An Introduction to Category Theory

2024 年 7 月 16 日

List of exercises

英語でよければ, 最近は読みやすそうで面白そうかつ, 著者のページ等からダウンロード出来る本がいくつか出ている. 下 3 つは日本語訳も出ている.

- E. Riehl の Category Theory in Context [6]
  `http://www.math.jhu.edu/~eriehl/context/`
- T. Leinster の Basic Category Theory [4]
  `https://www.maths.ed.ac.uk/~tl/bct/`
  `https://arxiv.org/abs/1612.09375`
- D. Spivak の Category theory for scientists [7] の preprint version
  `https://arxiv.org/abs/1302.6946`
- 入門ではないが, B. Fong と D. Spivak の Seven Sketches in Compositionality - An Invitation to Applied Category Theory [2] の preprint version
  `https://arxiv.org/abs/1803.05316`

また, 圏論の教科書と言えば, 最も有名なのは, 圏論の創始者の一人 S. Mac Lane の Categories for the working mathematician [5]（日本語訳も出ている）であるが, これはタイトル通り（初版出版当時のではあるが）working mathematician 向けなので, 入門者が読むにはつらいかもしれない.

目次

第 1 章

Preliminaries

$\mathbb{N}_0$ で非負整数全体をあらわす.

ちょっとだけ集合論

よく知られているように,「集合全ての集まり」を集合と考えると矛盾が生じる. が,「集合全ての集まり」というものを扱いたい事がある. こういうものをクラスと呼ぶ.

クラスをどのように規程し, どのように取り扱うかにはいくつか流儀がある. ZFC の拡張である NBG (von Neumann - Bernays - Gödel), あるいは Grothendieck の universe を使うというのがよくある態度だと思う.

とりあえず, クラスというのは, 集合として扱うと都合の悪い「集合（みたいなもの）」であると思っておけばよい.

クラスからクラスへの写像というのも考えることができる. また, クラスに対する選択公理も成り立つと仮定する（こういうことを仮定しても ZFC と矛盾しない. 新しい集合が付け加わることもない. 集合についての新しい定理が証明されることもない. ということが知られている）.

第 2 章

Basic Notions of Category Theory

2.1 圏

定義 2.1 (Category)**.** **圏（カテゴリー，category）** $\mathcal{C}$ とは以下の 3 つの data (i)〜(iii) からなり, 条件 (a)〜(c) をみたすもののことをいう.

data (i) クラス $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ の元を**対象 (object)** という.

(ii) 対象の任意の順序対 (A,B) に対して定められたクラス $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

このクラスの元を A から B への**射 (morphism, arrow)** という.

射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ を図式により $f\colon A \to B$ または $A \xrightarrow{f} B$ とあらわす.

(iii) 任意の $A,B,C \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対し定められた写像

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C).$$

この写像を**合成 (composition)** という.

射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ と $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ の合成を gf または $g \circ f$ とあらわす.

条件 (a) 合成は結合的, すなわち, 任意の射 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $h\colon C \to D$ に対し, 等式 $h(gf) = (hg)f$ が成り立つ.

(b) 各対象 $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ に対し, 次をみたす射 $1_A\colon A \to A$ が存在する.

『任意の $f\colon A \to B$ に対し $f \circ 1_A = f$.

任意の $g\colon C \to A$ に対し $1_A \circ g = g$.』

(c) 対 (A,B) と (A',B') が異なれば,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A',B') = \emptyset.$$

条件 (b) の射 $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ は各 A に対し一意的に定まることがわかる．これを A の**恒等射 (identity morphism)** という．

条件 (c) により, 各射 f に対し, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ となるような対象 A と B が一意的に定まる．A を f の **domain** または **source**, B を f の **codomain** または **target** とよぶ.

条件 (c) は若干テクニカルなもので, 実際に圏を扱う際, 大抵の場合あまり気にしなくてよい.

定義 2.2 (Locally small category)**.** 圏 $\mathcal{C}$ は, 任意の対象 A, B に対し, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ が集合であるとき**局所小圏 (locally small category)** とよばれる.

圏論で扱う圏はたいてい局所小圏である.

この講義では, 特に断らなければ, 圏といえば局所小圏とする．局所小圏でない圏を扱うときは, そのようにコメントする（予定）.

定義 2.3 (Small category)**.** 局所小圏 $\mathcal{C}$ は, $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ が集合であるとき**小圏 (small category)** とよばれる.

問 2.4. 条件 (b) の射 $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ は各 A に対し一意的に定まることを示せ.

記法上の注意を少し.

- クラス $\bigcup\limits_{A,B} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ であらわす.
- しばしば $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ のかわりに $A \in \mathcal{C}$, $f \in \mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ のかわりに $f \in \mathcal{C}$ と書く.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ を $\mathrm{Hom}(A, B)$ または $\mathcal{C}(A, B)$ と書くこともある.
- 射 $f\colon A \to B$ と $g\colon B \to C$ の合成を図式 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ であらわす.

圏の例を挙げる.

例-定義 2.5.

1. **(Set)**: 集合を対象とし, 集合の間の写像を射, 写像の合成を合成とする圏.
2. **(set)**: 有限集合を対象とし, 有限集合の間の写像を射, 写像の合成を合成とする圏.
3. **(Grp)**: 群を対象, 準同型写像を射, 準同型写像の合成を合成とする圏.
4. **(Abel)**: アーベル群を対象, 準同型写像を射, 準同型写像の合成を合成とする圏.
5. **($\mathbf{Vect_k}$)**: k を体とする．k-ベクトル空間を対象, 線形写像を射, 線形写像の合成を合成とする圏.
6. **($\mathbf{Vect_k^{fd}}$)**: 有限次元 k-ベクトル空間を対象, 線形写像を射, 線形写像の合成を合成とする圏.

7. **(Top)**: 位相空間を対象, 連続写像を射, 連続写像の合成を合成とする圏.
8. **(Poset)**: 順序集合を対象, 順序を保つ写像を射, 写像の合成を合成とする圏.
9. **(Ord)**: 前順序集合を対象, 前順序を保つ写像を射, 写像の合成を合成とする圏.

例-定義 2.6. 1. 任意の集合 X は圏 $\mathcal{C}(X)$ とみなすことが出来る.

(a) $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}(X) = X$.

(b) 射は各対象に対する恒等射のみ.

一般に, 恒等射以外には射が無い圏を**離散圏 (discrete category)** とよぶ.

特に, 空集合 $\emptyset$ を圏とみたとき **empty category** とよぶ.

2. 任意の順序集合 (partially ordered set, poset) P は圏とみなせる.

(a) $\mathrm{Ob}\,P = P$.

(b) $x, y \in P$ に対し $x \leq y$ であるときかつそのときに限り射 $x \to y$ がただひとつ存在する.

(c) 合成は, 射の定めかたから一意的に定まるもの.

集合 X に離散順序を入れたものを圏とみなしたものは $\mathcal{C}(X)$ である.

3. X を位相空間とし, $\mathcal{O}$ を X の位相, すなわち X の開集合全体とする. $\mathcal{O}$ に包含関係により順序をいれる. 順序集合 $\mathcal{O}$ を圏とみたものを X_{top} で表す.

4. 任意の群 G は対象をただひとつだけもち, 射の集合は G であるような圏 G_{cat} とみなせる（G_{cat} を $\mathrm{B}G$ と書くこともある）.

(a) $\mathrm{Ob}\,G_{cat} = \{\bullet\}$.

(b) $\mathrm{Hom}_{G_{cat}}(\bullet, \bullet) = G$.

(c) 射の合成は群の積により定める, すなわち $g, h \in G$ に対し, 積 $gh \in G$ が合成 $\bullet \xrightarrow{h} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$ を与える.

G_{cat} においては, 全ての射は同型射（定義 2.11.3）となっている.

一般に, 全ての射が同型射であるような小圏を**亜群 (groupoid)** という.

また, 対象がただひとつであるような小圏を**モノイド (monoid)** という.

5. 圏 Δ.

非負整数 $n \in \mathbb{N}_0$ に対し順序集合 $\underline{\mathbf{n}}$ を

$$\underline{\mathbf{n}} = \{0, 1, \ldots, n\} = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \leq n\}$$

により定める. ただし順序は数の大小から定まるもの.

(a) $\mathrm{Ob}\,\Delta = \mathbb{N}_0$.

(b) $m, n \in \mathbb{N}_0$ に対し, m から n への射は, $\underline{\mathbf{m}}$ から $\underline{\mathbf{n}}$ への順序を保つ写像.

(c) 射の合成は写像の合成.

6. 圏 Mat_R. R を（単位元を持つ）環とする.

(a) $\mathrm{Ob}\,\mathrm{Mat}_R = \mathbb{N}$.

（b）$\mathrm{Hom}(m,n)=\mathrm{M}_{n,m}(R)$（$n$ 行 m 列 R 行列全体）.

（c）射の合成は行列の積.

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(m,n)\times\mathrm{Hom}(l,m) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(l,n) \\
\| & & \| \\
\mathrm{M}_{n,m}(R)\times\mathrm{M}_{m,l}(R) & & \mathrm{M}_{n,l}(R) \\
\Cup & & \Cup \\
(B,A) & \longmapsto & BA
\end{array}
$$

問題 2.7. 上の各例が圏になっていることを確かめよ.

問 2.8.　1. $\Delta(\underline{\mathbf{n}},\underline{\mathbf{n+1}})$ の元のうち 1 対 1 写像であるものを全て挙げよ.

2. $\Delta(\underline{\mathbf{n+1}},\underline{\mathbf{n}})$ の元のうち上への写像であるものを全て挙げよ.
3. $\Delta(\underline{\mathbf{0}},\underline{\mathbf{n}})$ の元を全て挙げよ.

定義 2.9.　1. $\mathcal{C}^\circ$: 圏 $\mathcal{C}$ の**双対圏 (dual category, opposite category)**:

（a）$\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^\circ=\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$.

（b）$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(A,B)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$.

（c）合成は次で定める.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(B,C)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(A,B) &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B)\\
&\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(A,C).
\end{aligned}
$$

次の図式を参照せよ.

$$
A \underset{\mathcal{C}}{\overset{\mathcal{C}^\circ}{\rightleftarrows}} B \underset{\mathcal{C}}{\overset{\mathcal{C}^\circ}{\rightleftarrows}} C.
$$

$f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ を, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\circ}(A,B)$ の元と考えるとき, f のままだと混乱することがあるので, f^o と書くときがある.

2. 圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の**直積 (product category)** $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$:

（a）$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}\times\mathcal{D})=\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}\times\mathrm{Ob}\,\mathcal{D}=\{(C,D)\mid C\in\mathcal{C},D\in\mathcal{D}\}$.

（b）$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((C,D),(C',D'))=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,C')\times\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D,D')$.

（c）合成は $(f',g')(f,g)=(f'f,g'g)$ により定義する.

問 2.10. 定義 2.9 の圏が圏の定義の条件をみたしていることを確かめよ. $\mathcal{C}^o$ における恒等射はどのようなものか?

定義 2.11 (単射, 全射, 同型射)**.** $\mathcal{C}$ を圏とする.

1. 射 $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が**単射 (monic, monomorphism)** である.
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $C \in \mathcal{C}$ と $g, h\colon C \to A$ について次が成り立つ.『$fg = fh$ ならば $g = h$.』
   $$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$
2. 射 $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が**全射 (epi, epimorphism)** である.
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $C \in \mathcal{C}$ と $g, h\colon B \to C$ について次が成り立つ.『$gf = hf$ ならば $g = h$.』
   $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \end{tikzcd}$$
3. 射 $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が**同型射 (isomorphism)** である.
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $fg = 1_B$ と $gf = 1_A$ をみたすような射 $g\colon B \to A$ が存在する. このような射 g を f の**逆射**という.
   $$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "g"] \end{tikzcd}$$
4. A から B への同型射が存在するとき A は B に（$\mathcal{C}$ において）**同型**であるといい, $A \cong B$ と表す.

注意 2.12. $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ における単射であることと, $f^o\colon B \to A \in \mathcal{C}^o$ が $\mathcal{C}^o$ における全射であることは同値である.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C & A \arrow[l, shift right, "g^o"'] \arrow[l, shift left, "h^o"] & B \arrow[l, "f^o"'] \end{tikzcd}$$

このように, 圏をその双対でおきかえて得られる（つまり射の向きを全て逆にして得られる）概念をものとものの双対という. 全射と単射は互いに双対である. また, 同型の双対は同型である: $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ が同型射であることと, $f^o\colon B \to A \in \mathcal{C}^o$ が同型射であることは同値である.

圏に関する命題は, 双対を考えることで, 射の向きを全て逆にした命題も成立する. これを**双対原理 (duality principle)** という.

補題 2.13.
1. 恒等射 $1_A\colon A \to A$ は同型射である.
2. 同型射 $f\colon A \to B$ は全射かつ単射である.
3. 同型射の逆射は一意的である. 同型射 f の逆射を f^{-1} と書く.

Proof. 1. $1_A \circ 1_A = 1_A$ だから.

2. 射 $h, k\colon C \to A$ が $fh = fk$ をみたすとする. f は同型射であるので, $gf = 1_A$ となる射 $g\colon B \to A$ が存在する. このとき $h = 1_A h = (gf)h = g(fh) = g(fk) = (gf)k = k$ となるので f は単射である. 同様に f が全射であることも示せる.
3. 2 を使えば分かるが, 直接示しておこう（ほぼ同じことをやることになるが）. $f\colon A \to B$ を同型射, $g, h\colon B \to A$ をその逆射とする. 定義より, $fh = 1_B$, $gf = 1_A$ が成り立つ. よって $g = g1_B = g(fh) = (gf)h = 1_A h = h$.

□

注意 2.14. 一般に (2) の逆は成立しない, すなわち, 全射かつ単射であっても同型射とは限らない.

問題 2.15. 包含写像 $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ は, 単位元をもつ可換環の圏の射とみたとき, 全射かつ単射であることを示せ. また i は同型射ではないことを示せ（例えば [1, 1.8.5] を参照せよ).

問 2.16. 1. **(Set)** における単射とは写像としての単射である.

2. **(Set)** における全射とは写像としての全射である.
3. **(Set)** における同型射とは全単射である.

注意 2.17. **(Set)** における単射, 全射は写像としての単射, 全射と同じであるので混乱は生じないであろう（英語ではそれぞれ monomorphism, epimorphism, injective map, surjective map と違う単語）.

問題 2.18. 例-定義 2.5, 2.6, 定義 2.9 の各例について, 単射, 全射, 同型射がどのようなものか考察せよ.

定義 2.19 (始対象, 終対象)**.** $\mathcal{C}$ を圏とする.

1. 対象 $s \in \mathcal{C}$ が**始対象 (initial object)** である.
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の対象 $C \in \mathcal{C}$ に対し $\mathcal{C}(s, C)$ がただ 1 点からなる集合である.
2. 対象 $t \in \mathcal{C}$ が**終対象 (terminal object)** である.
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の対象 $C \in \mathcal{C}$ に対し $\mathcal{C}(C, t)$ がただ 1 点からなる集合である.

補題 2.20. 始対象と終対象は, 存在すれば, 同型を除いて一意的である.

注意 2.21. 「同型を除いて (up to isomorphism) 一意的」といった言い方が圏論（に限らず数学）でよく出てくる. 例えば, 補題 2.20 で言っているのは,

s と s' が始対象ならば, $s \cong s'$ である

t と t' が終対象ならば, $t \cong t'$ である

ということ.

さらに, 圏論で出てくる多くの場合, “unique up to unique isomorphism” である, つまり, その同型を与える同型射も適当な意味で一意的であることが多い.

Proof. s と s' が $\mathcal{C}$ の始対象であるとする. s が始対象なので, 射 $f\colon s \to s' \in \mathcal{C}$ がただ一つ存在する. また, s' が始対象なので, 射 $g\colon s' \to s \in \mathcal{C}$ がただ一つ存在する. $1_s, gf \in \mathcal{C}(s,s)$ であり, s は始対象なので, $gf = 1_s$. 同様に, $1_{s'}, fg \in \mathcal{C}(s',s')$ であり, s' は始対象なので, $fg = 1_{s'}$. よって, f, g は同型射で, $s \cong s'$.

双対的に終対象の方も成り立つ.

始対象と終対象は双対である: $t \in \mathcal{C}$ が $\mathcal{C}$ における終対象であることと, $t \in \mathcal{C}^o$ が $\mathcal{C}^o$ における始対象であることは同値である.

t と t' が $\mathcal{C}$ の終対象であるとすると, t と t' は $\mathcal{C}^o$ の始対象であるから, 前半に示したことより, $\mathcal{C}^o$ において $t \cong t'$. よって $\mathcal{C}$ において $t \cong t'$. □

例 2.22. **(Set)** においては, 空集合 $\emptyset$ が始対象で, 1 点集合が終対象である.

(Grp) においては, 単位元のみからなる群が始対象かつ終対象である.

例 2.23. P を順序集合とする. P の始対象は最小元, 終対象は最大元.

問題 2.24. 例-定義 2.5, 2.6, 定義 2.9 の各例について, 始対象, 終対象は存在するか. 存在すればそれはどのようなものか.

2.2　関手

定義 2.25 (Functor)**.** 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**関手 (functor)** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とは以下の 2 つの data (i), (ii) からなり, 条件 (a), (b) をみたすものをいう.

data (i) 写像 $F\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$

(ii) $\mathcal{C}$ の対象の各順序対 (A,B) に対して定められた写像

$$F_{A,B}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$$

普通 $F_{A,B}$ を単に F と書く.

条件 (a) 任意の射 $f : A \to B \in \mathcal{C}$, $g : B \to C \in \mathcal{C}$ に対し, 等式 $F(gf) = F(g)F(f)$ が成り立つ.

(b) $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A \in \mathcal{C}$ に対し, 等式 $F(1_A) = 1_{F(A)}$ が成り立つ.

定義 2.26 (Contravariant Functor)**.** 圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{D}$ への**反変関手 (contravariant functor)** $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とは以下の 2 つの data (i), (ii) からなり, 条件 (a), (b) をみたすものをいう.

data (i) 写像 $F\colon \operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{D}$

(ii) $\mathcal{C}$ の対象の各順序対 (A, B) に対して定められた写像

$$F_{A,B}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$$

普通 $F_{A,B}$ を単に F と書く.

条件 (a) 任意の射 $f : A \to B \in \mathcal{C}$, $g : B \to C \in \mathcal{C}$ に対し, 等式 $F(gf) = F(f)F(g)$ が成り立つ.

(b) $\mathcal{C}$ の任意の対象 $A \in \mathcal{C}$ に対し, 等式 $F(1_A) = 1_{F(A)}$ が成り立つ.

反変関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は関手 $F\colon \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{D}$ あるいは $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^\circ$ とみなせる. 逆に関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は反変関手 $F\colon \mathcal{C}^\circ \to \mathcal{D}$ あるいは $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}^\circ$ とみなせる. ただし $\mathcal{C}^\circ$ は $\mathcal{C}$ の双対圏である.

考えている関手が反変関手ではないことを明確にしたいときは**共変関手 (covariant functor)** とよぶ.

定義 2.27.

1. 二つの関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ に対し, 合成 $GF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ を $(GF)(A) = G(F(A))$ と $GF(f) = G(F(f))$ により定義する. これが関手になっていることは容易に示される.
2. 圏 $\mathcal{C}$ に対し, **恒等関手 (identity functor)** $1_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を $1_{\mathcal{C}}(A) = A$ と $1_{\mathcal{C}}(f) = f$ により定義する.
3. 圏 $\mathcal{D}$ の対象 $D \in \mathcal{D}$ に対し, **定値関手 (constant functor)** $\Delta_D\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を $\Delta_D(C) = D$ と $\Delta_D(f) = 1_D$ により定義する. 定値関手は共変かつ反変である.
4. 圏の直積 (定義 2.9.2) からの関手 $F\colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ は **bifunctor** とよばれる.

例 2.28. 忘却関手

1. $U\colon \mathbf{(Grp)} \to \mathbf{(Set)}$
2. $U\colon \mathbf{(Vect_k)} \to \mathbf{(Set)}$
3. $U\colon \mathbf{(Top)} \to \mathbf{(Set)}$
4. $U\colon \mathbf{(Poset)} \to \mathbf{(Set)}$
5. $U\colon \mathbf{(Vect_k)} \to \mathbf{(Abel)}$
6. $U\colon \mathbf{(set)} \to \mathbf{(Set)}$
7. $U\colon \mathbf{(Abel)} \to \mathbf{(Grp)}$

例 **2.29** (離散位相, 密着位相)**.**

1. 集合に離散位相を入れることで, 関手 $D\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Top)}$ が定まる.
   集合 X に対し, $D(X)$ を X に離散位相を入れた位相空間とする. また, $f\colon X \to Y$ を写像とすると, $f\colon D(X) \to D(Y)$ は連続である. $D(f) = f$ と定める.
   あきらかに D は関手である.
2. 集合に密着位相を入れることで, 関手 $I\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Top)}$ が定まる.
   集合 X に対し, $I(X)$ を X に密着位相を入れた位相空間とする. また, $f\colon X \to Y$ を写像とすると, $f\colon I(X) \to I(Y)$ は連続である. $I(f) = f$ と定める.
   あきらかに I は関手である.

例 **2.30** (順序を保つ写像)**.**

P, Q を順序集合とする. P, Q を圏とみたときの P から Q への関手とは, 順序集合 P から Q への順序を保つ写像に他ならない.

$F\colon P \to Q$ を関手とする.

F は関手なので, $p, p' \in P$ に対し, 写像

$$F\colon\ \mathrm{Hom}_P(p, p') \to \mathrm{Hom}_Q(F(p), F(p'))$$

がある.

$\mathrm{Hom}_Q(F(p), F(p'))$ は空集合か 1 点集合なので, このような写像は一意に定まる. したがって, 関手 F は, 写像 $F\colon P = \mathrm{Ob}\,P \to \mathrm{Ob}\,Q = Q$ だけで決まる.

全ての p, p' に対しこのような写像が存在するための必要十分条件は,

$$\mathrm{Hom}_Q(F(p), F(p')) = \emptyset \text{ ならば } \mathrm{Hom}_P(p, p') = \emptyset \text{ となること},$$

言い換えると

$$\mathrm{Hom}_P(p, p') \neq \emptyset \text{ ならば } \mathrm{Hom}_Q(F(p), F(p')) \neq \emptyset \text{ となること},$$

つまり $p \le p'$ ならば, $F(p) \le F(p')$ となる, すなわち $F\colon P = \mathrm{Ob}\,P \to \mathrm{Ob}\,Q = Q$ が順序を保つことである.

