n については $f(b_n)$ を何でもよいので適当に定める．

□

問 18.1. 中間値の定理の仮定を，「関数 $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ が開区間 (a,b) で連続」とした場合，一般には，同様な結論は成り立たない．成り立たないような例を挙げよ．
また，上の証明のどこがうまくいかなくなるのか考えてみよ．

演習 18.9. 関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

で定める．

1. f は，$x=0$ で連続ではないことを示せ．
2. f は，任意の $a\neq 0$ に対し，$x=a$ で連続であることを示せ．

演習 18.10. 関数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $x=a$ で連続で，$f(a)>0$ であるとする．
このとき，a の近くで $f(x)$ は正である，すなわち，ある $\delta>0$ が存在して，$|x-a|<\delta$ をみたす任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し，$f(x)>0$ が成り立つことを示せ．

演習 18.11. 数列 $\{a_n\}$ が正の数 $\alpha\in\mathbb{R}$ に収束するとする．
このとき，

$$\exists N\in\mathbb{N}, \forall n(n\geq N) : a_n > 0$$

が成り立つことを示せ.

演習 18.12. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を収束列, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ であるとする. さらに, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $a_n < b_n$ が成り立っているとする.

このとき, $\alpha < \beta$ は成り立つか？成り立つならば証明し, 成り立たない場合は反例を挙げよ.

参考文献

[1] H.D. エビングハウス, 他. 数〈上〉. シュプリンガーフェアラーク東京, 2004.

[2] ウイリアムダンハム. 微積分名作ギャラリー - ニュートンからルベーグまで. 日本評論社, 2009.

[3] 吹田信之, 新保経彦. 理工系の微分積分学. 学術図書出版社, 1996.

[4] 佃修一. 幾何学序論講義ノート. http://math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/.

[5] 嘉田勝. 論理と集合から始める数学の基礎. 日本評論社, 2008.

[6] 佐藤文広. これだけは知っておきたい数学ビギナーズマニュアル. 日本評論社, 1994.

[7] 斎藤正彦. 数学の基礎 − 集合・数・位相. 東京大学出版会, 2002.

[8] 琉球大学理学部数理科学科編. 位相空間問題集. http://math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/.

[9] 飯高茂（編）. 微積分と集合 そのまま使える答えの書き方. 講談社, 1999.