写像 $F\colon P \to Q$ が順序を保てば, F が関手となることは容易に分かる.

例 **2.31** (群準同型)**.**

G, H を群とする.

G_{cat} から H_{cat} への関手とは, G から H への群準同型に他ならない.

G_{cat}, H_{cat} は対象を一つしか持たないので, G_{cat} から H_{cat} への関手は写像 $G = \mathrm{Hom}_{G_{cat}}(\bullet, \bullet) \to \mathrm{Hom}_{H_{cat}}(\bullet, \bullet) = H$ で定まるが, これが合成（と恒等射）を保つこととは, 群準同型であることに他ならない.

例 2.32. 群の作用

例 2.33 (反変冪集合関手)**.**

集合 X に対し, その冪集合を $\mathcal{P}(X)$ と書く. $\mathcal{P}(X)$ には包含関係で順序を入れて順序集合と考える.

$f\colon X \to Y$ を写像とする. $B \in \mathcal{P}(Y)$ にその逆像 $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(X)$ を対応させる写像を $\mathcal{P}(f)$ と書く:

$$\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

$$B \longmapsto f^{-1}(B)$$

あきらかに $\mathcal{P}(f)$ は順序を保ち（$B \subset C$ ならば $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C)$）, $\mathcal{P}$ は反変関手 $\mathcal{P}\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Poset)}$ を定める:

$$\mathbf{(Set)} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{(Poset)}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(X) \\ Y \arrow[r, mapsto] & \mathcal{P}(Y) \arrow[u, "\mathcal{P}(f)"'] \end{tikzcd}$$

この関手を反変冪集合関手という.

問 2.34. $\mathcal{P}$ が反変関手であることを確かめよ.

注意 2.35. 写像 $f\colon X \to Y$ に対し, 逆像ではなく, 像を対応させる写像

$$f_*\colon \quad \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$A \longmapsto f(A)$$

を考えると, 共変関手 $\mathcal{P}_*\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Poset)}$ がえられる.

また

$$f_\star\colon \quad \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$$

$$A \longmapsto f(A^c)^c$$

を考えると, 共変関手 $\mathcal{P}_\star\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Poset)}$ がえられる.

例 2.36. X を集合, P を順序集合とする. X から P への写像全体のなす集合 P^X は, 各点毎（pointwise）の順序

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X : f(x) \leq g(x)$$

により順序集合となる.

また, $f\colon X \to Y$ を写像とすると, $f^*(g) = gf$ により定まる写像

$$\begin{aligned} f^*\colon P^Y &\longrightarrow P^X \\ g &\longmapsto gf \end{aligned}$$

は, この各点毎の順序を保つ.

順序集合 P を一つ固定すると, 反変関手 $P^-\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Poset)}$ が定まる:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{(Set)} \arrow[r, "P^-"] & \mathbf{(Poset)} \\ X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & P^X \\ Y \arrow[r, mapsto] & P^Y \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

とくに $\mathbf{2} = \{0,1\}$ に $0 < 1$ で順序を入れた順序集合により反変関手 $\mathbf{2}^-\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Poset)}$ が定まる:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{(Set)} \arrow[r, "\mathbf{2}^-"] & \mathbf{(Poset)} \\ X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathbf{2}^X \\ Y \arrow[r, mapsto] & \mathbf{2}^Y \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

問 2.37. 各点毎の順序が順序であること, 及び, f^* が順序を保つことを確かめよ.

例 2.38 (双対ベクトル空間)**.**

k を体とする.

$V, W \in \mathbf{(Vect_k)}$ とし, $f, g \in \mathbf{(Vect_k)}(V, W)$, $a \in k$ に対し, 写像

$$f + g\colon V \to W \qquad\qquad af\colon V \to W$$

を $(f+g)(v) \coloneqq f(v) + g(v)$, $(af)(v) = a \cdot f(v)$ により定めると, $f+g$, af は k 線形写像となる. この和とスカラー倍により, $\mathbf{(Vect_k)}(V, W)$ は k 上のベクトル空間となる. これ（$\mathbf{(Vect_k)}(V, W)$ を単なる集合ではなく, このようにしてベクトル空間としたもの）を $\mathrm{Hom}_k(V, W)$ と書く.

また, $h\colon U \to V \in \mathbf{(Vect_k)}$ とすると, $h^*(f) = fh$ により定まる写像

$$\begin{aligned} h^*\colon \mathrm{Hom}_k(V, W) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_k(U, W) \\ f &\longmapsto fh \end{aligned}$$

は, 線形写像である.

$W \in (\mathbf{Vect_k})$ を一つ固定すると, 反変関手 $\mathrm{Hom}_k(-, W)\colon (\mathbf{Vect_k}) \to (\mathbf{Vect_k})$ が定まる:

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{Vect_k}) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_k(-,W)"] & (\mathbf{Vect_k}) \\
U \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "h"'] & \mathrm{Hom}_k(U, W) \\
V \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_k(V, W) \arrow[u, "h^*"']
\end{tikzcd}
$$

一般に, 体 k は, k の和と積により, k 上のベクトル空間である. $\mathrm{Hom}_k(V, k)$ を V の**双対ベクトル空間**といい, V^* と書く:

$$V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k) = \left\{\varphi\colon V \to k \;\middle|\; \varphi \text{ は } k \text{ 線形}\right\}$$

双対ベクトル空間をとることで, 反変関手 $-^*\colon (\mathbf{Vect_k}) \to (\mathbf{Vect_k})$ が得られる:

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbf{Vect_k}) \arrow[r, "-^*"] & (\mathbf{Vect_k}) \\
U \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "h"'] & U^* \\
V \arrow[r, mapsto] & V^* \arrow[u, "h^*"']
\end{tikzcd}
$$

例 2.39. 与えられた集合を基底とするベクトル空間

例 2.40. R を可換環とする.

1. 次数つき R 加群の圏 $(\mathbf{GrMod}_R)$:
   - R 加群の族 $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を（$\mathbb{Z}$）次数つき R 加群という.
   - $C = \{C_n\}$, $D = \{D_n\}$ を次数つき R 加群とする. 準同型の族 $\{f_n\colon C_n \to D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を, 次数つき R 加群の（次数 0 の）準同型という.

   次数つき R 加群を対象とし, 準同型を射とする圏を, 次数つき R 加群の圏という.
2. （R 上の）チェイン複体の圏 $(\mathbf{Ch}_R)$:
   - 次数つき R 加群 $\{C_n\}$ と, 準同型の族 $\{\partial_n\colon C_n \to C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ で, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ をみたすものをチェイン複体という.

   $$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots$$

   チェイン複体を $\{C_n, \partial_n\}$, あるいは ∂_n を省略して $\{C_n\}$ 等と書く.
   ∂_n を微分, あるいは境界準同型という.

- $C = \{C_n, \partial_n\}$, $D = \{D_n, \partial_n\}$ をチェイン複体とする（境界準同型にはチェイン複体によらずに ∂ を使うことが多い. C の境界準同型であることをはっきりさせたいときは ∂_n^C 等のように書くことがある）.
  準同型の族 $\{f_n \colon C_n \to D_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $f_{n-1}\partial_n = \partial_n f_n$ をみたすとき, チェイン写像という:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}"'] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\partial_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

  チェイン複体を対象とし, チェイン写像を射とする圏を, チェイン複体の圏という.

3. $C = \{C_n\}$ をチェイン複体とする.

$$Z_n(C) = \operatorname{Ker}\partial_n$$
$$B_n(C) = \operatorname{Im}\partial_{n+1}$$

とおく. $\partial_n\partial_{n+1} = 0$ なので, $B_n \subset Z_n$ である. $H_n(C) = Z_n/B_n$ を C の n 次ホモロジー群という.
$f \colon C \to D$ をチェイン写像とする.

$$f_n(Z_n) \subset Z_n \quad f_n(B_n) \subset B_n$$

であるから, f_n は準同型 $f_* \colon H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C) \to Z_n(D)/B_n(D)$ を誘導する.
チェイン複体 C に対し, 次数つき加群 $\{H_n(C)\}$ を, チェイン写像 f に対し, f の誘導する準同型 f_* を対応させることで, 関手 $H_\bullet \colon (\mathbf{Ch}_R) \to (\mathbf{GrMod}_R)$ が得られる.

4. $f, g \colon C \to D$ をチェイン写像とする.
準同型の族 $\Psi = \{\Psi_n \colon C_n \to D_{n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は, 任意の n に対し

$$f_n - g_n = \partial_{n+1}\Psi_n + \Psi_{n-1}\partial_n$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}"] & C_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d] \arrow[dl] & C_n \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_n - g_n"] \arrow[dl, "\Psi_n"'] & C_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"] \arrow[d] \arrow[dl, "\Psi_{n-1}"] & \cdots \arrow[dl] \\
\cdots \arrow[r, "\partial_{n+2}"'] & D_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"'] & D_n \arrow[r, "\partial_n"'] & D_{n-1} \arrow[r, "\partial_{n-1}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

をみたすとき, f から g へのチェインホモトピーという.
f から g へのチェインホモトピーが存在するとき, f と g はチェインホモトピックであるといい, $f \simeq g$ と書く.

- チェインホモトピックという関係は $(\mathbf{Ch}_R)(C,D)$ 上の同値関係である.
- $f_0, f_1 \in (\mathbf{Ch}_R)(C,D)$, $g_0, g_1 \in (\mathbf{Ch}_R)(D,E)$ とする. $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$ ならば $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$ である.
  よって, 写像の合成は, 写像
  $$(\mathbf{Ch}_R)(C,D)/{\simeq} \times (\mathbf{Ch}_R)(D,E)/{\simeq} \to (\mathbf{Ch}_R)(C,E)/{\simeq}$$
  を定める.
  これを射の合成とすることで, チェイン複体を対象とし, チェイン写像のホモトピー類を射とする圏が定まる. これをチェイン複体のホモトピー圏といって $ho(\mathbf{Ch}_R)$ と書く.
- $f \simeq g\colon C \to D$ であれば $f_* = g_*\colon H_n(C) \to H_n(D)$ であることが分かる. よって, 関手 $H_\bullet\colon ho((\mathbf{Ch}_R)) \to (\mathbf{GrMod}_R)$ が得られる.

定義 2.41. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする.

1. F は**忠実 (faithful)** である.
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対し, $F\colon \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{D}(F(A),F(B))$ が単射.
2. F は**充満 (full)** である.
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $A, B \in \mathcal{C}$ に対し, $F\colon \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{D}(F(A),F(B))$ が全射.
3. F は**同型 (isomorphism)** である.
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $GF = 1_{\mathcal{C}}$ と $FG = 1_{\mathcal{D}}$ をみたすような関手 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在する.

例 2.42. 例 2.28 の忘却関手は全て忠実である.

1〜4 は充満ではない.

5 もたいていの k に対し充満ではない. 例えば $U\colon (\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}) \to (\mathbf{Abel})$ は充満ではない. $c\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を共役をとる写像, すなわち $c(z) = \bar{z}$ とすると, c は $\mathbb{C}$ 線形ではないが, $c \in (\mathbf{Abel})(\mathbb{C},\mathbb{C})$ である.

6,7 は忠実充満（英語だと fully faithful ということが多いが, 日本語だと「充満忠実」より「忠実充満」ということが多いような気がする）.

注意 2.43. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が忠実とか充満というのは, $F\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ や $F\colon \mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Mor}\,\mathcal{D}$ が単射とか全射ということではない.

例えば, $U\colon (\mathbf{Top}) \to (\mathbf{Set})$ は忠実であるが, X を元を 2 個以上含む集合とすると, X に密着位相をいれた位相空間と離散位相をいれた空間は違う（同相でもない）が, 集合としては同じ: $I(X) \not\cong D(X)$ だが $U(I(X)) = U(D(X))$. よって $U\colon \mathrm{Ob}\,(\mathbf{Top}) \to \mathrm{Ob}\,(\mathbf{Set})$ は単射ではない. また, $U(1_{I(X)}) = 1_X = U(1_{D(X)})$ だから, $U\colon \mathrm{Mor}\,(\mathbf{Top}) \to \mathrm{Mor}\,(\mathbf{Set})$ も単射ではない（もちろん $U\colon (\mathbf{Top})(I(X),I(X)) \to (\mathbf{Set})(I(X),I(X))$ は

（全）単射）．

$U\colon \mathbf{(set)} \to \mathbf{(Set)}$ は充満であるが，もちろん，$U\colon \mathrm{Ob}\,\mathbf{(set)} \to \mathrm{Ob}\,\mathbf{(Set)}$, $U\colon \mathrm{Mor}\,\mathbf{(set)} \to \mathrm{Mor}\,\mathbf{(Set)}$ は全射ではない．

1 について，（ZF では）$U\colon \mathrm{Ob}\,\mathbf{(Grp)} \to \mathrm{Ob}\,\mathbf{(Set)}$ が全射だということと AC は同値だということが知られている．`https://mathoverflow.net/questions/12973/does-every-non-empty-set-admit-a-group-structure-in-zf`

問 2.44. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が同型 $\Leftrightarrow$ $F\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ が全単射であり, F は充満かつ忠実.

定義 2.45. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．

1. F が単射（全射, 同型射）を**保つ (preserves)**.
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f \in \mathcal{C}$ が単射（全射, 同型射）ならば $F(f) \in \mathcal{D}$ もそうである．
2. F が単射（全射, 同型射）を**反射する (reflects)**.
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $F(f) \in \mathcal{D}$ が単射（全射, 同型射）ならば $f \in \mathcal{C}$ もそうである．

補題 2.46. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする．

1. F は同型射を保つ．
2. F が忠実ならば, F は単射および全射を反射する．
3. F が充満かつ忠実ならば, F は同型射を反射する．

Proof.

1. やさしい．
2. F が忠実で，$F(f)$ が単射であるとする．射 $g, h \in \mathcal{C}$ について，$fg = fh \in \mathcal{C}$ とすると，$F(f)F(g) = F(fg) = F(fh) = F(f)F(h) \in \mathcal{D}$．$F(f)$ は単射なので $F(g) = F(h)$. F は忠実であるから $g = h$, よって f は単射.
   全射の方も同様（双対）．
3. F が充満かつ忠実で，$F(f)$ が同型射であるとする．$F(f)$ は同型射なので逆射 $F(f)^{-1}$ が存在する．F は充満であるから, 射 $g \in \mathcal{C}$ で, $F(g) = F(f)^{-1}$ となるものがある．$F(fg) = F(f)F(g) = F(f)F(f)^{-1} = 1 = F(1)$ であり, F は忠実であるから $fg = 1$. 同様にして $gf = 1$ となり f は同型射.

□

問 2.47. (1) を示せ.

例 2.48. 閉区間 $[0, 1]$ を I で表す.

X, Y を位相空間とする．

1. $f, g\colon X \to Y$ を連続写像とする．連続写像

$$H\colon X \times I \to Y$$

で, 任意の $x \in X$ に対し

$$H(x, 0) = f(x)$$
$$H(x, 1) = g(x)$$

をみたすものが存在するとき, f と g は**ホモトピック (homotopic)** であるといい, $f \simeq g$ と書く．また, H を f から g への**ホモトピー (homotopy)** という.

2. 連続写像 $f\colon X \to Y$ は, 連続写像 $g\colon Y \to X$ で,

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$
$$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

をみたすものが存在するとき, **ホモトピー同値写像 (homotopy equivalence)** という.

また, このとき g を f の**ホモトピー逆写像 (homotopy inverse)** とよぶ.

3. X から Y へのホモトピー同値写像が存在するとき, X と Y は**ホモトピー同値 (homotopy equivalent)** であるという.

4. ホモトピックであるという関係「$\simeq$」は $\mathbf{(Top)}(X, Y)$ 上の同値関係である.

$\mathbf{(Top)}(X, Y)$ の, ホモトピックという同値関係による商集合

$$[X, Y] = \mathbf{(Top)}(X, Y)/\simeq$$

を X から Y への**ホモトピー集合 (homotopy set)** という.

$f\colon X \to Y$ の同値類をホモトピー類といい, $[f]$ と書くが, しばしば [ ] を略して f と書く.

5. $f_0, f_1 \in \mathbf{(Top)}(X, Y)$, $g_0, g_1 \in \mathbf{(Top)}(Y, Z)$ とする．$f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$ ならば $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$ である.

よって, 写像の合成は, 写像

$$[X, Y] \times [Y, Z] \to [X, Z]$$

を定める.

これを射の合成とすることで, 位相空間を対象とし, 連続写像のホモトピー類を射とする圏が定まる．これを位相空間のホモトピー圏といって $ho\mathbf{(Top)}$ と書く.

6. $f\colon X \to Y$ がホモトピー同値写像であることと, $f\colon X \to Y \in ho\mathbf{(Top)}$ が $ho\mathbf{(Top)}$ における同型であることは同値である.

D^n は一点とホモトピー同値である.

Proof. 見やすさのため, 一点 $*$ からなる集合（空間）$\{*\}$ を $*$ と書く. $f\colon D^n \to *$ を $f(x) = *$, $g\colon * \to D^n$ を $g(*) = 0 := (0, \dots, 0)$ で定める. 明らかに $f \circ g = \mathrm{id}$. よって $f \circ g \simeq \mathrm{id}$. 一方, $H\colon D^n \times I \to D^n$ を

$$H(x, t) = tx$$

で定めると, H は連続で,

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= 0x = 0 = g \circ f(x) \\ H(x, 1) &= 1x = x = \mathrm{id}_{D^n}(x) \end{aligned}$$

だから, $g \circ f \simeq \mathrm{id}$. □

一般に, 一点とホモトピー同値である空間を**可縮 (contractible)** であるという.

さて, 関手

$$F\colon ho(\mathbf{Top}) \to (\mathbf{Abel})$$

で

$$\begin{aligned} F(S^{n-1}) &= \mathbb{Z} \\ F(*) &= 0 \end{aligned}$$

をみたすものが存在するとする（実際に存在する）.

これを仮定すると, $\mathbb{Z} \ncong 0$ なので S^{n-1} は一点とホモトピー同値ではない, つまり S^{n-1} は可縮ではないことが分かる.

また, 連続写像 $f\colon D^n \to S^{n-1}$ で, $f|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$ となるものは存在しないことが次のようにして分かる. $i\colon S^{n-1} \to D^n$ を包含写像とする. $f|_{S^{n-1}} = \mathrm{id}$ が成り立つとする. $f|_{S^{n-1}} = fi$ なので, $fi = \mathrm{id}$ が成り立つ. よって

$$\mathrm{id}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{id}_{F(S^{n-1})} = F(\mathrm{id}_{S^{n-1}}) = F(fi) = F(f)F(i)$$

となる. D^n は可縮なので $F(D^n) \cong F(*) = 0$ ゆえ右辺は 0 写像となり不合理.

$$\begin{tikzcd} D^n \arrow[r, "f"] & S^{n-1} \\ S^{n-1} \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "F(f)"] & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \arrow[u, "F(i)"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

例 2.49. 上と同様な議論で, 群 G に対し, その中心 $Z(G)$ を対応させるような関手 $Z\colon \mathbf{(Grp)} \to \mathbf{(Set)}$ は存在しないことが分かる.

$$\begin{tikzcd} S_3 \arrow[r, "\mathrm{sgn}"] & \{\pm 1\} \\ \langle (1,2) \rangle \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \{e\} \arrow[r] & \{\pm 1\} \\ \langle (1,2) \rangle \arrow[u] \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

2.3　自然変換

定義 2.50 (Natural transformation)**.** $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする.

1. F から G への**自然変換 (natural transformation)** $\alpha\colon F \to G$ とは, $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ で添字付けられた $\mathcal{D}$ の射の族 $\{\alpha_A : F(A) \to G(A)\}_{A \in \mathcal{C}}$ で, 任意の射 $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ に対し次の図式を可換にするもの:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B). \end{tikzcd}$$

自然変換を次のような図式で表すことがある:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

2. 自然変換 α は, 全ての $A \in \mathcal{C}$ に対し α_A が $\mathcal{D}$ における同型射であるとき, **自然同型 (natural isomorphism)** と呼ばれる.
3. 関手 F から G への自然同型が存在するとき, F と G は**同型 (isomorphic)** であるといい, $F \cong G$ と表す.
4. F から G への自然変換全体のなすクラスを $\mathrm{Nat}(F, G)$ で表す.

定義 2.51.　1. 自然変換 $\alpha\colon F \to G$ と $\beta\colon G \to H$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

に対し,

$$(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A \colon F(A) \xrightarrow{\alpha_A} G(A) \xrightarrow{\beta_A} H(A)$$

と定めると, 自然変換

$$\beta \circ \alpha \colon F \to H$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "F"] \arrow[rr, bend right, "H"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

が得られる. これを垂直な合成という.

2. 自然変換 $\alpha \colon F \to G$ と $\alpha' \colon F' \to G'$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{C}' \arrow[r, bend left, "F'"] \arrow[r, bend right, "G'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'"] & \mathcal{C}'' \end{tikzcd}$$

に対し, α' の自然性から次は可換:

$$\begin{tikzcd} F'F(A) \arrow[r, "\alpha'_{F(A)}"] \arrow[d, "F'(\alpha_A)"'] & G'F(A) \arrow[d, "G'(\alpha_A)"] \\ F'G(A) \arrow[r, "\alpha'_{G(A)}"'] & G'G(A). \end{tikzcd}$$

$A \in \mathcal{C}$ に対し

$$(\alpha' * \alpha)_A = \alpha'_{G(A)} \circ F'(\alpha_A) = G'(\alpha_A) \circ \alpha'_{F(A)} \colon F'F(A) \to G'G(A)$$

と定めると, 自然変換

$$\alpha' * \alpha \colon F'F \to G'G$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, bend left, "F'F"] \arrow[rr, bend right, "G'G"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\alpha'*\alpha"] & & \mathcal{C}'' \end{tikzcd}$$

が得られる. 実際, $f \colon A \to B \in \mathcal{C}$ に対し, α の自然性より, 左の図式は可換. よって, 右の図式の左の四角形は可換. また, α' の自然性より, 右の図式の右の四角形は

可換.

$$
\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & G(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F'F(A) \arrow[r, "F'(\alpha_A)"] \arrow[d, "F'F(f)"'] & F'G(A) \arrow[r, "\alpha'_{G(A)}"] \arrow[d, "F'G(f)"'] & G'G(A) \arrow[d, "G'G(f)"] \\
F'F(B) \arrow[r, "F'(\alpha_B)"'] & F'G(B) \arrow[r, "\alpha'_{G(B)}"'] & G'G(B)
\end{tikzcd}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
(\alpha' * \alpha)_B \circ F'F(f) &= \alpha'_{G(B)} \circ F'(\alpha_B) \circ F'F(f) \\
&= G'G(f) \circ \alpha'_{G(A)} \circ F'(\alpha_A) = G'G(f) \circ (\alpha' * \alpha)_A.
\end{aligned}
$$

これを水平合成という.

誤解の恐れがないときは, しばしば $*$ を省略して $\alpha'\alpha$ と書く.

3. $(1_F)_A = 1_{F(A)}$ により定まる自然変換を恒等自然変換といい, $1_F \colon F \to F$ と書く.

問 2.52. 垂直合成 $\beta \circ \alpha$ が自然変換であることを示せ.

補題 2.53. $\alpha \colon F \to G$ を自然変換とする.

α が自然同型 $\Leftrightarrow$ 自然変換 $\beta \colon G \to F$ で, $\beta \circ \alpha = 1_F$, $\alpha \circ \beta = 1_G$ をみたすものが存在する.

Proof. 自然変換 $\beta \colon G \to F$ で, $\beta \circ \alpha = 1_F$, $\alpha \circ \beta = 1_G$ をみたすものが存在するとする. $A \in \mathcal{C}$ に対し

$$
\begin{aligned}
\beta_A \circ \alpha_A &= (\beta \circ \alpha)_A = (1_F)_A = 1_{F(A)} \\
\alpha_A \circ \beta_A &= (\alpha \circ \beta)_A = (1_G)_A = 1_{G(A)}
\end{aligned}
$$

であるから, $\alpha_A \colon F(A) \to G(A) \in \mathcal{D}$ は同型射.

一方, 任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し $\alpha_A \colon F(A) \to G(A)$ が $\mathcal{D}$ における同型射であるとする. $\beta_A \colon G(A) \to F(A)$ を α_A の逆射, すなわち, $\beta_A\alpha_A = 1_{F(A)}$, $\alpha_A\beta_A = 1_{G(A)}$ をみたす射であるとする. $\beta = \{\beta_A\}$ が自然変換であることを示そう. $f \colon A \to B \in \mathcal{C}$ とする. α の自然性より $\alpha_B F(f) = G(f)\alpha_A$ が成り立つ. よって

$$
\begin{aligned}
F(f)\beta_A = 1_{F(B)}F(f)\beta_A &= \beta_B\alpha_B F(f)\beta_A \\
&= \beta_B G(f)\alpha_A\beta_A = \beta_B G(f) 1_{G(A)} = \beta_B G(f).
\end{aligned}
$$

あきらかに $\beta \circ \alpha = 1_F$, $\alpha \circ \beta = 1_G$ である. □

例 2.54. 例 2.33, 2.36 の関手

$$\mathcal{P}, \mathbf{2}^{-} \colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Poset)}$$

を考える．集合 X に対し, 写像

$$\chi_X\colon \mathcal{P}(X) \to \mathbf{2}^X, \quad \chi_X(A) = \chi_A$$

は順序同型である．ただし, χ_A は $A \subset X$ の特性関数, すなわち

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

で与えられる写像.

写像 $f\colon X \to Y$ と, $B \subset Y$ に対し, $\chi_{f^{-1}(B)} = \chi_B \circ f$ であるから, $\chi\colon \mathcal{P} \to \mathbf{2}^-$ は自然同型である.

例 2.55. 双対ベクトル空間, 二重双対ベクトル空間

定義 2.56. 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ は, $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$ と $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$ をみたす関手 $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ が存在するとき, **同値 (equivalence)** と呼ばれる．圏 $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ の間に同値が存在するとき, $\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ は**同値 (equivalent)** であるという.

2.4　圏の例, 構成

定義 2.57 (Subcategory)**.** $\mathcal{C}$ を圏とする.

1. $\mathcal{C}$ の**部分圏（subcategory）** $\mathcal{A}$ とは以下の data
   (i) 部分クラス $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \subset \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$
   (ii) $\mathcal{A}$ の各順序対に対し定められた部分集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$
   からなり, 次の条件をみたすものである:
   (a) 全ての $A \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ に対し, $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, A)$.
   (b) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B)$ たちは $\mathcal{C}$ の合成について閉じている.
   $\mathcal{C}$ の合成により部分圏 $\mathcal{A}$ は圏となる．また, 包含 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{A} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ と $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ は忠実関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ を定める．これを**包含関手**という.
2. $\mathcal{C}$ の部分圏 $\mathcal{A}$ は, 包含関手が充満である, すなわち, 全ての $A, B \in \mathcal{A}$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ であるとき, **充満部分圏（full subcategory）**という.

例 2.58. (set), (Set$^{\mathbf{inj}}$). 忘却関手について注意?

定義 2.59 (Comma category)**.** $F\colon I \to \mathcal{C}$ と $G\colon J \to \mathcal{C}$ を関手とする．comma category $(F \downarrow G)$ を以下のように定義する:

$(F \downarrow G)$ の対象は $i \in \operatorname{Ob} I$, $j \in \operatorname{Ob} J$, $f \colon F(i) \to G(j) \in \mathcal{C}$ からなる三組 (i, j, f).

$(F \downarrow G)$ における射 $(i, j, f) \to (i', j', g)$ は, 射 $u \colon i \to i' \in I$ と $v \colon j \to j' \in J$ のペア (u, v) で, 次の図式が可換となるもの:

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "f"'] & F(i') \arrow[d, "g"] \\ G(j) \arrow[r, "G(v)"'] & G(j'). \end{tikzcd}$$

射の合成は自然に定まるもの.

G が identity $1_{\mathcal{C}} \colon \mathcal{C}$ のとき, $(F \downarrow 1_{\mathcal{C}})$ を $(F \downarrow \mathcal{C})$ と書く.

$(F \downarrow \mathcal{C})$ の対象は $i \in \operatorname{Ob} I$, $A \in \mathcal{C}$, $f \colon F(i) \to A \in \mathcal{C}$ からなる三組 (i, A, f).

$(F \downarrow \mathcal{C})$ における射 $(i, A, f) \to (j, B, g)$ は, 射 $u \colon i \to j \in I$ と $h \colon A \to B \in \mathcal{C}$ のペア (u, h) で, 次の図式が可換となるもの:

$$\begin{tikzcd} F(i) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "f"'] & F(j) \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "h"'] & B. \end{tikzcd}$$

いくつかよく使われる例を挙げよう.

$\mathbf{1}$ を一点集合とする.

圏 $\mathcal{C}$ の対象 $C \in \mathcal{C}$ に対し, $\Delta_C \colon \mathbf{1} \to \mathcal{C}$ を C に値をとる定値関手とする. このとき, comma category $(\Delta_C \downarrow 1_{\mathcal{C}})$ は category of objects under C とよばれ, $(C \downarrow \mathcal{C})$ または $C/\mathcal{C}$ と書かれる. （本質的には）$C/\mathcal{C}$ の対象は, 射 $f \colon C \to D \in \mathcal{C}$ で, $C/\mathcal{C}$ の射は, $\mathcal{C}$ の射で次が可換になるもの:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ D \arrow[rr] & & D'. \end{tikzcd}$$

同様に, comma category $(1_{\mathcal{C}} \downarrow \Delta_C)$ は category of objects over C とよばれ, $(\mathcal{C} \downarrow C)$ または $\mathcal{C}/C$ と書かれる.

もう少し一般的に, 関手 $F \colon I \to \mathcal{C}$ に対し, comma category $(\Delta_C \downarrow F)$ は, $(C \downarrow F)$ あるいは C/F と書かれる. C/F の対象は, $i \in I$ と射 $f \colon C \to F(i)$ のペア (i, f) で, (i, f)

から (j,g) への射は $u\colon i \to j \in I$ で次が可換になるもの:

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(u)"'] & & F(j).
\end{tikzcd}
$$

関手 $F\colon I \to \mathbf{(Set)}$ と $\Delta_{\mathbf{1}}\colon \mathbf{1} \to \mathbf{(Set)}$ に対し, comma category $(\Delta_{\mathbf{1}} \downarrow F)$ を $(\mathbf{1} \downarrow F)$ と書く. 写像 $\mathbf{1} \to F(i)$ を定めることと, $F(i)$ の元を一つとることは同じなので, $(\mathbf{1} \downarrow F)$ の対象は I の対象 i と $x \in F(i)$ のペア (x,i) と考えてよい. (x,i) から (x',i') への射は, 射 $u\colon i \to i' \in I$ で, $F(u)(x) = x'$ となるもの.

補題 2.60. $F\colon I \to \mathcal{C}$, $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする:

$$
I \xrightarrow{F} \mathcal{C} \xrightarrow{G} \mathcal{D}
$$

G は関手 $(F \downarrow \mathcal{C}) \to (GF \downarrow \mathcal{D})$ を定める.

混乱のおそれがなければ, この関手を同じ G で表す.

Proof. $(i,A,f) \in (F \downarrow \mathcal{C})$, $F(i) \xrightarrow{f} A \in \mathcal{C}$, に対し $(i, G(A), G(f))$, $GF(i) \xrightarrow{G(f)} G(A) \in \mathcal{D}$ を, 射 $(u,h)\colon (i,A,f) \to (j,B,g)$

$$
\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r, "F(u)"] \arrow[d, "f"'] & F(j) \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}
$$

に対し, $(u, G(h))$

$$
\begin{tikzcd}
GF(i) \arrow[r, "GF(u)"] \arrow[d, "G(f)"'] & GF(j) \arrow[d, "G(g)"] \\
G(A) \arrow[r, "G(h)"'] & G(B)
\end{tikzcd}
$$

を対応させる. □

補題 2.61. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手とする.

$\mathcal{D}$ が始対象 $\emptyset$ を持てば, $(\emptyset \downarrow F) \cong \mathcal{C}$ である.

$\mathcal{D}$ が終対象 $\mathbf{1}_{\mathcal{D}}$ を持てば, $(F \downarrow \mathbf{1}_{\mathcal{D}}) \cong \mathcal{C}$ である.

Proof. あきらかに射影 $(\emptyset \downarrow F) \to \mathcal{C}$ と $(F \downarrow \mathbf{1}_{\mathcal{D}}) \to \mathcal{C}$ は同型射である. □

定義 2.62 (Functor category)**.** $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を圏とする. $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への関手全体を対象とし, 自然変換を射, 垂直合成を合成とする圏を **functor category** といい, $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ で表す.

一般に $\mathrm{Hom}_{[\mathcal{C},\mathcal{D}]}(F,G)=\mathrm{Nat}(F,G)$ は集合ではなく, $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ は局所小圏ではない.

$\mathcal{C}$ が小圏であれば, $\mathrm{Hom}_{[\mathcal{C},\mathcal{D}]}(F,G)=\mathrm{Nat}(F,G)$ は集合となり, $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ は局所小圏である.

補題 2.53 より, $\mathcal{C}$ から $\mathcal{D}$ への二つの関手が同型（定義 2.50）であることと, $[\mathcal{C},\mathcal{D}]$ の対象として同型であることは同じことである.

注意!!! 以下, 記号の使い方を何度か変更を繰り返しているので, タイポがある可能性がある.

補題 2.63. 次の状況

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=U}] \arrow[r, "F'"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=60, "F''"'{name=L}] \arrow[from=U, to=M, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[from=M, to=L, Rightarrow, "\alpha'"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "G"{name=U2}] \arrow[r, "G'"{name=M2, description}] \arrow[r, bend right=60, "G''"'{name=L2}] \arrow[from=U2, to=M2, Rightarrow, "\beta"] \arrow[from=M2, to=L2, Rightarrow, "\beta'"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

を考える. このとき次が成り立つ.

$$(\beta' * \alpha')\circ(\beta * \alpha)=(\beta'\circ\beta)*(\alpha'\circ\alpha)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, bend right=60, "F''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha'\circ\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "G"] \arrow[r, bend right=60, "G''"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta'\circ\beta"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "GF"{name=U}] \arrow[r, "G'F'"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=60, "G''F''"'{name=L}] \arrow[from=U, to=M, Rightarrow, "\beta\alpha"] \arrow[from=M, to=L, Rightarrow, "\beta'\alpha'"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

Proof. β と β' の自然性から次は可換である.

$$\begin{tikzcd}
GF(A) \arrow[r, "\beta_{F(A)}"] \arrow[d, "G(\alpha_A)"'] & G'F(A) \arrow[r, "\beta'_{F(A)}"] \arrow[d, "G'(\alpha_A)"] & G''F(A) \arrow[d, "G''(\alpha_A)"] \\
GF'(A) \arrow[r, "\beta_{F'(A)}"] \arrow[d, "G(\alpha'_A)"'] & G'F'(A) \arrow[r, "\beta'_{F'(A)}"] \arrow[d, "G'(\alpha'_A)"] & G''F'(A) \arrow[d, "G''(\alpha'_A)"] \\
GF''(A) \arrow[r, "\beta_{F''(A)}"'] & G'F''(A) \arrow[r, "\beta'_{F''(A)}"'] & G''F''(A)
\end{tikzcd}$$

よって

$$\begin{aligned}((\beta' * \alpha') \circ (\beta * \alpha))_A &= (\beta' * \alpha')_A \circ (\beta * \alpha)_A \\ &= \beta'_{H(A)} \circ G'(\alpha'_A) \circ \beta_{G(A)} \circ F'(\alpha_A) \\ &= \beta'_{H(A)} \circ \beta_{H(A)} \circ F'(\alpha'_A) \circ F'(\alpha_A) \\ &= (\beta' \circ \beta)_{H(A)} \circ F'(\alpha'_A \circ \alpha_A) \\ &= (\beta' \circ \beta)_{H(A)} \circ F'((\alpha' \circ \alpha)_A) \\ &= ((\beta' \circ \beta) * (\alpha' \circ \alpha))_A\end{aligned}$$

□

系 **2.64.** 関手の合成は, 関手

$$\begin{tikzcd}[\mathcal{C}, \mathcal{D}] \times [\mathcal{D}, \mathcal{E}] \arrow[r] & [\mathcal{C}, \mathcal{E}] \\ (F, G) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "(\alpha,\beta)"'] & GF \arrow[d, "\beta*\alpha"] \\ (F', G') \arrow[r, mapsto] & G'F'\end{tikzcd}$$

を定める.

Proof. 補題 2.63 より, この対応は（自然変換の）合成を保つ. また, あきらかに $1_G * 1_F = 1_{GF}$ である. □

問 **2.65.** $1_G * 1_F = 1_{GF}$ を示せ.

$$\begin{tikzcd}\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_F"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "G"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow 1_G"] & \mathcal{E}\end{tikzcd}$$

補題 **2.66.** $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ を圏とする.

1. $C \in \mathcal{C}$ を $\mathcal{C}$ の対象とする. $i_C(D) = (C, D)$, $i_C(g) = (1_C, g)$ により, 関手 $i_C \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ が定まる.

$$\begin{tikzcd}\mathcal{D} \arrow[r, "i_C"] & \mathcal{C} \times \mathcal{D} \\ D \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & (C, D) \arrow[d, "(1_C, g)"] \\ D' \arrow[r, mapsto] & (C, D')\end{tikzcd}$$

また, $f\colon C \to C' \in \mathcal{C}$ と $D \in \mathcal{D}$ に対し,

$$(i_f)_D = (f, 1_D)\colon i_C(D) = (C, D) \to (C', D) = i_{C'}(D)$$

と定めると, 自然変換 $i_f\colon i_C \to i_{C'}$ が得られる.

2. $\widehat{1}(C) = i_C$, $\widehat{1}(f) = i_f$ により, 関手 $\widehat{1}\colon \mathcal{C} \to [\mathcal{D}, \mathcal{C} \times \mathcal{D}]$ が得られる.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\widehat{1}"] & {[\mathcal{D}, \mathcal{C} \times \mathcal{D}]} \\ C \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & i_C \arrow[d, "i_f"] \\ C' \arrow[r, mapsto] & i_{C'} \end{tikzcd}$$

3. $D \in \mathcal{D}$ を $\mathcal{D}$ の対象とする. $j_D(C) = (C, D)$, $j_D(f) = (f, 1_D)$ により, 関手 $j_D\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ が定まる.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "j_D"] & \mathcal{C} \times \mathcal{D} \\ C \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & (C, D) \arrow[d, "{(f,1_D)}"] \\ C' \arrow[r, mapsto] & (C', D) \end{tikzcd}$$

また, $g\colon D \to D' \in \mathcal{D}$ と $C \in \mathcal{C}$ に対し,

$$(j_g)_C = (1_C, g)\colon j_D(C) = (C, D) \to (C, D') = j_{D'}(C)$$

と定めると, 自然変換 $j_g\colon j_D \to j_{D'}$ が得られる.

4. $\widehat{1}(D) = j_D$, $\widehat{1}(g) = j_g$ により, 関手 $\widehat{1}\colon \mathcal{D} \to [\mathcal{C}, \mathcal{C} \times \mathcal{D}]$ が得られる.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\widehat{1}"] & {[\mathcal{C}, \mathcal{C} \times \mathcal{D}]} \\ D \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & j_D \arrow[d, "j_g"] \\ D' \arrow[r, mapsto] & j_{D'} \end{tikzcd}$$

Proof. あきらか. □

系 2.67. $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ を関手とする. $G_*(F) = GF$, $G_*(\alpha) = 1_G * \alpha$ により, 関手

$G_*\colon [\mathcal{C},\mathcal{D}] \to [\mathcal{C},\mathcal{E}]$ が定まる．

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C},\mathcal{D}]} \arrow[r, "G_*"] & {[\mathcal{C},\mathcal{E}]} \\
F \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\alpha"'] & GF \arrow[d, "1_G*\alpha"] \\
F' \arrow[r, mapsto] & GF'
\end{tikzcd}$$

注意 2.68. $A \in \mathcal{C}$ に対し, $(1_G * \alpha)_A = (1_G)_{F'(A)} \circ G(\alpha_A) = G(\alpha_A)$ である．しばしば $1_G * \alpha$ を $G * \alpha$ とか $G\alpha$ などと書く．

Proof. G_* は, 次の合成である．

$$[\mathcal{C},\mathcal{D}] \xrightarrow{j_G} [\mathcal{C},\mathcal{D}] \times [\mathcal{D},\mathcal{E}] \xrightarrow{\text{合成}} [\mathcal{C},\mathcal{E}]$$

□

系 2.69. $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ が同型ならば $G_*\colon [\mathcal{C},\mathcal{D}] \cong [\mathcal{C},\mathcal{E}]$.

Proof. $H\colon \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ を関手で $HG = 1_{\mathcal{D}}, GH = 1_{\mathcal{E}}$ をみたすものとすると, $H_*G_* = 1_{[\mathcal{C},\mathcal{D}]}$, $G_*H_* = 1_{[\mathcal{C},\mathcal{E}]}$ であることがすぐわかる． □

補題 2.70. 一点集合 $\{*\}$ を離散圏とみたもの, すなわち, 対象は一点のみ $\{*\}$, 射は恒等射 1_* のみである圏, を $*$ と書く．$\mathcal{C}$ を圏とする．

1. 射影は同型 $\mathcal{C} \times * \cong \mathcal{C} \cong * \times \mathcal{C}$ を与える．
2. $C \in \mathcal{C}$ に対し, $i_C(*) = C$ という関手 $i_C\colon * \to \mathcal{C}$ を対応させることで関手 $\mathcal{C} \to [*,\mathcal{C}]$ が得られる．また, $e(F) = F(*)$, $e(\alpha) = \alpha_*$ と定めると, 関手 $e\colon [*,\mathcal{C}] \to \mathcal{C}$ が得られる．
   これらは同型で, 互いに他の逆.

Proof. あきらか.

なお, $p\colon \mathcal{C} \times * \to \mathcal{C}$ を射影とすると, 合成

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\widehat{1}} [*,\mathcal{C} \times *] \xrightarrow{p_*} [*,\mathcal{C}]$$

が 2 の関手である（が, 関手であることは, 直接確認した方がわかりやすいだろう）． □

系 2.71. $A \in \mathcal{C}$ と $F \in [\mathcal{C},\mathcal{D}]$ に対し, $\mathrm{ev}(A,F) \coloneqq F(A)$, 射 $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ と自然変換 $\alpha\colon F \to G$ に対し, $\mathrm{ev}(f,\alpha) \coloneqq \alpha_B F(f) = G(f)\alpha_A\colon F(A) \to G(B)$ と定めると, 関手

(bifunctor) $\mathrm{ev}\colon \mathcal{C}\times[\mathcal{C},\mathcal{D}]\to\mathcal{D}$ が得られる.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\times[\mathcal{C},\mathcal{D}] \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & \mathcal{D} \\
(A,F) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "{(f,\alpha)}"'] & F(A) \arrow[d, "\alpha_B F(f)=G(f)\alpha_B"] \\
(B,G) \arrow[r, mapsto] & G(B)
\end{tikzcd}$$

これを **evaluation functor** という.

Proof. ev は合成

$$\mathcal{C}\times[\mathcal{C},\mathcal{D}] \xrightarrow{\cong} [*,\mathcal{C}]\times[\mathcal{C},\mathcal{D}] \xrightarrow{\text{合成}} [*,\mathcal{D}] \xrightarrow[\cong]{e} \mathcal{D}$$

である. □

系 2.72. $F\colon \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ を bifunctor とする.
$\mathcal{C}$ の対象 $C\in\mathcal{C}$ に対し, F の $\{C\}\times\mathcal{D}$ への制限

$$F(C,-)=F\circ i_C\colon \mathcal{D}\to\mathcal{E}$$

を, $\mathcal{C}$ の射 $f\colon C\to C'\in\mathcal{C}$ に対し, 自然変換

$$F(f,1_-)\coloneqq\{F(f,1_D)\colon F(C,D)\to F(C',D)\}_{D\in\mathcal{D}}$$

を対応させることで, 関手 $F(\bullet,-)\colon \mathcal{C}\to[\mathcal{D},\mathcal{E}]$ が得られる.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "{F(\bullet,-)}"] & {[\mathcal{D},\mathcal{E}]} \\
C \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & F(C,-) \arrow[d, "{F(f,1_-)}"] \\
C' \arrow[r, mapsto] & F(C',-)
\end{tikzcd}$$

同様に, $D\in\mathcal{D}$ に対し, 関手 $F(-,D)=F\circ j_D\colon \mathcal{C}\to\mathcal{E}$ を, 射 $g\colon D\to D'\in\mathcal{D}$ に対し $F(1_-,g)\coloneqq\{F(1_C,g)\colon F(C,D)\to F(C,D')\}_{C\in\mathcal{C}}$ を対応させることで関手 $F(-,\bullet)\colon \mathcal{D}\to[\mathcal{C},\mathcal{E}]$ が得られる.

Proof. $F(\bullet,-)$, $F(-,\bullet)$ は合成

$$F(\bullet,-)\colon \mathcal{C}\xrightarrow{\widehat{1}}[\mathcal{D},\mathcal{C}\times\mathcal{D}]\xrightarrow{F_*}[\mathcal{D},\mathcal{E}]$$

$$F(-,\bullet)\colon \mathcal{D}\xrightarrow{\widehat{1}}[\mathcal{C},\mathcal{C}\times\mathcal{D}]\xrightarrow{F_*}[\mathcal{C},\mathcal{E}]$$

である. □

系 **2.73.** $[\mathcal{C},[\mathcal{D},\mathcal{E}]] \cong [\mathcal{C}\times\mathcal{D},\mathcal{E}]$.

Proof. チェック! $\square$

2.5　表現可能関手と米田の補題

この節では $\mathcal{C}$ は局所小圏であるとする.

定義 2.74. $\mathcal{C}$ を（局所小）圏とする.

1. bifunctor $\mathrm{Hom}\colon \mathcal{C}^\circ\times\mathcal{C}\to\mathbf{(Set)}$ を以下で定める.
各対象 $(A,B)\in\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{C}$ に対し, 集合 $\mathrm{Hom}(A,B)$ を対応させる.
$\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{C}$ の射 $(f,g)\colon(A,B)\to(A',B')$, すなわち $\mathcal{C}$ の射 $f\colon A'\to A$ と $g\colon B\to B'$（f は $\mathcal{C}^\circ$ における A から A' への射）に対し,
$$\mathrm{Hom}(f,g)(u) = guf\colon A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{g} B'$$
で定まる写像 $\mathrm{Hom}(f,g)\colon\ \mathrm{Hom}(A,B)\to\mathrm{Hom}(A',B')$ を対応させる.
この bifunctor を一つめの変数については反変で二つめの変数については共変である bifunctor $\mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathbf{(Set)}$ と思うことがよくある.
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[r, "\mathrm{Hom}"] & \mathbf{(Set)} & & \\
(A,B) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, shift left, "g"] & \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(f,g)"] & A \arrow[r, "u"] & B \\
(A',B') \arrow[r, mapsto] \arrow[u, shift left, "f"] & \mathrm{Hom}(A',B') & A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[d, "g"] \\
 & & A' \arrow[u, "f"] & B'
\end{tikzcd}$$
2. 系 2.72 より, 関手 $\mathrm{Hom}(\bullet,-)$, $\mathrm{Hom}(-,\bullet)$ が得られるが, これらを h^*, h_* と書く:
$$h^* := \mathrm{Hom}(\bullet,-)\colon \mathcal{C}^o\to[\mathcal{C},\mathbf{(Set)}]$$
$$h_* := \mathrm{Hom}(-,\bullet)\colon \mathcal{C}\to[\mathcal{C}^o,\mathbf{(Set)}]$$
h^* を**反変米田埋め込み関手 (contravariant Yoneda embedding functor)**, h_* を**米田埋め込み関手 (Yoneda embedding functor)** という.
3. $A\in\mathcal{C}$ に対し, $h^*(A)$ を h^A, $h_*(A)$ を h_A と書く:
$$h^A = \mathrm{Hom}(A,-)\colon \mathcal{C}\to\mathbf{(Set)},$$
$$h_A = \mathrm{Hom}(-,A)\colon \mathcal{C}^\circ\to\mathbf{(Set)}.$$

圏 $\mathcal{C}$ を明記する必要があるときは, h^A を $h^A_{\mathcal{C}}$, h_A を $h^{\mathcal{C}}_A$ と書く.

$h^A = \mathrm{Hom}(A, -)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{(Set)}$ は次のような関手である:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "h^A"] & \mathbf{(Set)} & \\
B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & h^A(B) = \mathrm{Hom}(A, B) \arrow[d, "h^A(g)"] & u\colon A \to B \arrow[d, mapsto] \\
C \arrow[r, mapsto] & h^A(C) = \mathrm{Hom}(A, C) & gu\colon A \to B \to C
\end{tikzcd}$$

$h^A(g)$ を g_* と書くことがよくある: $h^A(g)(u) = g_*(u) = gu$.

$h_A = \mathrm{Hom}(-, A)\colon \mathcal{C}^o \to \mathbf{(Set)}$ は次のような反変関手である:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "h_A"] & \mathbf{(Set)} & \\
B \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "g"'] & h_A(B) = \mathrm{Hom}(B, A) & vg\colon B \to C \to A \\
C \arrow[r, mapsto] & h_A(C) = \mathrm{Hom}(C, A) \arrow[u, "h_A(g)"'] & v\colon C \to A \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

$h_A(g)$ を g^* と書くことがよくある: $h_A(g)(v) = g^*(v) = vg$.

4. $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ に対し, $h^*(f)$ を h^f とか f^* と, $h_*(f)$ を h_f とか f_* と書くことがある.

   $h^*(f)\colon h^B \to h^A$ は $v \in h^B(C) = \mathrm{Hom}(B, C)$ に対し

   $$(h^*(f))_C(v) = \mathrm{Hom}(f, 1_C)(v) = vf$$

   により与えられる.

   $h_*(f)$ は, $u \in h_A(C) = \mathrm{Hom}(C, A)$ に対し

   $$(h_*(f))_C(u) = \mathrm{Hom}(1_C, f)(u) = fu$$

   により与えられる.

定義 2.75 (表現可能関手 (Representable functor)). 関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{(Set)}$ は, ある $A \in \mathcal{C}$ と, 自然同型 $F \cong h^A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ が存在するとき**表現可能 (representable)** であるという. このとき A を F の **representative object** という.

反変関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{(Set)}$ は, ある $A \in \mathcal{C}$ と, 自然同型 $F \cong h_A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$ が存在するとき**表現可能 (representable)** であるという. このとき A を F の **representative object** という.

例 2.76. 反変冪集合関手（を **(Set)** への関手とみたもの）

$$\mathbf{(Set)} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbf{(Set)}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{P}(X) \\ Y \arrow[r, mapsto] & \mathcal{P}(Y) \arrow[u, "\mathcal{P}(f)"'] \end{tikzcd}$$

は, $\mathbf{2}^{-} = h_{\mathbf{2}} \colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Set)}$ と同型であるから, 表現可能である.

定理 2.77 (米田の補題 (the Yoneda lemma))**.** $F \colon \mathcal{C} \to \mathbf{(Set)}$ を関手とし, $A \in \mathcal{C}$ とする.

　このとき, A と F について自然な全単射

$$\tau_{F,A} \colon \mathrm{Nat}(h^A, F) \xrightarrow{\cong} F(A)$$

が存在する.

注意 2.78. 一般には $\mathrm{Nat}(F, G)$ は集合とはならないので, 次の「関手」の「合成」を考えることはできない.

$$\mathcal{C} \times [\mathcal{C}, \mathbf{(Set)}] \xrightarrow{h^* \times 1} [\mathcal{C}, \mathbf{(Set)}]^o \times [\mathcal{C}, \mathbf{(Set)}] \overset{\mathrm{Nat}}{\dashrightarrow} \mathbf{(Set)}$$

が, $\tau_{F,A}$ が全単射であるから, $\mathrm{Nat}(h^A, F)$ は集合であるので, 「合成したもの」は次の関手を与える.

$$\mathrm{Nat}(h^-, -) \colon \mathcal{C} \times [\mathcal{C}, \mathbf{(Set)}] \to \mathbf{(Set)}$$

τ が「自然な」というのは, 族 $\{\tau_{F,A}\}$ が二つの関手

$$\mathrm{Nat}(h^-, -) \colon \mathcal{C} \times [\mathcal{C}, \mathbf{(Set)}] \to \mathbf{(Set)}$$
$$\mathrm{ev} \colon \mathcal{C} \times [\mathcal{C}, \mathbf{(Set)}] \to \mathbf{(Set)}.$$

の間の自然変換となるということ.

Proof. まず, 写像 $\tau_{F,A}$ を定義する.

　写像 $\tau_{F,A} \colon \mathrm{Nat}(h^A, F) \to F(A)$ を $\alpha \in \mathrm{Nat}(h^A, F)$ に対し

$$\tau_{F,A}(\alpha) = \alpha_A(1_A) \in F(A)$$

と定める. ただし $1_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ は恒等射.

$$1_A \in \mathrm{Hom}(A, A) = h^A(A) \xrightarrow{\alpha_A} F(A)$$

次に, 写像 $\sigma\colon F(A) \to \mathrm{Nat}(h^A, F)$ を定義する.

$a \in F(A)$ と $B \in \mathcal{C}$ に対し, 写像

$$\sigma(a)_B\colon h^A(B) = \mathrm{Hom}(A, B) \to F(B)$$

を $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ に対し $\sigma(a)_B(f) = F(f)(a)$ により定める. 射 $g\colon B \to C \in \mathcal{C}$ と $f\colon A \to B \in \mathrm{Hom}(A, B) = h^A(B)$ に対し,

$$\begin{aligned} F(g)(\sigma(a)_B(f)) &= F(g)(F(f)(a)) = F(gf)(a) \\ &= \sigma(a)_C(gf) = \sigma(a)_C(h^A(g)(f)), \end{aligned}$$

ゆえ, 次の図式は可換である:

$$\begin{tikzcd} h^A(B) \arrow[r, "\sigma(a)_B"] \arrow[d, "h^A(g)"'] & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\ h^A(C) \arrow[r, "\sigma(a)_C"'] & F(C) \end{tikzcd}$$

すなわち $\sigma(a)\colon h^A \to F$ は自然変換である. これにより写像 $\sigma\colon F(A) \to \mathrm{Nat}(h^A, F)$ が得られる.

$$\sigma(\tau_{F,A}(\alpha))_B(f) = F(f)(\tau_{F,A}(\alpha)) = F(f)\alpha_A(1_A) = \alpha_B h^A(f)(1_A) = \alpha_B(f)$$

ゆえ $\sigma(\tau_{F,A}(\alpha)) = \alpha$.

一方,

$$\tau_{F,A}(\sigma(a)) = \sigma(a)_A(1_A) = F(1_A)(a) = 1_{F(A)}(a) = a$$

であるから, $\tau_{F,A}$ は全単射.

自然性を示そう.

定義 2.74 で見たように, 射 $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ に対し, $g \in h^B(C)$ を $h^f_C(g) = gf \in h^A(C)$ に写すことにより, 自然変換

$$h^f = \mathrm{Hom}(f, 1)\colon h^B = \mathrm{Hom}(B, -) \to \mathrm{Hom}(A, -) = h^A$$

が得られ, 射 $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ と, 関手 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathbf{(Set)}$ の間の自然変換 $\rho\colon F \to G$ に対し, 合成

$$\mathrm{Nat}(h^f, \rho)(\alpha) = \rho\alpha h^f\colon h^B \to h^A \to F \to G.$$

により写像

$$\mathrm{Nat}(h^f, \rho)\colon\ \mathrm{Nat}(h^A, F) \to \mathrm{Nat}(h^B, G)$$

が定まる.

$\tau_{F,A}$ が自然, すなわち次の図式が可換であることを示そう:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(h^A, F) \arrow[r, "\tau_{F,A}"] \arrow[d, "\mathrm{Nat}(h^f,\rho)"'] & F(A) \arrow[d, "\mathrm{ev}(f,\rho)"] \\
\mathrm{Nat}(h^B, G) \arrow[r, "\tau_{G,B}"'] & G(B),
\end{tikzcd}$$

ただし, ev は定義 2.62 で定義した evaluation functor で, $\mathrm{ev}(f,\rho) = \rho_B F(f) = G(f)\rho_A$.

この図式は次のように二つに分割できる:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Nat}(h^A, F) \arrow[r, "\tau_{F,A}"] \arrow[d, "\mathrm{Nat}(h^f,1)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
\mathrm{Nat}(h^B, F) \arrow[r, "\tau_{F,B}"] \arrow[d, "\mathrm{Nat}(1,\rho)"'] & F(B) \arrow[d, "\rho_B"] \\
\mathrm{Nat}(h^B, G) \arrow[r, "\tau_{G,B}"'] & G(B).
\end{tikzcd}$$

$\alpha \in \mathrm{Nat}(h^A, F)$ に対し, 定義および α の自然性 $(\alpha_B h^A(f) = F(f)\alpha_A)$ から

$$\begin{aligned}
\tau_{F,B}\,\mathrm{Nat}(h^f,1)(\alpha) &= \tau_{F,B}(\alpha h^f) = (\alpha h^f)_B(1_B) = \alpha_B h^f_B(1_B) = \alpha_B(f) \\
&= \alpha_B h^A(f)(1_A) = F(f)\alpha_A(1_A) = F(f)\tau_{F,A}(\alpha)
\end{aligned}$$

となる. すなわち,

$$\tau_{F,B}\,\mathrm{Nat}(h^f,1) = F(f)\tau_{F,A}$$

ゆえ, 上の四角形は可換.

一方, $\beta \in \mathrm{Nat}(h^B, F)$ に対し,

$$\rho_B\tau_{F,B}(\beta) = \rho_B(\beta_B(1_B)) = (\rho\beta)_B(1_B) = \tau_{G,B}(\rho\beta) = \tau_{G,B}(\mathrm{Nat}(1,\rho)(\beta))$$

ゆえ, 下の四角形も可換. □

この定理を $\mathcal{C}^\circ$ に適用すると次を得る:

定理 2.77°. $F\colon \mathcal{C}^\circ \to$ **(Set)** を関手とし, $A \in \mathcal{C}$ とする.

このとき, 自然な全単射

$$\tau^{F,A}\colon\ \mathrm{Nat}(h_A, F) \xrightarrow{\cong} F(A)$$

が存在する.

Proof. $\mathcal{C}^o$ における h^A は $\mathcal{C}$ における h_A である:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^o}(A,-) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A) \colon \mathcal{C}^o \to \mathbf{(Set)}$$

□

系 2.79. 米田埋め込み関手

$$h_* \colon \mathcal{C} \to [\mathcal{C}^\circ, \mathbf{(Set)}]$$
$$h^* \colon \mathcal{C}^o \to [\mathcal{C}, \mathbf{(Set)}]$$

は充満かつ忠実である.

Proof. h_* の方のみ示す.

定義 2.74 の写像

$$h_* \colon \ \mathrm{Hom}(A,B) \to \mathrm{Nat}(h_A, h_B),$$

が全単射であることを示せばよい.

定理 2.77° より, 自然な全単射

$$\tau \colon \ \mathrm{Nat}(h_A, h_B) \xrightarrow{\cong} h_B(A) = \mathrm{Hom}(A,B)$$

が存在するが, 定理 2.77 の証明でみたように, τ の逆写像は

$$(\tau^{-1}(f))_C(u) = h_B(u)(f) = fu = (h_*(f))_C(u)$$

により与えられる. すなわち, $\tau^{-1} = h_*$ である. よって h_* は全単射. □

h_* が充満かつ忠実であるということは, 任意の自然変換 $\alpha \colon h_A \to h_B$ に対し, 射 $f \colon A \to B \in \mathcal{C}$ で, 任意の $u \in h_A(C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,A)$ に対し

$$\alpha_C(u) = (h_f)_C(u) = fu$$

をみたすもの, がただ一つ存在するということである.

また, h^* が充満かつ忠実であるということは, 任意の自然変換 $\beta \colon h^B \to h^A$ に対し, 射 $f \colon A \to B \in \mathcal{C}$ で, 任意の $v \in h^B(C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$ に対し

$$\beta_C(v) = (h^f)_C(v) = vf$$

をみたすもの, がただ一つ存在するということである.

注意 2.80. 定義より, $f \colon A \to B$ が単射であることと, すべての $C \in \mathcal{C}$ に対し $\mathrm{Hom}(1_C, f) \colon \mathrm{Hom}(C,A) \to \mathrm{Hom}(C,B)$ が単射であることは同値で, $f \colon A \to B$ が全射であることと, すべての $C \in \mathcal{C}$ に対し $\mathrm{Hom}(f, 1_C) \colon \mathrm{Hom}(B,C) \to \mathrm{Hom}(A,C)$ が単射であることは同値である.

系 2.81. $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ とする.

1. 次は同値.
   (a) f は同型.
   (b) $h^*(f)$ は同型.
   (c) $h_*(f)$ は同型.
2. 次は同値.
   (a) f は単射.
   (b) すべての $C \in \mathcal{C}$ に対し $(h_*(f))_C\colon h_A(C) \to h_B(C)$ は単射.
   (c) $h_*(f)\colon h_A \to h_B$ は単射.
3. 次は同値.
   (a) f は全射.
   (b) すべての $C \in \mathcal{C}$ に対し $(h^*(f))_C\colon h^B(C) \to h^A(C)$ は単射.
   (c) $h^*(f)\colon h^B \to h^A$ は単射.

Proof. 1. 補題 2.46 より, 関手は同型射を保ち, 充満忠実関手は同型射を反射する.

2. (a) $\Leftrightarrow$ (b) は定義よりあきらか.
   実際, f が単射であるということは, 任意の $C \in \mathcal{C}$ と, 任意の $g, h \in \mathrm{Hom}(C, A) = h_A(C)$ に対し, 「$fg = fh$ ならば $g = h$」, つまり, 「$(h_*(f))_C(g) = (h_*(f))_C(h)$ ならば, $g = h$」ということ, つまり $(h_*(f))_C$ が単射だということ.
   $(b) \Rightarrow (c)$.
   $F\colon \mathcal{C}^o \to \mathbf{(Set)}$, $\alpha, \beta\colon F \to h_A$, $h_*(f) \circ \alpha = h_*(f) \circ \beta$ とする.
   $C \in \mathcal{C}$ に対し,
$$(h_*(f))_C \circ \alpha_C = (h_*(f))_C \circ \beta_C$$
$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, shift left, "\alpha_C"] \arrow[r, shift right, "\beta_C"'] & h_A(C) \arrow[r, "(h_*(f))_C"] & h_B(C) \end{tikzcd}$$
   であるから, (b) より, $\alpha_C = \beta_C$. よって $\alpha = \beta$.
   補題 2.46 より, 忠実関手は単射を反射するので, (c)$\Rightarrow$(a) が成り立つ.
3. 双対. 一応示しておく.
   (a) $\Leftrightarrow$ (b) は定義よりあきらか.
   実際, f が全射であるということは, 任意の $C \in \mathcal{C}$ と, 任意の $g, h \in \mathrm{Hom}(B, C) = h^B(C)$ に対し, 「$gf = hf$ ならば $g = h$」, つまり, 「$(h^*(f))_C(g) = (h^*(f))_C(h)$ ならば, $g = h$」ということ, つまり $(h^*(f))_C$ が単射だということ.
   $(b) \Rightarrow (c)$.
   $F\colon \mathcal{C} \to \mathbf{(Set)}$, $\alpha, \beta\colon F \to h^B$, $h^*(f) \circ \alpha = h^*(f) \circ \beta$ とする.

$C \in \mathcal{C}$ に対し,

$$(h^*(f))_C \circ \alpha_C = (h^*(f))_C \circ \beta_C$$

$$F(C) \overset{\alpha_C}{\underset{\beta_C}{\rightrightarrows}} h^B(C) \xrightarrow{(h^*(f))_C} h^A(C)$$

であるから, (b) より, $\alpha_C = \beta_C$. よって $\alpha = \beta$.

(c)⇒(a)

h^* は反変関手であるから, 共変関手 $h^* \colon \mathcal{C}^o \to [\mathcal{C}, \mathbf{(Set)}]$ とみなせる. h^* は忠実で, 補題 2.46 より, 忠実関手は単射を反射するので, $h^*(f) \colon h^B \to h^A$ が単射であれば, $f \colon B \to A \in \mathcal{C}^o$ は単射, つまり, $f \colon A \to B \in \mathcal{C}$ は全射.

□

上の証明の 2,3 の「$(b) \Rightarrow (c)$」は, より一般的な事実の特別な場合である.

問 2.82. $F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手, $\alpha \colon F \to G$ を自然変換とする.

1. すべての $C \in \mathcal{C}$ に対し $\alpha_C \colon F(C) \to G(C) \in \mathcal{D}$ が単射ならば, α は $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ における単射であることを示せ.
2. すべての $C \in \mathcal{C}$ に対し $\alpha_C \colon F(C) \to G(C) \in \mathcal{D}$ が全射ならば, α は $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ における全射であることを示せ.

問題 2.83. 逆は一般には成立しない.

系 2.84. 表現可能関手（定義 2.75）の representative object は同型を除いて一意的.

Proof. A と B が 表現可能関手 F の representative ojbect であるとすると, h^A と h^B は同型である: $h^A \cong F \cong h^B$. $\alpha \colon h^A \to h^B$ を自然同型とする.

h^* は充満なので, 射 $f \colon B \to A$ で, $h^*(f) = \alpha$ となるものが存在する.

h^* は同型射を反射するので, $f \colon B \to A$ は同型射, ゆえ $A \cong B$. □

第 3 章

Limits and colimits

3.1　直積と直和

定義 3.1 (直積)**.** $\mathcal{C}$ を圏とし, $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ とする. $\mathcal{C}$ における図式

$$A_1 \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} A_2 \tag{3.1}$$

は次の条件をみたすとき, A_1 と A_2 の直積図式という.

- $\mathcal{C}$ の任意の射 $f_1 \colon X \to A_1, f_2 \colon X \to A_2$ に対し, 射 $f \colon X \to P$ で, $f_1 = p_1 f$, $f_2 = p_2 f$ をみたすものがただ一つ存在する.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "f"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ A_1 & P \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & A_2 \end{tikzcd}$$

図式 (3.1) が直積図式であるとき, 三組 (P, p_1, p_2) を A_1 と A_2 の直積とよぶ.

しばしば, p_1, p_2 を省略して, P を A_1 と A_2 の直積とよぶ. また, P を $A_1 \times A_2$ と書くことがある.

命題 3.2. 直積は, 存在すれば, 同型を除いて一意的である. すなわち,

$$A_1 \xleftarrow{p_1} P \xrightarrow{p_2} A_2$$

$$A_1 \xleftarrow[q_1]{} Q \xrightarrow[q_2]{} A_2$$

がどちらも 直積図式であれば, 射 $p \colon P \to Q$ で, $p_1 = q_1 p$, $p_2 = q_2 p$ をみたすものがただ

ひとつ存在し, さらに $p\colon P \to Q$ は同型射である:

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, dotted, "\exists p"', "\cong"] & \\
A_1 & & A_2 \\
 & Q \arrow[ul, "q_1"] \arrow[ur, "q_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

Proof. Q が直積であるから 射 $p\colon P \to Q$ で, $p_1 = q_1 p$, $p_2 = q_2 p$ をみたすものがただひとつ存在する. また, P が直積であるから 射 $q\colon Q \to P$ で, $q_1 = p_1 q$, $q_2 = p_2 q$ をみたすものがただひとつ存在する:

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[d, dotted, "p"'] & \\
A_1 & Q \arrow[l, "q_1"] \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, dotted, "q"] & A_2 \\
 & P \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

合成 $qp\colon P \to P$ を考えると

$$
\begin{aligned}
p_1(qp) &= (p_1 q)p = q_1 p = p_1 \\
p_2(qp) &= (p_2 q)p = q_2 p = p_2
\end{aligned}
$$

をみたす. また明らかに恒等射 $1_P\colon P \to P$ も $p_1 1_P = p_1$, $p_2 1_P = p_2$ をみたす.

$$
\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, "qp"', "1_P"] & \\
A_1 & & A_2 \\
 & P \arrow[ul, "p_1"] \arrow[ur, "p_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

よって一意性から $qp = 1_P$. 同様に $pq = 1_Q$ がわかり, $p\colon P \to Q$ は同型射である. □

双対的に直和を定義する. すなわち $\mathcal{C}^\circ$ における直積を $\mathcal{C}$ における直和という.

定義 3.1°(直和)**.** $\mathcal{C}$ を圏とし, $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ とする. $\mathcal{C}$ における図式

$$
A_1 \xrightarrow{i_1} C \xleftarrow{i_2} A_2 \tag{3.2}
$$

は次の条件をみたすとき, A_1 と A_2 の直和図式という.

- $\mathcal{C}$ の任意の射 $f_1\colon A_1 \to X, f_2\colon A_2 \to X$ に対し, 射 $f\colon C \to X$ で, $f_1 = fi_1$, $f_2 = fi_2$ をみたすものがただ一つ存在する.

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A_1 \arrow[ur, "f_1"] \arrow[r, "i_1"'] & C \arrow[u, dotted, "f"] & A_2 \arrow[ul, "f_2"'] \arrow[l, "i_2"] \end{tikzcd}$$

図式 (3.2) が直和図式であるとき, 三組 (C, i_1, i_2) を A_1 と A_2 の直和とよぶ.

しばしば,i_1, i_2 を省略して, C を A_1 と A_2 の直和とよぶ. また, C を $A_1 \coprod A_2$ と書くことがある.

命題 3.2°. 直和は, 存在すれば, 同型を除いて一意的である. □

例 3.3. 順序集合 P を圏と思ったとき, $p, q \in P$ に対し, p と q の直積は $p \wedge q$, 直和は $p \vee q$ である.

3.2 Pullback と Pushout

定義 3.4 (Pullback)**.** $\mathcal{C}$ を圏とし, $f\colon A_1 \to B$, $g\colon A_2 \to B$ を $\mathcal{C}$ の射とする. $\mathcal{C}$ における図式

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A_2 \arrow[d, "g"] \\ A_1 \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

は次の条件をみたすとき pullback 図式とよばれる.

1. 図式は可換である, すなわち, $fg' = gf'$.
2. $\mathcal{C}$ の射 $h_1\colon X \to A_1, h_2\colon X \to A_2$ が $fh_1 = gh_2$ をみたせば, 射 $h\colon X \to C$ で, $h_1 = g'h$, $h_2 = f'h$ をみたすものがただ一つ存在する.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\ & C \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & A_2 \arrow[d, "g"] \\ & A_1 \arrow[r, "f"'] & B. \end{tikzcd}$$

図式 (3.3) が pullback 図式であるとき, 三組 (C, g', f') を f と g の pullback とよぶ.

しばしば, g', f' を省略して, C を f と g の pullback とよぶ. また, C を $A_1 \times_B A_2$ と書くことがある. 図式 (3.3) が pullback 図式であることを右下にマークをつけて

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & A_2 \arrow[d, "g"] \\
A_1 \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

と書くことがある.

直積, 直和と同様に, pullback の一意性がわかる.

命題 3.5. pullback は, 存在すれば, 同型を除いて一意的である. すなわち,

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & A_2 \arrow[d, "g"] \\
A_1 \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "g''"'] & A_2 \arrow[d, "g"] \\
A_1 \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

がどちらも pullback 図式であれば, 射 $h\colon C \to D$ で, $g' = g''h$, $f' = f''h$ をみたすものがただひとつ存在し, さらに $h\colon C \xrightarrow{\cong} D$ は同型射である.

Proof. D が pullback だから, このような射 h がただひとつ存在する. 同様に C が pullback だから射 $k\colon D \to C$ で $g'' = g'k$, $f'' = f'k$ をみたすものがただひとつ存在する.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dotted, "k"] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\
& C \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, "g'"] & A_2 \arrow[d, "g"] \\
& A_1 \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "f'"] \arrow[ddr, bend right, "g'"'] & & \\
& D \arrow[r, "f''"'] \arrow[d, "g''"] & A_2 \arrow[d, "g"] \\
& A_1 \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

射 $hk\colon D \to D$ を考えると, $g''hk = g'k = g''$, $f''hk = f'k = f''$ をみたす. また明かに

射 $1_D\colon D \to D$ も $g''1_D = g''$, $f''1_D = f''$ をみたす.

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dotted, "1_D", "hk"'] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\
& D \arrow[r, "f''"'] \arrow[d, "g''"] & A_2 \arrow[d, "g"] \\
& A_1 \arrow[r, "f"'] & B.
\end{tikzcd}
$$

よって一意性から $hk = 1_D$. 同様にして $kh = 1_C$ となり, $h\colon C \to D$ は同型射である. □

双対的に (すなわち, 射の向きをすべて逆にすることで) pushout が定義される. つまり, $\mathcal{C}^\circ$ における pullback を $\mathcal{C}$ における pushout という.

定義 3.4°(Pushout)**.** $\mathcal{C}$ を圏とし, $f\colon B \to A_1$, $g\colon B \to A_2$ を $\mathcal{C}$ の射とする. $\mathcal{C}$ における図式

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A_2 \arrow[d, "f'"] \\
A_1 \arrow[r, "g'"'] & C
\end{tikzcd}
\tag{3.4}
$$

は次の条件をみたすとき pushout 図式とよばれる.

1. 図式は可換である, すなわち, $f'g = g'f$.
2. $\mathcal{C}$ の射 $h_1\colon A_1 \to X, h_2\colon A_2 \to X$ が $h_1 f = h_2 g$ をみたせば, 射 $h\colon C \to X$ で, $h_1 = hg'$, $h_2 = hf'$ をみたすものがただ一つ存在する.

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A_2 \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, bend left, "h_2"] & \\
A_1 \arrow[r, "g'"] \arrow[drr, bend right, "h_1"'] & C \arrow[dr, dotted, "h"] & \\
& & X
\end{tikzcd}
$$

図式 (3.4) が pushout 図式であるとき, 三組 (C, g', f') を f と g の pushout とよぶ.

しばしば, g', f' を省略して, C を f と g の pushout とよぶ. また, C を $A_1 \amalg_B A_2$ と

書くことがある. 図式 (3.4) が pushout 図式であることを左上にマークをつけて

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A_2 \arrow[d, "f'"] \\ A_1 \arrow[r, "g'"'] & C \end{tikzcd}$$

と書くことがある.

命題 3.5°. pushout は, 存在すれば, 同型を除いて一意的である. □

3.3 Equalizer と Coequalizer

定義 3.6 (Equalizer)**.** $\mathcal{C}$ を圏とし, $f, g \colon A \to B$ を $\mathcal{C}$ の射とする. $\mathcal{C}$ における図式

$$K \xrightarrow{k} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \tag{3.5}$$

は次の条件をみたすとき equalizer 図式とよばれる.

1. $fk = gk$.
2. $\mathcal{C}$ の射 $h \colon C \to A$ が $fh = gh$ をみたせば, 射 $l \colon C \to K$ で, $h = kl$ をみたすものがただ一つ存在する:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, dotted, "l"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

図式 (3.5) が equalizer 図式であるとき, 組 (K, k) を f と g の equalizer とよび, $\mathrm{Ker}(f, g)$ と書く（ことがある）.

しばしば, k を省略して, K を f と g の equalizer とよび, $K = \mathrm{Ker}(f, g)$ と書く.

命題 3.7. equalizer は, 存在すれば, 同型を除いて一意的である.

命題 3.8. (K, k) が equalizer であれば, k は単射である.

Proof.

$$K \xrightarrow{k} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

を equalizer 図式とする. $fk = gk$ である.

$l, m\colon C \to K$ を $\mathcal{C}$ の射で, $kl = km$ をみたすものとする. $h := kl = km$ とおくと, $fh = fkl = gkl = gh$. よって, 射 $C \to K$ で, k と合成すると h となるものがただ一つ存在するが, $kl = h = km$ であるから, 一意性より $l = m$. よって k は単射.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ C \arrow[u, "l", "m"'] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

□

定義 3.6°(Coequalizer)**.** $\mathcal{C}$ を圏とし, $f, g\colon A \to B$ を $\mathcal{C}$ の射とする. $\mathcal{C}$ における図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] & Q \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

は次の条件をみたすとき coequalizer 図式とよばれる.

1. $qf = qg$.
2. $\mathcal{C}$ の射 $h\colon B \to C$ が $hf = hg$ をみたせば, 射 $l\colon Q \to C$ で, $h = lq$ をみたすものがただ一つ存在する:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "h"'] & Q \arrow[d, dotted, "l"] \\ & & C \end{tikzcd}$$

図式 (3.6) が coequalizer 図式であるとき, 組 (Q, q) を f と g の coequalizer とよび, $\mathrm{Coker}(f, g)$ と書く（ことがある）.

しばしば, q を省略して, Q を f と g の coequalizer とよび, $Q = \mathrm{Coker}(f, g)$ と書く.

命題 3.7°. coequalizer は, 存在すれば, 同型を除いて一意的である.

命題 3.8°. (Q, q) が coequalizer であれば, q は全射である.

3.4　cone と cocone

ここまでに挙げたもの（直積, pullback, equalizer, 直和, pushout, coequalizer）はすべて同じパターンをしている. これらの条件の 1 と, 2 の仮定の部分

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A_1 & & A_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "h_1"'] \arrow[dr, "h_2"] \arrow[d, "fh_1=gh_2"] & \\
A_1 \arrow[r, "f"'] & B & A_2 \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "fh=gh"] & \\
A \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] & & B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr, "f_1"'] & & A_2 \arrow[dl, "f_2"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr, "h_1"'] & B \arrow[l, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "h_1f=h_2g"] & A_2 \arrow[dl, "h_2"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[rr, shift right, "g"'] \arrow[dr, "hf=hg"'] & & B \arrow[dl, "h"] \\
 & C &
\end{tikzcd}
$$

を一般化したものを考える.

定義 3.9. I, $\mathcal{C}$ を圏とする.

$A \in \mathcal{C}$ に対し, A における定値関手を $\Delta_A \colon I \to \mathcal{C}$ と書く.

$f \colon A \to B \in \mathcal{C}$ に対し, 自然変換 $\Delta_f \colon \Delta_A \to \Delta_B$ を, $\Delta_{f,i} = f$ により定める.

I が小圏であるとき, $\Delta(A) = \Delta_A$, $\Delta(f) = \Delta_f$ により定まる関手を $\Delta \colon \mathcal{C} \to [I, \mathcal{C}]$ と書く.

定義 3.10. I, $\mathcal{C}$ を圏, $F \colon I \to \mathcal{C}$ を関手とする.

1. Δ_A から F への自然変換 $\alpha \colon \Delta_A \to F$ を, A を頂点とする F の cone といい, (A, α) であらわす.
   すなわち, cone とは, $\mathcal{C}$ の射の族 $\alpha = \{\alpha_i \colon A \to F(i)\}_{i \in I}$ であって, 任意の $i, j \in I$ と任意の $u \colon i \to j \in I$ に対し, $\alpha_j = F(u)\alpha_i$ をみたすもの:

$$
\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_j"] & \\
F(i) \arrow[rr, "F(u)"'] & & F(j).
\end{tikzcd}
$$

2. F から Δ_A への自然変換 $\alpha \colon F \to \Delta_A$ を, A を頂点とする F の cocone あるいは F の下の cone といい, (A, α) であらわす.
   すなわち, cocone とは, $\mathcal{C}$ の射の族 $\alpha = \{\alpha_i \colon F(i) \to A\}_{i \in I}$ であって, 任意の $i, j \in I$ と任意の $u \colon i \to j \in I$ に対し, $\alpha_j = \alpha_i F(u)$ をみたすもの:

$$
\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr, "F(u)"] \arrow[dr, "\alpha_i"'] & & F(j) \arrow[dl, "\alpha_j"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
$$

I を小圏, $\mathcal{C}$ を圏とする.

関手 $\Delta\colon \mathcal{C} \to [I, \mathcal{C}]$ に対し, comma category $(\Delta \downarrow [I, \mathcal{C}])$ は, I から $\mathcal{C}$ への関手の cone たちの圏である:

$(\Delta \downarrow [I, \mathcal{C}])$ の対象は, $A \in \mathcal{C}$, 関手 $F\colon I \to \mathcal{C}$, 自然変換 $\alpha\colon \Delta_A \to F$ の三組 (A, α, F), つまり関手とその上の cone である.

また, $(A, \alpha, F), (B, \beta, G) \in (\Delta \downarrow [I, \mathcal{C}])$ に対し, (A, α, F) から (B, β, G) への射は, $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ と自然変換 $\tau\colon F \to G$ の組 (f, τ) で, 次の図式が可換となるもの:

$$\begin{tikzcd}
\Delta_A \arrow[r, "\Delta_f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \Delta_B \arrow[d, "\beta"] \\
F \arrow[r, "\tau"'] & G
\end{tikzcd}$$

同様に, comma category $([I, \mathcal{C}] \downarrow \Delta)$ は, I から $\mathcal{C}$ への関手の cocone たちの圏である

I を小圏, $\mathcal{C}$ を圏, $F\colon I \to \mathcal{C}$ を関手とする.

$\Delta\colon \mathcal{C} \to [I, \mathcal{C}]$ と $F \in [I, \mathcal{C}]$ に対し, comma category $(\Delta \downarrow F)$ を考える. $(\Delta \downarrow F)$ の対象は, $A \in \mathcal{C}$ と射（自然変換）$\alpha\colon \Delta_A \to F \in [I, \mathcal{C}]$ のペア (A, α), すなわち, F の cone であり, $(\Delta \downarrow F)$ の射 $(A, \alpha) \to (B, \beta)$ は, $\mathcal{C}$ の射 $f\colon A \to B$ で, $\alpha = \beta\Delta_f$ となるものである:

$$\begin{tikzcd}
\Delta_A \arrow[rr, "\Delta_f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \Delta_B \arrow[dl, "\beta"] \\
& F &
\end{tikzcd}$$

同様に, comma category $(F \downarrow \Delta)$ は F の cocone の圏である.

3.5　極限と余極限

定義 3.11 (Limit)**.** I, $\mathcal{C}$ を圏, $F\colon I \to \mathcal{C}$ を関手とする.

F の cone (L, τ) は, 次の条件をみたすとき F の極限 (limit), あるいは逆極限 (inverse limit), あるいは射影極限 (projective limit) といい

$$(L, \tau) = \varprojlim_I F, \quad \varprojlim F, \quad \operatorname{Lim} F$$

等と表す.

- 任意の cone $\alpha\colon \Delta_A \to F$ に対し, 射 $f\colon A \to L$ で, $\alpha = \tau\Delta_f$ をみたすものがただ

一つ存在する:

$$\begin{tikzcd} \Delta_A \arrow[rr, dotted, "\Delta_f"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \Delta_L \arrow[dl, "\tau"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

(L,τ) が F の極限であるとき, L を F の limit object といい, しばしば

$$L = \varprojlim_I F, \quad \varprojlim F, \quad \operatorname{Lim} F$$

等と書く. また, τ あるいは (L,τ) を F の limitting cone ということがある.

言い換えると, F の極限とは, $\mathcal{C}$ の対象 $L \in \mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ の射の族 $\tau = \{\tau_i\colon L \to F(i)\}_{i\in I}$ の組 (L,τ) であって次の条件をみたすもの:

1. 任意の $i, j \in I$ と任意の $u\colon i \to j \in I$ に対し, $\tau_j = F(u)\tau_i$.
2. $\mathcal{C}$ の射の族 $\{\alpha_i\colon A \to F(i)\}_{i\in I}$ が, 任意の $i, j \in I$ と任意の $u\colon i \to j \in I$ に対し $\alpha_j = F(u)\alpha_i$ をみたせば, 射 $f\colon A \to L$ で任意の $i \in I$ に対し $\alpha_i = \tau_i f$ をみたすものが, ただ一つ存在する:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[d, "\alpha_i"'] \arrow[dr, "\alpha_j"' near start] & L \arrow[d, "\tau_j"] \arrow[dl, "\tau_i" near start] \\ F(i) \arrow[r, "F(u)"'] & F(j). \end{tikzcd}$$

I が小圏の場合, 極限を以下の様に見ることができる.

まず, 極限の定義よりあきらかに次が成り立つ.

命題 3.12. F の極限は $(\Delta \downarrow F)$ の終対象である.

問 3.13. これを確かめよ.

系 3.14. Limit object は, 存在すれば, 同型を除いて一意的.

また, limit object を representative object と見ることもできる.

命題 3.15. I を小圏, $\mathcal{C}$ を圏, $F\colon I \to \mathcal{C}$ を関手とする.

$A \in \mathcal{C}$ に対し, A を頂点とする cone 全体のなす集合（I が小圏なので集合になる）を対応させることで得られる反変関手

$$\mathrm{Nat}(\Delta_-, F)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{(Set)}$$

$$A \longmapsto \mathrm{Nat}(\Delta_A, F)$$

を limit 関手という.

(L, τ) が F の極限であることと, limit 関手が表現可能で, L がその representative object, すなわち, ある $L \in \mathcal{C}$ が存在し,

$$\mathrm{Nat}(\Delta_{-}, F) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, L)$$

となり, また, τ が $1_L \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L, L)$ に対応する cone $\tau\colon \Delta_L \to F$ であることは同値である.

問 3.16. これを確かめよ.

双対的に余極限 (colimit) を定義する.

定義 3.11°(Colimit)**.** $I, \mathcal{C}$ を圏, $F\colon I \to \mathcal{C}$ を関手とする.

F の cocone (C, σ) は, 次の条件をみたすとき F の余極限 (colimit), あるいは順極限 (direct limit), あるいは入射極限 (injective limit) といい

$$(C, \sigma) = \varinjlim_{I} F, \quad \varinjlim F, \quad \mathrm{Colim}\, F$$

等と表す.

- 任意の cocone $\alpha\colon F \to \Delta_A$ に対し, 射 $f\colon C \to A$ で, $\alpha = \Delta_f \sigma$ をみたすものがただ一つ存在する:

$$\begin{tikzcd}
\Delta_A & & \Delta_C \arrow[ll, dotted, "\Delta_f"'] \\
& F \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

(C, σ) が F の余極限であるとき, C を F の colimit object といい, しばしば

$$C = \varinjlim_{I} F, \quad \varinjlim F, \quad \mathrm{Colim}\, F$$

等と書く. また, σ あるいは (C, σ) を F の colimitting cocone ということがある.

言い換えると, F の余極限とは, $\mathcal{C}$ の対象 $C \in \mathcal{C}$ と $\mathcal{C}$ の射の族 $\sigma = \{\sigma_i\colon F(i) \to C\}_{i \in I}$ の組 (C, σ) であって次の条件をみたすもの:

1. 任意の $i, j \in I$ と任意の $u\colon i \to j \in I$ に対し, $\sigma_i = \sigma_j F(u)$.
2. $\mathcal{C}$ の射の族 $\{\alpha_i\colon F(i) \to A\}_{i \in I}$ が, 任意の $i, j \in I$ と任意の $u\colon i \to j \in I$ に対し $\alpha_i = \alpha_j F(u)$ をみたせば, 射 $f\colon C \to A$ で任意の $i \in I$ に対し $\alpha_i = f\sigma_i$ をみたす

ものが, ただ一つ存在する:

$$\begin{tikzcd} A & C \arrow[l, dotted, "f"'] \\ F(i) \arrow[u, "\alpha_i"] \arrow[ur, "\sigma_i"'] \arrow[r, "F(u)"'] & F(j). \arrow[ul, "\alpha_j"] \arrow[u, "\sigma_j"'] \end{tikzcd}$$

命題 3.12°. I を小圏, $\mathcal{C}$ を圏, $F\colon I \to \mathcal{C}$ を関手とする.

F の余極限は $(F \downarrow \Delta)$ の始対象である.

系 3.14°. Colimit object は, 存在すれば, 同型を除いて一意的.

命題 3.15°. I を小圏, $\mathcal{C}$ を圏, $F\colon I \to \mathcal{C}$ を関手とする.

$A \in \mathcal{C}$ に対し, A を頂点とする cocone 全体のなす集合を対応させることで得られる関手

$$\mathrm{Nat}(F, \Delta_{-})\colon\ \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{(Set)}$$

$$A \longmapsto \mathrm{Nat}(F, \Delta_A)$$

を colimit 関手という.

(C, σ) が F の余極限であることと, colimit 関手が表現可能で, C がその representative object, すなわち,

$$\mathrm{Nat}(F, \Delta_{-}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, -)$$

となり, また, σ が $1_C \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)$ に対応する cocone $\sigma\colon F \to \Delta_C$ であることは同値である.

極限, 余極限の定義からあきらかであるが, 次の事実は有用である.

命題 3.17. $I, \mathcal{C}$ を圏, $F\colon I \to \mathcal{C}$ を関手, (L, τ) を F の極限とする.

射 $f, g\colon A \to L \in \mathcal{C}$ が, 任意の $i \in I$ に対し $\tau_i f = \tau_i g$ をみたせば, $f = g$ である. つまり, L への射が等しいかどうかは, 各 τ_i との合成をみれば分かる.

命題 3.17°. $I, \mathcal{C}$ を圏, $F\colon I \to \mathcal{C}$ を関手, (C, σ) を F の余極限とする.

射 $f, g\colon C \to A \in \mathcal{C}$ が, 任意の $i \in I$ に対し $f\sigma_i = g\sigma_i$ をみたせば, $f = g$ である. つまり, C からの射が等しいかどうかは, 各 σ_i との合成をみれば分かる.

極限や余極限の特別な場合をいくつか挙げよう.

定義 3.18 (直積, product)**.** この節の最初に二つの対象の直積を定義した（定義 3.1）. より一般に, 集合で添字づけられた対象の族の直積が定義できる.

集合 I を離散圏とみなす（例-定義 2.6.1 ）. I の射は恒等射だけなので, I から圏 $\mathcal{C}$ への関手を与えることと, I の各元に $\mathcal{C}$ の対象を対応させること、つまり I で添字付けられた $\mathcal{C}$ の対象の族 $\{A_i\}_{i\in I}$ を与えることは同じことである. この関手の極限を, 族 $\{A_i\}_{i\in I}$ の直積 (product) という.

すなわち, 族 $\{A_i\}_{i\in I}$ の直積とは, $\mathcal{C}$ の対象 $P \in \mathcal{C}$ と, $\mathcal{C}$ の射の族 $p = \{p_i\colon P \to A_i\}_{i\in I}$ の組 (P, p) であって次の条件をみたすもの.

- $\mathcal{C}$ の任意の射の族 $\{f_i\colon X \to A_i\}_{i\in I}$ に対し, 射 $f\colon X \to P$ で, 任意の $i \in I$ に対し $f_i = p_i f$ をみたすものが, ただ一つ存在する.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & P \arrow[d, "p_i"] \\ & A_i \end{tikzcd}$$

注意. I には恒等射しかないので, 「任意の $u\colon i \to j \in I$ に対し $\tau_j = F(u)\tau_i$」, 「任意の $i, j \in I$ と任意の $u\colon i \to j \in I$ に対し $\alpha_i = \alpha_j F(u)$」に相当する条件は自動的にみたされる.

普通, 直積の limit object（上述の P）を $\prod A_i$ 等と表す. また, 射 $p_i\colon \prod A_i \to A_i$ を標準的射影という.

しばしば,（射影を省略して）$\prod A_i$ を, 族 $\{A_i\}_{i\in I}$ の直積という.

注意. 直積は, 存在すれば, 「同型を除いて」一意に定まるが, 一意に定まるわけではない. 「$\prod A_i \in \mathcal{C}$ が族 $\{A_i\}_{i\in I}$ の直積である」というときは, 直積の条件をみたす対象 $\prod A_i \in \mathcal{C}$ を一つ選んで固定するということになる.

$I = \{1, 2\}$ のとき, 定義 3.1 の直積 $A_1 \times A_2$ は, 族 $\{A_i\}_{i\in\{1,2\}}$ の（ここで定義した）直積である.

$I = \emptyset$ のときの直積は終対象である.

定義 3.18°(Coproduct)**.** $\{A_i\}_{i\in I}$ を, 集合 I で添字付けられた $\mathcal{C}$ の対象の族とする. これを, 離散圏 I からの関手と見たときの余極限を, この族の直和 (coproduct) という.

すなわち, 族 $\{A_i\}_{i\in I}$ の直和とは, $\mathcal{C}$ の対象 $C \in \mathcal{C}$ と, $\mathcal{C}$ の射の族 $\iota = \{\iota_i\colon A_i \to C\}_{i\in I}$ の組 (C, ι) であって次の条件をみたすもの.

- $\mathcal{C}$ の任意の射の族 $\{f_i\colon A_i \to X\}_{i\in I}$ に対し, 射 $f\colon C \to X$ で, 任意の $i \in I$ に対し

$f_i = f\iota_i$ をみたすものが, ただ一つ存在する.

$$\begin{tikzcd} X & C \arrow[l, dotted, "f"'] \\ & A_i \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, "\iota_i"'] \end{tikzcd}$$

普通, 直和の colimit object を $\coprod A_i$ 等と表す.

$I = \{1, 2\}$ のとき, 定義 3.1° の $A_1 \coprod A_2$ は, 族 $\{A_i\}_{i\in\{1,2\}}$ の（ここで定義した）直積である.

$I = \emptyset$ のときの直和は始対象である.

例 3.19 (Pullback)**.** 図 $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$ で表される圏（対象が 3 つ, 恒等射以外の射は図の矢印）を考える.

この圏から圏 $\mathcal{C}$ への関手を定めることは, $\mathcal{C}$ の射 $f\colon A \to C$, $g\colon B \to C$ を定めることに他ならない.

この関手の極限は, f と g の pullback （定義 3.4）である.

例 3.19°(Pushout)**.** 双対的に, 圏 $\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$ から圏 $\mathcal{C}$ への関手とは, $\mathcal{C}$ の射のペア $f\colon C \to A$, $g\colon C \to B$ に他ならず,

この関手の余極限は, f と g の pushout （定義 3.4°）である.

例 3.20 (Equalizer)**.** 図 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ で表される圏から圏 $\mathcal{C}$ への関手を与えることは, $\mathcal{C}$ の射のペア $f, g\colon A \to B$ を与えることに他ならない.

この関手の極限は f と g の equalizer （定義 3.6）である.

例 3.20°(Coequalizer)**.** 双対的に, 図 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ で表される圏から圏 $\mathcal{C}$ への関手の余極限は f と g の coequalizer （定義 3.6°）である.

注意 3.21. $\bullet \rightrightarrows \bullet$ の双対圏は $\bullet \leftleftarrows \bullet$ であるが, あきらかにこれは $\bullet \rightrightarrows \bullet$ と圏として同型で, $\bullet \rightrightarrows \bullet$ からの関手を考えることと $\bullet \leftleftarrows \bullet$ からの関手を考えることは, 本質的に同じことである.

例 3.22. 集合の圏 **(Set)** では,

1. 直積はデカルト積.
2. 直和は非交和 (disjoint union).
3. 写像 $f, g\colon A \to B$ の equalizer は, 集合 $K = \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}$ と包含写像 $K \to A$ で与えられる.
4. 写像 $f, g\colon A \to B$ の coequalizer は, $\{(f(a), g(a)) \mid a \in A\} \subset B \times B$ の生成する

同値関係による B の商集合への射影により与えられる.

5. 写像 $f\colon A \to C$ と $g\colon B \to C$ の pullback は, ファイバー積 $\{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}$.
6. 写像 $f\colon C \to A$ と $g\colon C \to B$ の pushout は融合和 $A \amalg_C B$, すなわち, disjoint union $A \amalg B$ において, 各 $c \in C$ に対し $f(c)$ と $g(c)$ を同一視して得られる集合.

例 **3.23.** アーベル群の圏 **(Abel)** では,

1. 直積 (Products) は直積 (direct products).
2. 直和 (Coproducts) は直和 (direct sums).
3. 準同型 $f, g\colon A \to B$ の equalizer は $f - g$ の核.
4. 準同型 $f, g\colon A \to B$ の coequalizer は $f - g$ の余核, すなわち $B/\operatorname{Im}(f - g)$.

3.6　（余）極限の関手性

極限や余極限は関手性, 自然性を持っている.

自然変換は極限の間の射を誘導する.

3.7　（余）極限の存在

3.8　関手圏における（余）極限

3.9　極限と余極限の交換

3.10　関手と（余）極限

$I, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を圏, $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と $D\colon I \to \mathcal{C}$ を関手とする.

(K, σ) が D の cone (cocone) ならば, $(F(K), F\sigma)$ は, 合成 $FD\colon I \to \mathcal{D}$ の cone (cocone) である.

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "\sigma_i"'] \arrow[dr, "\sigma_{i'}"] & \\
D(i) \arrow[r] & D(i')
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(K) \arrow[d, "F(\sigma_i)"'] \arrow[dr, "F(\sigma_{i'})"] & \\
FD(i) \arrow[r] & FD(i')
\end{tikzcd}
$$

定義 3.24. F が D の limit (colimit) を保つ.

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

(K, σ) が D の limit (colimit) ならば $(F(K), F\sigma)$ は合成 $FD\colon I \to \mathcal{D}$ の limit (colimit)

である.

つまり, F が D の limit (colimit) を FD の limit (colimit) にうつすということである.

定義 3.25. F が D の limit (colimit) を reflect する.

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

(K, σ) が D の cone (cocone) で, $(F(K), F\sigma)$ が FD の limit (colimit) であるならば, (K, σ) は D の limit (colimit) である.

つまり, F で, FD の limit (colimit) にうつるならば, D の limit (colimit) であるということ.

定義 3.26. F が D の limit (colimit) を create する.

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

(L, τ) が, 合成 $FD \colon I \to \mathcal{D}$ の limit (colimit) ならば, D の cone (cocone) (K, σ) で, $F(K) = L$, $F\sigma = \tau$ となるものが唯一つ存在し, さらに (K, σ) が D の limit (colimit) になっている.

つまり, FD が limit (colimit) を持てば, F でそれにうつるような D の limit (colimit) がひとつだけあるということ.

命題 3.27.

1. F が D の limit (colimit) を create するならば, F は D の limit (colimit) を reflect する.
2. F が D の limit (colimit) を create し, さらに, FD が limit (colimit) を持つならば, F は D の limit (colimit) を保つ.
3. F が D の limit (colimit) を reflect し, さらに, FD が $(F(K), F\sigma)$ という形 (ただし (K, σ) は D の cone (cocone)) の形の limit (colimit) を持つならば, F は D の limit (colimit) を保つ.

Proof.

1. 定義より明らか.
2. F が D の limit を create し, さらに, FD が limit を持つとする. 定義より, D の limit (K, σ) で, $(F(K), F\sigma)$ が FD の limit であるようなものが存在する.
   (K', σ') を D の limit とすると, limit は同型を除いて一意的であるから, 同型射 $f \colon K \to K' \in \mathcal{C}$ で, 任意の $i \in I$ について $\sigma_i = \sigma'_i f$ となるようなものが存在する. このとき $F(f) \colon F(K) \to F(K') \in \mathcal{D}$ は, 同型 $(F(K), F\sigma) \cong (F(K'), F\sigma')$ を与える. したがって $(F(K'), F\sigma')$ は FD の limit である.
3. (2) と同様に示せる.

□

第 4 章

Adjoint functors

この節では $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ を局所小圏とする.

定義 4.1. $L\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$, $R\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を関手とする. 全ての $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ に対し, 自然な全単射

$$\Phi\colon \mathcal{A}(L(B), A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}(B, R(A))$$

が存在するとき, L は R の左随伴（left adojoint）であるといい, R は L の右随伴（right adojoint）であるという.

三つ組 (L, R, Φ) を adjunction という.

注意 4.2. Φ が自然な全単射であるというのは, Φ が自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}^o \times \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "\mathcal{A}(L(-),-)"{name=U}] \arrow[r, bend right, "\mathcal{B}(-,R(-))"'{name=D}] & \mathbf{(Set)} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\Phi"] \end{tikzcd}$$

であるということ. すなわち, 任意の $f\colon A \to A' \in \mathcal{A}$ と, $g\colon B \to B' \in \mathcal{B}$ に対し, 次の図式が可換であるということ;

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(L(B'), A) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mathcal{A}(L(g),f)"'] & \mathcal{B}(B', R(A)) \arrow[d, "\mathcal{B}(g,R(f))"] \\ \mathcal{A}(L(B), A') \arrow[r, "\Phi"'] & \mathcal{B}(B, R(A')) \end{tikzcd}$$

つまり, 任意の $h\colon L(B') \to A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$R(f) \circ \Phi(h) \circ g = \Phi\left(f \circ h \circ L(g)\right)$$

が成り立つということ.

f あるいは g として恒等射を考えると, 任意の $h\colon L(B') \to A \in \mathcal{A}$ に対し,

$$R(f) \circ \Phi(h) = \Phi(f \circ h) \qquad \Phi(h) \circ g = \Phi(h \circ L(g))$$

が成り立つ.

逆に, 任意の f, g, h に対しこれらが成り立てば, $R(f) \circ \Phi(h) \circ g = \Phi(f \circ h \circ L(g))$ が成り立つ.

記法 4.3. $f\colon L(B) \to A$ に対し, $\Phi(f)\colon B \to R(A)$ を f の随伴とよび, $\widehat{f}$ 等といった記号で表すことがある.

また $g\colon B \to R(A)$ に対し, $\Phi^{-1}(g)\colon L(B) \to A$ を g の随伴とよび, $\widehat{g}$ 等といった記号で表すことがある.

記号^をどちらにも使うとややこしいこともあるが, どちらにも使ったりすることもよくある.

^以外の記号を使うこともよくある.

補題 4.4. $\mathcal{A}$ の射 $h\colon L(B) \to A$, $h'\colon L(B') \to A'$ および $\mathcal{A}$ の射 $f\colon A \to A'$, $\mathcal{B}$ の射 $g\colon B \to B'$ に対し, 次の左側の図式が可換になることと, 右側の図式が可換になることは同値である:

$$\begin{tikzcd} L(B) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "L(g)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ L(B') \arrow[r, "h'"'] & A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\widehat{h}"] \arrow[d, "g"'] & R(A) \arrow[d, "R(f)"] \\ B' \arrow[r, "\widehat{h'}"'] & R(A') \end{tikzcd}$$

Proof. 実際,

$$\Phi(fh) = R(f)\Phi(h) = R(f)\widehat{h}$$
$$\Phi(h'L(g)) = \Phi(h')g = \widehat{h'}g$$

ゆえ, $fh = h'L(g)$ が成り立つとすると,

$$R(f)\widehat{h} = \Phi(fh) = \Phi(h'L(g)) = \widehat{h'}g$$

となる.

逆に, $R(f)\widehat{h} = \widehat{h'}g$ が成り立てば,

$$\Phi(fh) = R(f)\widehat{h} = \widehat{h'}g = \Phi(h'L(g))$$

となり, Φ が全単射なので, $fh = h'L(g)$ となる. □

記法 4.5. L が R の左随伴（$\Leftrightarrow$ R が L の右随伴）であることを（Φ は明記しないで）

$$L \dashv R\colon \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B} \qquad\qquad L \dashv R\colon \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{B}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift right, "R"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift right, "L"'] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift right, "R"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, shift left, "R"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathcal{B} \arrow[l, shift left, "L"] \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift left, "R"] \end{tikzcd}$$

等と表記することがある.

例 4.6. A を集合とする.

集合 X に対しデカルト積 $X \times A$ を, 写像 $f\colon X \to Y$ に対し写像 $f \times \mathrm{id}\colon X \times A \to Y \times A$ を対応させることで関手 $- \times A\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Set)}$ がえられる.

集合 X に対し, A から X への写像全体のなす集合をここでは（$\mathrm{Map}(A, X)$ ではなく）X^A と書き, A の表現する関手 $h^A\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Set)}$ を $-^A$ と書く:

$$\mathbf{(Set)} \xrightarrow{-^A} \mathbf{(Set)}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"'] & X^A \arrow[d, "f_*"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & Y^A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u\colon A \to X \arrow[d, mapsto] \\ fu\colon A \to X \to Y \end{tikzcd}$$

$((\Phi(\varphi))(x))(a) = \varphi(x, a)$ で与えられる写像

$$\Phi\colon \mathrm{Map}(X \times A, Y) \to \mathrm{Map}(X, Y^A)$$

は自然な全単射であった. すなわち $\left(- \times A, -^A, \Phi\right)$ は随伴である:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{(Set)} \arrow[r, shift right, "-\times A"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{(Set)} \arrow[l, shift right, "-^A"'] \end{tikzcd}$$

写像 $h\colon X \times A \to Y$, $h'\colon X' \times A \to Y'$, $f\colon X \to X'$, $g\colon Y \to Y'$ に対し, 次の左側の図式が可換になることと, 右側の図式が可換になることは同値である:

$$\begin{tikzcd} X \times A \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f \times \mathrm{id}"'] & Y \arrow[d, "g"] \\ X' \times A \arrow[r, "h'"'] & Y' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\widehat{h}"] \arrow[d, "f"'] & Y^X \arrow[d, "g_*"] \\ X' \arrow[r, "\widehat{h'}"'] & {Y'}^A \end{tikzcd}$$

問 4.7. 上の Φ の自然性を確かめよ.

例 4.8. P, Q を順序集合, $f\colon P \to Q$, $g\colon Q \to P$ を写像とする.

任意の $p \in P$ と $q \in Q$ に対し,

$$f(p) \leq q \Leftrightarrow p \leq g(q)$$

が成り立つとき, g は f の右随伴 (right adjoint) あるいは upper adjoint であるといい, f は g の左随伴 (left adjoint) あるいは lower adjoint であるというのであった.

このとき, f, g は順序を保つ.

P, Q を圏とみなすと, 順序を保つ写像は関手に他ならない.

f と g が順序集合の間の写像として随伴であるということと, 圏の間の関手と見たときに随伴であるということは同じことである.

補題 4.9. 以下の条件は全て同値である.

1. L は R の左随伴.
2. 自然変換 $\eta\colon 1_{\mathcal{B}} \to RL$ で次の条件をみたすものが存在する:
   任意の射 $g\colon B \to R(A) \in \mathcal{B}$ に対し, 射 $f\colon L(B) \to A \in \mathcal{A}$ で $g = R(f)\eta_B$ をみたすものが, ただ一つ存在する:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\eta_B"'] & R(A) & A \\ & RL(B) \arrow[u, "R(f)"'] & L(B). \arrow[u, dotted, "f"'] \end{tikzcd}$$

3. R は L の右随伴.
4. 自然変換 $\varepsilon\colon LR \to 1_{\mathcal{A}}$ で次の条件をみたすものが存在する:
   任意の射 $f\colon L(B) \to A \in \mathcal{A}$ に対し, 射 $g\colon B \to R(A) \in \mathcal{B}$ で $f = \varepsilon_A L(g)$ をみたすものが, ただ一つ存在する:

$$\begin{tikzcd} A & L(B) \arrow[l, "f"'] \arrow[d, "L(g)"] & B \arrow[d, dotted, "g"] \\ & LR(A) \arrow[ul, "\varepsilon_A"] & R(A). \end{tikzcd}$$

5. 自然変換 $\eta\colon 1_{\mathcal{B}} \to RL$, $\varepsilon\colon LR \to 1_{\mathcal{A}}$ で次をみたすものが存在する:

$$(R\varepsilon)(\eta R) = 1_R\colon R \xrightarrow{\eta R} (RL)R = R(LR) \xrightarrow{R\varepsilon} R,$$
$$(\varepsilon L)(L\eta) = 1_L\colon L \xrightarrow{L\eta} L(RL) = (LR)L \xrightarrow{\varepsilon L} L.$$

自然変換 $\eta\colon 1_{\mathcal{B}} \to RL$ をこの adjunction の unit, $\varepsilon\colon LR \to 1_{\mathcal{A}}$ を counit という.

注意 4.10. 自然変換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "R(LR)"] \arrow[r, bend right, "R"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow R\varepsilon"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

は, $(R\varepsilon)_A = R(\varepsilon_A)\colon R(LR(A)) \to R(A)$ によりあたえられるもの.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, bend left, "R"] \arrow[r, bend right, "(RL)R"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta R"] & \mathcal{B} \end{tikzcd}$$

は $(\eta R)_A = \eta_{R(A)}\colon R(A) \to RL(R(A))$ によりあたえられるもの.

Proof. 自然変換 η, ε, Φ は, いずれか一つを定めれば, 他の二つは, $f\colon L(B) \to A$ $g\colon B \to R(A)$ に対し,

$$\Phi(f) = R(f)\eta_B, \quad \Phi^{-1}(g) = \varepsilon_A L(g)$$

により定まる. これらが条件をみたすことを確かめればよい.

もう少しだけ丁寧にみてみよう.

1⇔3 は定義である. 1⇔2 を示そう.

1⇒2. 仮定より, 自然な全単射

$$\Phi\colon \mathcal{A}(L(B), A) \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}(B, R(A))$$

がある. とくに

$$\Phi\colon \mathcal{A}(L(B), L(B)) \xrightarrow{\cong} \mathcal{B}(B, RL(B)).$$

$B \in \mathcal{B}$ に対し, $\eta_B \coloneqq \Phi(1_{L(B)})\colon B \to RL(B)$ と定める. Φ の自然性から, 任意の $g\colon B \to B' \in \mathcal{B}$ に対し次は可換:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(L(B), L(B)) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mathcal{A}(1, L(g))"'] & \mathcal{B}(B, RL(B)) \arrow[d, "\mathcal{B}(1, RL(g))"] \\ \mathcal{A}(L(B), L(B')) \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{B}(B, RL(B')) \\ \mathcal{A}(L(B'), L(B')) \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[u, "\mathcal{A}(L(g), 1)"] & \mathcal{B}(B', RL(B')) \arrow[u, "\mathcal{B}(g, 1)"'] \end{tikzcd}$$

したがって,

$$\begin{aligned} RL(g)\eta_B &= \mathcal{B}(1, RL(g)) \circ \Phi(1_{L(B)}) = \Phi \circ \mathcal{A}(1, L(g))(1_{L(B)}) \\ &= \Phi(L(g)) \\ &= \Phi \circ \mathcal{A}(L(g), 1)(1_{L(B')}) = \mathcal{B}(g, 1) \circ \Phi(1_{L(B')}) \\ &= \eta_{B'} g \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
1_{L(B)} \arrow[dd, mapsto] \arrow[rrrrr, bend left, mapsto] & \in & \mathcal{A}(L(B), L(B)) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dd, "{\mathcal{A}(1,L(g))}"'] & \mathcal{B}(B, RL(B)) \arrow[dd, "{\mathcal{B}(1,RL(g))}"] & \ni & \eta_B \arrow[d, mapsto] \\
 & & & & & RL(g)\eta_B \arrow[dll, phantom, "\ni"] \\
L(g) & \in & \mathcal{A}(L(B), L(B')) \arrow[r, "\Phi"] & \mathcal{B}(B, RL(B')) & & \\
 & & & & & \eta_{B'} g \arrow[ull, phantom, "\ni"] \\
1_{L(B)} \arrow[uu, mapsto] \arrow[rrrrr, bend right, mapsto] & \in & \mathcal{A}(L(B'), L(B')) \arrow[r, "\Phi"'] \arrow[uu, "{\mathcal{A}(L(g),1)}"] & \mathcal{B}(B', RL(B')) \arrow[uu, "{\mathcal{B}(g,1)}"'] & \ni & \eta_{B'} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

つまり次は可換:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, "f"'] & RL(B) \arrow[d, "RL(f)"] \\
B' \arrow[r, "\eta_{B'}"'] & RL(B')
\end{tikzcd}$$

したがって $\eta\colon 1_{\mathcal{B}} \to RL$ は自然変換.

射 $f\colon L(B) \to A \in \mathcal{A}$ に対し, 次の図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(L(B), L(B)) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "{\mathcal{A}(1,f)}"'] & \mathcal{B}(B, RL(B)) \arrow[d, "{\mathcal{B}(1,R(f))}"] \\
\mathcal{A}(L(B), A) \arrow[r, "\Phi"'] & \mathcal{B}(B, R(A))
\end{tikzcd}$$

は可換であるから, $\Phi(f) = R(f)\eta_B$ である.

Φ は全単射なので, 任意の射 $g\colon B \to R(A)$ に対し, $g = \Phi(f)$, すなわち $g = R(f)\eta_B$ となる射 $f\colon L(B) \to A$ がただ一つ存在する.

2⇒1. 写像 $\Phi\colon \mathcal{A}(L(B), A) \to \mathcal{B}(B, R(A))$ を $\Phi(f) = R(f)\eta_B$ により定めると, 上と同様な議論で Φ が自然な全単射であることが分かる.

双対性により, あるいは全く同様な議論で, 3⇔4 が成り立つ. よって 1〜4 は同値である.

1⇒5. 1 が成り立つとき,

$$\eta_B = \Phi(1_{L(B)}), \quad \varepsilon_A = \Phi^{-1}(1_{R(A)})$$

と定めると, $\eta\colon 1_{\mathcal{B}} \to RL, \varepsilon\colon RL \to 1_{\mathcal{A}}$ は自然変換であり, $f\colon L(B) \to A$ $g\colon B \to R(A)$ に対し,

$$\Phi(f) = R(f)\eta_B, \quad \Phi^{-1}(g) = \varepsilon_A L(g)$$

が成り立つ.

合成

$$R(A) \xrightarrow{\eta_{RA}} RL(RA) = R(LRA) \xrightarrow{R(\varepsilon_A)} R(A)$$

を考える. $\varepsilon_A\colon LR(A) \to A$ に対し $\Phi(\varepsilon_A)$ を考えると

$$\begin{aligned} R(\varepsilon_A)\eta_{R(A)} &= \Phi\left(\varepsilon_A\right) \\ &= \Phi\left(\Phi^{-1}(1_{R(A)})\right) = 1_{R(A)} \end{aligned}$$

ゆえ

$$(R\varepsilon)(\eta R) = 1_R$$

同様に

$$\begin{aligned} \varepsilon_{L(B)}L(\eta_B) &= \Phi^{-1}(\eta_B) \\ &= \Phi^{-1}\left(\Phi(1_{L(B)})\right) = 1_{L(B)} \end{aligned}$$

ゆえ

$$(\varepsilon L)(L\eta) = 1_L$$

5⇒1. 5 が成り立つとき, 写像

$$\Phi\colon \mathcal{A}(L(B), A) \to \mathcal{B}(B, R(A)), \qquad \Psi\colon \mathcal{B}(B, R(A)) \to \mathcal{A}(L(B), A)$$

を

$$\Phi(f) = R(f)\eta_B, \qquad \Psi(g) = \varepsilon_A L(g)$$

と定めれば, Φ, Ψ は自然で

$$\begin{aligned} \Psi\Phi(f) &= \Psi\left(R(f)\eta_B\right) \\ &= \varepsilon_A L(R(f)\eta_B) \\ &= \varepsilon_A L(R(f))L(\eta_B) \\ &= f\varepsilon_{L(B)}L(\eta_B) \\ &= f1_{L(B)} = f \end{aligned}$$

ただし, 2 行目から 3 行目は L の関手性を, 3 行目から 4 行目は ε の自然性

$$\begin{tikzcd} LR(L(B)) \arrow[r, "\varepsilon_{L(B)}"] \arrow[d, "LR(f)"'] & L(B) \arrow[d, "f"] \\ LR(A) \arrow[r, "\varepsilon_A"'] & A \end{tikzcd}$$

を用いた.

全く同様に $\Psi\Phi = \mathrm{id}$ が分かり, Φ, Ψ は全単射である. □

例 4.11. 随伴

$$\begin{tikzcd} \mathbf{(Set)} \arrow[r, shift right, "- \times A"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{(Set)} \arrow[l, shift right, "-^A"'] \end{tikzcd}$$

の unit

$$\eta_X \colon X \to (X \times A)^A$$

は $\eta_X(x) = i_x$ であたえられる. ただし, $i_x \colon A \to X \times A$ は $i_x(a) = (x, a)$ という写像.

また counit

$$\varepsilon_Y \colon Y^A \times Y \to A$$

は $\varepsilon_Y(f, y) = f(y)$, すなわち evaluation map であたえられる.

問 4.12. これを確かめよ.

系 4.13. 随伴関手は, 存在すれば, 同型を除いて一意的である. すなわち, L L' が R の左随伴ならば, L と L' は同型, つまり自然同型 $\alpha \colon L \to L'$ が存在する.

右随伴についても同様なことが成り立つ.

Proof. 右随伴の方を示そう.

R R' を L の右随伴とする. 補題 4.9 より, 自然変換 $\varepsilon \colon LR \to 1_{\mathcal{A}}$ $\varepsilon' \colon LR' \to 1_{\mathcal{A}}$ で, 補題 4.9 にある性質をみたすものが存在する. 各 $A \in \mathcal{A}$ に対し, 射 $\alpha_A \colon R(A) \to R'(A)$, $\alpha'_A \colon R'(A) \to R(A)$ で $\varepsilon_A = \varepsilon'_A L(\alpha_A)$, $\varepsilon'_A = \varepsilon_A L(\alpha'_A)$ をみたすものがただ一つ存在する. 一意性から $\{\alpha_A\}$ が自然変換であることと, 自然同型であることが分かる:

$$\begin{tikzcd} A & LR(A) \arrow[l, "\varepsilon_A"'] \arrow[d, "L(\alpha_A)"] & R(A) \arrow[d, "\alpha_A"'] \arrow[dd, bend left, equal, "1_{R(A)}"] \\ & LR'(A) \arrow[ul, "\varepsilon'_A"'] \arrow[d, "L(\alpha'_A)"] & R'(A) \arrow[d, "\alpha'_A"'] \\ & LR(A) \arrow[uul, "\varepsilon_A"] & R(A). \end{tikzcd}$$

もう少し丁寧にやってみよう.

ε' の普遍性より, 射 $\varepsilon_A\colon L(RA) \to A$ に対し, 射 $\alpha_A\colon RA \to R'(A)$ で, $\varepsilon_A = \varepsilon'_A L(\alpha_A)$ をみたすものが, ただ一つ存在する.

$$\begin{tikzcd}
A & L(RA) \arrow[l, "\varepsilon_A"'] \arrow[d, "L(\alpha_A)"] & R(A) \arrow[d, dotted, "\alpha_A"] \\
 & LR'(A) \arrow[ul, "\varepsilon'_A"] & R'(A)
\end{tikzcd}$$

射 $f\colon A \to B \in \mathcal{A}$ に対し, 次の図式を考える.

$$\begin{tikzcd}
B & A \arrow[l, "f"'] & L(RA) \arrow[l, "\varepsilon_A"'] & R(A) \arrow[d, dotted] \\
 & & LR'(B) \arrow[ull, "\varepsilon'_B"] & R'(B)
\end{tikzcd}$$

L の関手性, ε' の自然性および α_A の定義より

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_B L(R'(f)\alpha_A) &= \varepsilon'_B L(R'(f))L(\alpha_A) \\
&= f\varepsilon'_A L(\alpha_A) \\
&= f\varepsilon_A
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
B & A \arrow[l, "f"'] & L(RA) \arrow[l, "\varepsilon_A"'] \arrow[d, "L(\alpha_A)"] & R(A) \arrow[d, "\alpha_A"] \\
 & & LR'(A) \arrow[ul, "\varepsilon'_A"] \arrow[d, "LR'(f)"] & R'(A) \arrow[d, "R'(f)"] \\
 & & LR'(B) \arrow[uull, "\varepsilon'_B"] & R'(B)
\end{tikzcd}$$

一方 L の関手性, α_B の定義および ε の自然性より

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_B L(\alpha_B R(f)) &= \varepsilon'_B L(\alpha_B)L(R(f)) \\
&= \varepsilon_B L(R(f)) \\
&= f\varepsilon_A
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
B & A \arrow[l, "f"'] & L(RA) \arrow[l, "\varepsilon_A"'] \arrow[d, "L(R(f))"] & R(A) \arrow[d, "R(f)"] \\
 & & LR(B) \arrow[llu, "\varepsilon_B"'] \arrow[d, "L(\alpha_B)"] & R(B) \arrow[d, "\alpha_B"] \\
 & & LR'(B) \arrow[lluu, "\varepsilon'_B"] & R'(B)
\end{tikzcd}$$

$f\varepsilon_A = \varepsilon'_B L(g)$ となる射 $g\colon RA \to R'(B)$ の一意性より, $R'(f)\alpha_A = \alpha_B R(f)$ が成り立つ:

$$\begin{tikzcd}
R(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "R(f)"'] & R'(A) \arrow[d, "R'(f)"] \\
R(B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & R'(B)
\end{tikzcd}$$

よって $\alpha\colon R \to R'$ は自然変換である.

同様に自然変換 $\alpha'\colon R' \to R$ が定まる.

さらに, α_A, α'_A の定義より

$$\begin{aligned}
\varepsilon_A L(\alpha'_A\alpha_A) &= \varepsilon_A L(\alpha'_A)L(\alpha_A) \\
&= \varepsilon'_A L(\alpha_A) \\
&= \varepsilon_A \\
&= \varepsilon_A L(1_{R(A)})
\end{aligned}$$

ゆえ, 一意性より $\alpha'_A\alpha_A = 1_{R(A)}$. 同様に $\alpha_A\alpha'_A = 1_{R'(A)}$ が分かり, $\alpha\colon R \to R'$ は自然同型. □

命題 4.14. A right adjoint functor $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, namely, which has a left adjoint, preserves all existing limits.

命題 4.14°. A left adjoint functor $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ preserves all existing colimits.

Proof of 命題 4.14. Let $D\colon I \to \mathcal{A}$ be a functor and (L, τ) its limiting cone. We show that $(F(L), F\tau)$ is a limiting cone of $FD\colon I \to \mathcal{B}$. Let $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ be left adjoint to F and

$$\Phi\colon \operatorname{Hom}\mathcal{A}(G(B), A) \cong \operatorname{Hom}\mathcal{B}(B, F(A))$$

the natural bijection giving an adjunction. Let $\{\alpha_i\colon B \to F(D_i)\}$ be a cone on the composite functor FD. Taking adjoint, by the naturality of Φ, we obtain a cone $\{\Phi^{-1}(\alpha_i)\colon G(B) \to D_i\}$. Since L is a limit of D, there exists a unique arrow

$f\colon G(B) \to L$ which makes the lefthand side of the following diagram commutative for all arrows $u\colon i \to j \in I$:

$$\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[d, "\Phi^{-1}(\alpha_i)"'] \arrow[drr, "\Phi^{-1}(\alpha_j)" near start] & & L \arrow[dll, "\tau_i"' near start] \arrow[d, "\tau_j"] \\
D(i) \arrow[rr, "D(u)"'] & & D(j)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, dotted, "\Phi(f)"] \arrow[d, "\alpha_i"'] \arrow[drr, "\alpha_j" near start] & & F(L) \arrow[dll, "F(\tau_i)"' near start] \arrow[d, "F(\tau_j)"] \\
FD(i) \arrow[rr, "FD(u)"'] & & FD(j),
\end{tikzcd}$$

and we obtain an arrow $\Phi(f)\colon B \to F(L)$, which makes the righthand one commutative by the naturality of Φ. The uniquness of the arrow follows from that of the arrow f and the bijectivitiy of the map Φ. $\square$

注意 4.15. If one knows that a limit of FD exists, then for all $B \in \mathcal{B}$, we have

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hom}\mathcal{B}(B, F(\varprojlim D)) &\cong \operatorname{Hom}\mathcal{A}(G(B), \varprojlim D) \\
&\cong \varprojlim_I \operatorname{Hom}\mathcal{A}(G(B), D(i)) \\
&\cong \varprojlim_I \operatorname{Hom}\mathcal{B}(B, FD(i)) \\
&\cong \operatorname{Hom}\mathcal{B}(B, \varprojlim FD),
\end{aligned}$$

and we see that $F(\varprojlim D) \cong \varprojlim FD$.

■追記

定義 4.16. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ が本質的全射, essentially surjective $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対し, ある $C \in \mathcal{C}$ が存在し, $D \cong F(C)$.

補題 4.17. $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を関手, $F \cong G$ とする. このとき

1. F が full $\Leftrightarrow$ G が full.
2. F が faithful $\Leftrightarrow$ G が faithful.

Proof. $\alpha\colon F \to G$ を自然同型とする.
任意の $f\colon A \to B \in \mathcal{C}$ に対し次は可換

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\alpha_A", "\cong"'] \arrow[d, "F(f)"'] & GA \arrow[d, "G(f)"] \\
FB \arrow[r, "\alpha_B"'] & GB
\end{tikzcd}$$

ゆえ, 次は可換

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A,B) \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \mathcal{D}(FA,FB) \arrow[d, "\mathcal{D}(\alpha_A^{-1},\alpha_B)", "\cong"'] \\ & \mathcal{D}(GA,GB) \end{tikzcd}$$

で, あきらかに $\mathcal{D}(\alpha_A^{-1},\alpha_B)$ は全単射（逆写像は $\mathcal{D}(\alpha_A,\alpha_B^{-1})$）. □

忠実性についてはもう少し詳しく, 次がわかる.

補題 4.18. $F,G\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を関手, $\alpha\colon F\to G$ を自然変換とする. このとき

1. α が pointwise mono, すなわち, 任意の $A\in\mathcal{C}$ に対し $\alpha_A\colon FA\to GA$ が単射で, かつ F が faithful $\Rightarrow$ G も faithful.
2. α が pointwise epi かつ G が faithful $\Rightarrow$ F も faithful.

Proof. 1 を示す. $f_i\colon A\to B\in\mathcal{C}$ に対し次は可換:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "Ff_i"'] & GA \arrow[d, "Gf_i"] \\ FB \arrow[r, "\alpha_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

よって, $Gf_1=Gf_2$ とすると,

$$\begin{aligned} \alpha_B Ff_1 &= Gf_1\alpha_A \\ &= Gf_2\alpha_A \\ &= \alpha_B Ff_2 \end{aligned}$$

α_B が単射ゆえ

$$Ff_1=Ff_2$$

で, F が忠実ゆえ

$$f_1=f_2$$

□

補題 4.19. $F\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $G\colon\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ を関手とする. $GF\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が faithful ならば, F は faithful.

Proof.

$$\mathcal{C}(A,B) \xrightarrow{F} \mathcal{D}(FA,FB) \xrightarrow{G} \mathcal{E}(GFA,GFB)$$

$GF_{A,B} = G_{FA,FB}F_{A,B}$ が単射ならば $F_{A,B}$ は単射. □

注意 4.20. GF が full でも G は full とは限らない.

$D\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Top)}$ を, 離散位相を入れる関手, $U\colon \mathbf{(Top)} \to \mathbf{(Set)}$ を忘却関手とすると, $UD = 1_{\mathbf{(Set)}}\colon \mathbf{(Set)} \to \mathbf{(Set)}$ ゆえ UD は full だが, U は full ではない.

補題 4.21. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を関手とする.

1. 自然変換 $\rho\colon 1_{\mathcal{C}} \to F$ で, pointwise epi であるものが存在するならば, 任意の $\alpha\colon F \to F$ に対し, $F * \alpha = \alpha * F\colon F^2 \to F^2$, すなわち, 任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し $F(\alpha_A) = \alpha_{FA}\colon F(FA) \to F(FA)$.
2. $1_{\mathcal{C}} \cong F$ ならば, 任意の $\alpha, \beta\colon F \to F$ に対し, $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$, すなわち, 任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し $\alpha_A\beta_A = \beta_A\alpha_A\colon FA \to FA$.

Proof. 1. ρ の自然性より次は可換:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\rho_A"] \arrow[d, "\rho_A"'] & F(A) \arrow[d, "F(\rho_A)"] \\
FA \arrow[r, "\rho_{FA}"'] & F(FA)
\end{tikzcd}$$

すなわち $\rho_{FA}\rho_A = F(\rho_A)\rho_A$. 仮定より ρ_A は epi ゆえ, $\rho_{FA} = F(\rho_A)$.
ρ と α の自然性より次は可換:

$$\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\rho_{FA}"] \arrow[d, "\alpha_A"'] & F(FA) \arrow[d, "F(\alpha_A)"] \\
FA \arrow[r, "\rho_{FA}"'] & F(FA)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FA \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(\rho_A)"'] & FA \arrow[d, "F(\rho_A)"] \\
F(FA) \arrow[r, "\alpha_{FA}"'] & F(FA)
\end{tikzcd}$$

よって

$$\begin{aligned}
F(\alpha_A)\rho_{FA} &= \rho_{FA}\alpha_A \\
&= F(\rho_A)\alpha_A \\
&= \alpha_{FA}F(\rho_A) \\
&= \alpha_{FA}\rho_{FA}
\end{aligned}$$

で, ρ_{FA} が epi だから

$$F(\alpha_A) = \alpha_{FA}$$

2. 一般に $(\alpha * F) \circ (F * \beta) = (F * \beta) \circ (\alpha * F)$ が成り立つが, $1_{\mathcal{C}} \cong F$ ゆえ, 1 より $F * \alpha = \alpha * F$ だから

$$\begin{aligned} F * (\alpha \circ \beta) &= (F * \alpha) \circ (F * \beta) \\ &= (\alpha * F) \circ (F * \beta) \\ &= (F * \beta) \circ (\alpha * F) \\ &= (F * \beta) \circ (F * \alpha) \\ &= F * (\beta \circ \alpha) \end{aligned}$$

つまり, 任意の $A \in \mathcal{C}$ に対し

$$F(\alpha_A \beta_A) = F(\beta_A \alpha_A)$$

が成り立つ:

$$\begin{tikzcd} F(FA) \arrow[r, "\beta_{FA}"] \arrow[d, "F(\alpha_A)=\alpha_{FA}"'] & F(FA) \arrow[d, "\alpha_{FA}=F(\alpha_A)"] \\ F(FA) \arrow[r, "\beta_{FA}"'] & F(FA) \end{tikzcd}$$

$1_{\mathcal{C}} \cong F$ ゆえ F は忠実だから, $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

□

命題 4.22. 随伴

$$L \dashv R \colon \mathcal{A} \rightleftarrows \mathcal{B}$$

を考える.

1. 次は同値.
   (a) L は fully faithful
   (b) unit $\eta \colon 1_{\mathcal{B}} \to RL$ は同型
   (c) $1_{\mathcal{B}} \cong RL$
2. 次は同値.
   (a) R は fully faithful
   (b) counit $\varepsilon \colon LR \to 1_{\mathcal{A}}$ は同型
   (c) $LR \cong 1_{\mathcal{A}}$

Proof. 1 のみ示す. 2 は双対.

(a)⇔(b) を示す.

次の図式は可換:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(B,B') \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\mathcal{B}(1_B,\eta_{B'})"'] & \mathcal{A}(L(B),L(B')) \\
\mathcal{B}(B,RL(B')) \arrow[ur, "\Phi^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(\eta_{B'}g) &= \varepsilon_{LB'}L(\eta_{B'}g) \\
&= \varepsilon_{LB'}L(\eta_{B'})Lg \\
&= Lg
\end{aligned}$$

Φ^{-1} は全単射であるから, L が全単射 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}(1_B,\eta_{B'})$ が全単射.

(a)$\Rightarrow$(b). L が fully faithful とすると, 任意の B, B' に対し $\mathcal{B}(1_B,\eta_{B'})$ が全単射. とくに

$$\mathcal{B}(1_{RLB},\eta_B)\colon \mathcal{B}(RLB,B)\to\mathcal{B}(RLB,RLB)$$

が全射だから, $f\colon RLB\to B\in\mathcal{B}$ で, $\eta_B f = 1_{RLB}$ となるものが存在する. また

$$\mathcal{B}(1_B,\eta_B)\colon \mathcal{B}(B,B)\to\mathcal{B}(B,RLB)$$

が単射で,

$$\eta_B(f\eta_B) = (\eta_B f)\eta_B = 1_{RLB}\eta_B = \eta_B = \eta_B 1_B$$

ゆえ

$$f\eta_B = 1_B$$

よって $\eta_B\colon B\to RLB$ は同型.

(b)$\Rightarrow$(a). $\eta_{B'}$ が同型ならば $\mathcal{B}(1_B,\eta_{B'})$ は全単射ゆえあきらか.

よって (a)$\Leftrightarrow$(b) が示せた（下記注意 4.23 参照）.

(b)$\Rightarrow$(c) は自明.

(c)$\Rightarrow$(b) を示そう（[3]）.

$\varepsilon\colon LR\to 1_{\mathcal{A}}$ を counit, $\beta\colon 1_{\mathcal{B}}\to RL$ を自然同型とする.

$$\begin{tikzcd}
RLB \arrow[r, "\eta_{RLB}"] & RLRLB \arrow[r, "R\varepsilon_{LB}"] \arrow[d, shift right, "RL(\beta_B^{-1})"'] & RLB \\
B \arrow[u, "\beta_B", "\cong"'] \arrow[r, "\eta_B"'] & RLB \arrow[u, shift right, "RL(\beta_B)"'] \arrow[u, phantom, "\cong"] &
\end{tikzcd}$$

η の自然性から上の図式の四角形は可換であるから, 任意の B に対し,

$$RL(\beta_B^{-1})\eta_{RLB}\colon RLB\to RLB$$

が同型であることを示せばよい. η, ε は unit, counit であるから

$$\begin{aligned}&\big((R\varepsilon_{LB})RL(\beta_B)\big)\big(RL(\beta_B^{-1})(\eta_{RLB})\big)\\&=(R\varepsilon_{LB})(\eta_{RLB})\\&=((R\varepsilon)(\eta_R))_{LB}=1_{RLB}\end{aligned}$$

一方 $1_{\mathcal{B}}\cong RL$ であるから補題 4.21 より

$$\begin{aligned}&\big((RL\beta_B^{-1})(\eta_{RLB})\big)\big((R\varepsilon_{LB})(RL\beta_B)\big)\\&=\big((R\varepsilon_{LB})(RL\beta_B)\big)\big((RL\beta_B^{-1})(\eta_{RLB})\big)\\&=1_{RLB}\end{aligned}$$

□

注意 4.23. (a)⇔(b) は, 米田の補題を使う方がスッキリする.

米田の補題 系 2.79 より, 任意の B, B' に対し $\mathcal{B}(1_B, \eta_{B'})$ が全単射 ⇔ 任意の B' に対し $\eta_{B'}$ が同型 ⇔ η が同型.

ただし, 次のことを使っている.

- $F\colon \mathcal{C}\to\mathcal{D}$ が fully faithful のとき, f が同型 ⇔ $F(f)$ が同型（定義 2.45 ）.
- Yoneda embedding

$$\begin{aligned}&h_*\colon \mathcal{B}\to[\mathcal{B}^o,\mathbf{(Set)}]\\&h_*(B)=h_B=\mathcal{B}(-,B)\colon \mathcal{B}\to\mathbf{(Set)}\\&h_*(g)\colon h_*(B)=h_B=\mathcal{B}(-,B)\to\mathcal{B}(-,B')=h_{B'}=h_*(B')\\&h_*(g)_C=\mathcal{B}(1_C,g)\colon h_B(C)=\mathcal{B}(C,B)\to\mathcal{B}(C,B')=h_{B'}(C)\in\mathbf{(Set)}\end{aligned}$$

  は fully faithful なので, $g\colon B\to B'$ が同型 ⇔ $h_*(g)\colon h_B\to h_{B'}$ が同型.

  自然変換 $h_*(g)\colon h_B\to h_{B'}$ が同型ということは, 任意の $C\in\mathcal{B}$ に対し, $h_*(g)_C=\mathcal{B}(1_C,g)$ が同型（全単射）.

定理 4.24. $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{X}$ を関手とする. 次は同値.

1. F は同値. すなわち関手 $G\colon\mathcal{X}\to\mathcal{A}$ が存在し, $GF\cong 1_{\mathcal{A}}$, $FG\cong 1_{\mathcal{X}}$.
2. F は（左）随伴同値, すなわち関手 $G\colon\mathcal{X}\to\mathcal{A}$ が存在し, $F\dashv G$ かつ, unit $\eta\colon 1_{\mathcal{A}}\to GF$, counit $\varepsilon\colon FG\to 1_{\mathcal{X}}$ は同型.
3. F は（右）随伴同値, すなわち関手 $G\colon\mathcal{X}\to\mathcal{A}$ が存在し, $G\dashv F$ かつ, unit $\eta\colon 1_{\mathcal{X}}\to FG$, counit $\varepsilon\colon GF\to 1_{\mathcal{A}}$ は同型.
4. F は fully faithful かつ essentially surjective.

Proof. 2 ⇒ 4.　$\eta\colon 1_{\mathcal{A}}\to GF$ が同型だから前命題より F は fully faithful.　また $\varepsilon_X\colon F(G(X))\to X$ は同型ゆえ, F は essentially surjective.

$4 \Rightarrow 1$. F は essentially surjective ゆえ, 各 $X \in \mathcal{X}$ に対し, $A_X \in \mathcal{A}$ と同型 $\eta_X \colon X \xrightarrow{\cong} F(A_X)$ が存在する. （各 X に対しこのような A_X と η_X を選び）$G(X) = A_X$ と定める.

F は fully faithful ゆえ 次の図式の F は全単射. また, η_X, η_Y は同型ゆえ $\mathcal{X}(\eta_X^{-1}, \eta_Y)$ も全単射:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}(X,Y) \arrow[d, "\mathcal{X}(\eta_X^{-1},\eta_Y)"', "\cong"] & & \mathcal{A}(G(X),G(Y)) \arrow[dll, "\cong", "F"'] \\
\mathcal{X}(F(G(X)),F(G(Y))) & &
\end{tikzcd}$$

$$G \coloneqq F^{-1}\mathcal{X}(\eta_X^{-1}, \eta_Y) \colon \mathcal{X}(X,Y) \to \mathcal{A}(G(X),G(Y))$$

と定める.

G は関手である.

$$\begin{aligned}
G(1_X) &= F^{-1}\mathcal{X}(\eta_X^{-1}, \eta_X)(1_X) \\
&= F^{-1}(\eta_X 1_X \eta_X^{-1}) \\
&= F^{-1}(1_{FG(X)}) \\
&= 1_{G(X)}
\end{aligned}$$

$f \colon X \to Y, g \colon Y \to Z \in \mathcal{X}$ に対し,

$$\begin{aligned}
F\left(G(g)G(f)\right) &= F(G(g))F(G(f)) \\
&= F\left(F^{-1}\mathcal{X}(\eta_Y^{-1}, \eta_Z)(g)\right) F\left(F^{-1}\mathcal{X}(\eta_X^{-1}, \eta_Y)(f)\right) \\
&= (\eta_Z g \eta_Y^{-1})(\eta_Y f \eta_X^{-1}) \\
&= \eta_Z g f \eta_X^{-1} \\
&= F\left(F^{-1}\mathcal{X}(\eta_X^{-1}, \eta_Z)(gf)\right) \\
&= F(G(gf))
\end{aligned}$$

ゆえ

$$G(g)G(f) = G(gf)$$

$\eta \colon 1_{\mathcal{X}} \to FG$ は自然変換である. $f \colon X \to Y \in \mathcal{X}$ に対し,

$$\begin{aligned}
FG(f)\eta_X &= F\left(F^{-1}\mathcal{X}(\eta_X^{-1}, \eta_Y)(f)\right)\eta_X \\
&= \eta_Y f \eta_X^{-1} \eta_X \\
&= \eta_Y f
\end{aligned}$$

よって $\eta \colon 1_{\mathcal{X}} \to FG$ は自然同型.

各 $A \in \mathcal{A}$ に対し $\theta_A \colon A \to GF(A) \in \mathcal{A}$ を $\theta_A \coloneqq F^{-1}(\eta_{FA})$ により定める:

$$\mathcal{X}(F(A), FGF(A)) \xleftarrow[F]{\cong} \mathcal{A}(A, GF(A))$$

η_{FA} が同型で, F が fully faithful なので θ_A も同型である. また, $g\colon A \to B \in \mathcal{A}$ に対し, η は自然変換なので次は可換:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\eta_{FA}"] \arrow[d, "F(g)"'] & FGFA \arrow[d, "FGF(g)"] \\ FB \arrow[r, "\eta_{FB}"'] & FGFB \end{tikzcd}$$

よって

$$\begin{aligned} F(\theta_B g) &= F(\theta_B)F(g) \\ &= \eta_{FB}F(g) \\ &= FGF(g)\eta_{FA} \\ &= FGF(g)F(\theta_A) \\ &= F(GF(g)\theta_A) \end{aligned}$$

F は faithful ゆえ

$$\theta_B g = GF(g)\theta_A$$

すなわち, $\theta\colon 1_{\mathcal{A}} \to GF$ は自然同型.

1 $\Rightarrow$ 2. $\eta\colon 1_{\mathcal{A}} \to GF$ を自然同型とする.

$FG \cong 1_{\mathcal{X}}$ ゆえ FG は fully faithful. $X \in \mathcal{X}$ に対し, 射 $\varepsilon_X\colon FGX \to X$ を $\varepsilon_X := (FG)^{-1}\left(F(\eta_{GX}^{-1})\right)$ と定める:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(FGX, X) & \xrightarrow[\cong]{FG} & \mathcal{X}(FGFGX, FGX) \\ \cup & & \cup \\ \varepsilon_X & \longmapsto & F(GFGX \xrightarrow{\eta_{GX}^{-1}} GX) \end{array}$$

FG が fully faithful で, $FG(\varepsilon_X) = F(\eta_{GX}^{-1})$ が同型だから ε_X は同型.

FG が faithful で, $F * \eta^{-1} * G$ が自然変換だから ε は自然変換である: $f\colon X \to Y \in \mathcal{X}$ に対し

$$\begin{aligned} FG(f\varepsilon_X) &= FG(f)FG(\varepsilon_X) \\ &= FG(f)F(\eta_{GX}^{-1}) \\ &= F(Gf\eta_{GX}^{-1}) \\ &= F(\eta_{GY}^{-1}GFGf) \\ &= F(\eta_{GY}^{-1})FGFGf \\ &= FG(\varepsilon_Y)FG(FGf) \\ &= FG(\varepsilon_Y FGf) \end{aligned}$$

ゆえ

$$f\varepsilon_X = \varepsilon_Y FGf$$

$$\begin{tikzcd} FGX \arrow[r, "\varepsilon_X"] \arrow[d, "FGf"'] & X \arrow[d, "f"] \\ FGY \arrow[r, "\varepsilon_Y"'] & Y \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} FGFGX \arrow[r, "F(\eta_{GX}^{-1})"] \arrow[d, "FGFGf"'] & FGX \arrow[d, "FGf"] \\ FGFGY \arrow[r, "F(\eta_{GY}^{-1})"'] & FGY \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} GFGX \arrow[r, "\eta_{GX}^{-1}"] \arrow[d, "GFGf"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ GFGY \arrow[r, "\eta_{GY}^{-1}"'] & GY \end{tikzcd}$$

$X \in \mathcal{X}$ に対し

$$\begin{aligned} F\left(G(\varepsilon_X)\eta_{GX}\right) &= FG(\varepsilon_X)F(\eta_{GX}) \\ &= F(\eta_{GX}^{-1})F(\eta_{GX}) \\ &= F(1_{GX}) \end{aligned}$$

$GF \cong 1_{\mathcal{A}}$ ゆえ F は faithful. よって

$$G(\varepsilon_X)\eta_{GX} = 1_{GX}$$

$A \in \mathcal{A}$ に対し

$$\begin{aligned} FG\left(\varepsilon_{FA}F(\eta_A)\right) &= FG\left(\varepsilon_{FA}\right)FG\left(F(\eta_A)\right) \\ &= F\left(\eta_{GFA}^{-1}\right)FG\left(F(\eta_A)\right) \\ &= F\left(\eta_{GFA}^{-1}GF(\eta_A)\right) \\ &= F\left(\eta_{GFA}^{-1}GF(\eta_A)\right) \\ &= F(1_{GFA}) \\ &= FG(1_{FA}) \end{aligned}$$

ゆえ

$$\varepsilon_{FA}F(\eta_A) = 1_{FA}$$

$$\begin{tikzcd} GFA \arrow[r, "\eta_A^{-1}"] \arrow[d, "GF(\eta_A)"'] & A \arrow[d, "\eta_A"] \\ GFGFA \arrow[r, "\eta_{GFA}^{-1}"'] & GFA \end{tikzcd}$$

よって η を unit, ε を counit として $F \dashv G$ であり, η, ε は同型. $\square$

第 5 章

Kan extensions

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を小圏とする. 関手 $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対し, 関手 $K^* : [\mathcal{B},\mathcal{C}] \to [\mathcal{A},\mathcal{C}]$ が $K^*F = FK$ により定義される. $\mathcal{C}$ に適当な（余）完備性があれば, K^* は随伴を持つ:

$$\begin{tikzcd}
{[\mathcal{A},\mathcal{C}]} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Lan}_K"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Ran}_K"'] & {[\mathcal{B},\mathcal{C}]} \arrow[l, "K^*" description]
\end{tikzcd}$$

これらを Kan extension という.

小圏であるとか完備性の仮定をしない状況で Kan extension を定義する.

定義 5.1. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ を圏, $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ を関手とする.

関手 $\mathrm{Lan}_K F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ と自然変換 $\eta\colon F \to \mathrm{Lan}_K FK$ の組 $(\mathrm{Lan}_K F, \eta)$ は, 次の普遍性をみたすとき, K にそった F の left Kan extension という:

- 任意の関手 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ と任意の自然変換 $\alpha\colon F \to GK$ に対し, 自然変換 $\sigma\colon \mathrm{Lan}_K F \to G$ で $(\sigma K)\eta = \alpha$ をみたすものがただ一つ存在する:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[dr, bend left, "G"] \arrow[dr, "\mathrm{Lan}_K F"'] & \\
\mathcal{A} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\eta"'] & GK \\
& \mathrm{Lan}_K FK \arrow[u, "\sigma K"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \\
\mathrm{Lan}_K F \arrow[u, dotted, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

定理 5.2. $\mathcal{C}$ が余完備であれば, left Kan extension が存在する.

Proof. 関手 $\mathrm{Lan}_K F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を次のように定める:

$B \in \mathcal{B}$ に対し, $(K \downarrow B)$ を $\mathcal{A} \xrightarrow{K} \mathcal{B} \ni B$ により定まる comma category とし, $Q_B\colon (K \downarrow B) \to \mathcal{A}$ を $Q_B((A,g)) = A$, $Q_B(f) = f\colon A \to A'$ により定まる標準的射影関手とする. $\mathrm{Lan}_K F(B) \in \mathcal{C}$ を合成

$$(K \downarrow B) \xrightarrow{Q_B} \mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$$

の余極限と定める:

$$\mathrm{Lan}_K F(B) = \mathrm{Colim}\, FQ_B \in \mathcal{C}$$

$$\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[rr, "K(f)"] \arrow[dr, "g"'] & & K(A') \arrow[dl, "g'"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, squiggly, "Q_B"'] \\
{}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] & & A' & \overset{F}{\rightsquigarrow} & F(A) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr, "\sigma_{(A,g)}"'] & & F(A') \arrow[dl, "\sigma_{(A',g')}"] \\
& & & & & \mathrm{Colim}\, FQ_B = \mathrm{Lan}_K F(B) &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Colim}\, FQ_B$ を $\varinjlim_{(K\downarrow B)} F$ と書くことがある.

射 $h\colon B \to B' \in \mathcal{B}$ は合成により関手

$$(K \downarrow h)\colon (K \downarrow B) \to (K \downarrow B')$$

を定める:

$$\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[rr, "K(f)"] \arrow[dr, "g"'] & & K(A') \arrow[dl, "g'"] \\
& B &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K(A) \arrow[rr, "K(f)"] \arrow[dr, "g"'] & & K(A') \arrow[dl, "g'"] \\
& B \arrow[d, "h"'] & \\
& B' &
\end{tikzcd}$$

あきらかに $FQ_B = FQ_{B'}(K\downarrow h)$ であるから, 射

$$\mathrm{Lan}_K F(h)\colon \mathrm{Lan}_K F(B) = \varinjlim_{(K\downarrow B)} FQ_B \to \varinjlim_{(K\downarrow B')} FQ_{B'} = \mathrm{Lan}_K F(B')$$

が得られる（??° を見よ. $\mathrm{Lan}_K F(h) = \mathrm{Colim}(K\downarrow h)^*_{FQ_{B'}}$:

$$\begin{tikzcd}
(K\downarrow B) \arrow[r, "(K\downarrow h)"] \arrow[rr, bend right, "FQ_B"'] & (K\downarrow B') \arrow[r, "FQ_{B'}"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& FQ_{B'}(K\downarrow h) = FQ_B \arrow[dl, "\sigma^{FQ_{B'}}(K\downarrow h)"'] \arrow[ddr, "\sigma^{FQ_B}"] & \\
\Delta_{\mathrm{Colim}\,FQ_{B'}}(K\downarrow h) \arrow[d, equal] & & \\
\Delta_{\mathrm{Colim}\,FQ_{B'}} & & \Delta_{\mathrm{Colim}\,FQ_B} \arrow[ll, dotted]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& F(A) \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & \\
FQ_{B'}(A,hg) \arrow[d, "\sigma^{FQ_{B'}}_{(A,hg)}"'] & & FQ_B(A,g) \arrow[d, "\sigma^{FQ_B}_{(A,g)}"] \\
\mathrm{Colim}\,FQ_{B'} \arrow[d, equal] & & \mathrm{Colim}\,FQ_B \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Lan}_K F(B') & & \mathrm{Lan}_K F(B) \arrow[ll, "\mathrm{Lan}_K F(h)"]
\end{tikzcd}$$

）.

$\mathrm{Lan}_K F$ が関手となることは容易にわかる.

自然変換 $\eta\colon F \to \mathrm{Lan}_K FK$ を次のように定める:

$A \in \mathcal{A}$ に対し, $\mathrm{Lan}_K F(K(A))$ は関手

$$(K\downarrow K(A)) \xrightarrow{Q_{K(A)}} \mathcal{B} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$$

の余極限であった．$(A, 1_{K(A)})$ は comma category $(K \downarrow K(A))$ の対象であることに注意し，$\eta_A\colon F(A) \to \mathrm{Lan}_K F(K(A))$ を標準的な射（colimitting cocone の一部）

$$F(A) = FQ_{K(A)}(A, 1_{K(A)}) \to \varinjlim_{(K \downarrow K(A))} FQ_{K(A)} = \mathrm{Lan}_K F(K(A))$$

と定める．

射 $f\colon A \to A' \in \mathcal{A}$ は，$(K \downarrow K(A'))$ の射 $f\colon (A, K(f)) \to (A', 1_{K(A')})$ を定める:

$$\begin{tikzcd}
K(A') \arrow[dr, "1_{K(A')}"'] & & K(A) \arrow[ll, "K(f)"'] \arrow[dl, "K(f)"] \\
& K(A') &
\end{tikzcd}$$

よって，次の図式の上の三角形は（$\mathrm{Lan}_K F(K(A')) = \mathrm{Colim}\, FQ_{K(A')}$ の colimitting cocone の一部なので）可換である．また，下の三角形は $\mathrm{Lan}_K F$ の定め方より可換である．

$$\begin{tikzcd}
F(A') \arrow[d, "\eta_{A'} = \sigma'_{(A',1)}"'] & & F(A) \arrow[ll, "F(f)"'] \arrow[d, "\sigma_{(A,1)} = \eta_A"] \arrow[dll, "\sigma'_{(A,K(f))}"] \\
\mathrm{Lan}_K F(K(A')) & & \mathrm{Lan}_K F(K(A)) \arrow[ll, "\mathrm{Lan}_K F(K(f))"]
\end{tikzcd}$$

よって η は自然変換である．

普遍性を確かめよう．

$G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を関手，$\alpha\colon F \to GK$ を自然変換とする．

自然変換 $\sigma\colon \mathrm{Lan}_K F \to G$ を以下のように定める:

$B \in \mathcal{B}$ に対し，cocone $\pi\colon KQ_B \to \Delta_B$ が

$$\pi_{(A,g)} = g\colon KQ_B(A, g) = K(A) \to B$$

により定まり，cocone

$$FQ_B \xrightarrow{\alpha Q_B} GKQ_B \xrightarrow{G\pi} \Delta_{G(B)}$$

（射の族 $\{G(g)\alpha_A\}_{(A,g)}$

$$FQ_B(A, g) = F(A) \xrightarrow{\alpha_A} GK(A) \xrightarrow{G(g)} G(B)$$

）を得る．よって $\mathrm{Colim}\, FQ_B$ の普遍性より射

$$\sigma_B\colon \mathrm{Lan}_K F(B) = \mathrm{Colim}\, FQ_B \to G(B)$$

を得る．

射 $h\colon B \to B'$ に対し

$$\begin{tikzcd}
(K\downarrow B) \arrow[r, "(K\downarrow h)"] & (K\downarrow B') \arrow[r, bend left, "FQ_{B'}"] \arrow[r, bend right, "\Delta_{G(B')}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

に??° を使うと次は可換

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Lan}_K F(B') \arrow[r, equal] \arrow[d, "\sigma_{B'}"'] & \mathrm{Colim}\, FQ_{B'} & \mathrm{Colim}\, FQ_{B'}(K\downarrow h) \arrow[l, "\mathrm{Lan}_K(h)"'] \arrow[r, equal] & \mathrm{Lan}_K F(B) \arrow[d, "\sigma_B"] \\
G(B') \arrow[r, equal] & \mathrm{Colim}\, \Delta_{G(B')} & \mathrm{Colim}\, \Delta_{G(B')}(K\downarrow h) \arrow[l, "G(h)"] \arrow[r, equal] & G(B')
\end{tikzcd}$$

ゆえ σ は自然変換.

$\sigma_{K(A)}$ の定義より, 任意の $(A', g) \in (K\downarrow K(A))$ に対し, 次は可換:

$$\begin{tikzcd}
FQ_{K(A)}(A', g) \arrow[r, equal] & F(A') \arrow[r, "\alpha_{A'}"] \arrow[d, "\sigma_{(A',g)}"'] & GK(A') \arrow[d, "G(g)"] \\
\mathrm{Lan}_K F(K(A)) \arrow[r, equal] & \mathrm{Colim}\, FQ_{K(A)} \arrow[r, "\sigma_{K(A)}"'] & GK(A)
\end{tikzcd}$$

特に $(A, 1_{K(A)}) \in (K\downarrow K(A))$ に対し

$$\begin{tikzcd}
FQ_{K(A)}(A, 1) \arrow[r, equal] & F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "\eta_A=\sigma_{(A,1)}"'] & GK(A) \arrow[d, equal, "G(1)=1"] \\
\mathrm{Lan}_K F(K(A)) \arrow[r, equal] & \mathrm{Colim}\, FQ_{K(A)} \arrow[r, "\sigma_{K(A)}"'] & GK(A)
\end{tikzcd}$$

が可換, すなわち $(\sigma K)\eta = \alpha$.

$\tau\colon \mathrm{Lan}_K F \to G$ が自然変換で, $(\tau K)\eta = \alpha$ をみたすとする. このとき, $\tau = \sigma$ であること, すなわち, 任意の $B \in \mathcal{B}$ に対し, $\tau_B = \sigma_B\colon \mathrm{Lan}_K F(B) \to G(B)$ であることを示そう.

σ_B の定め方から任意の $(A, h) \in (K\downarrow B)$ に対し, $\tau_B\sigma_{(A,h)} = G(h)\alpha_A$ であることを示せばよい.

$h\colon K(A) \to B \in \mathcal{B}$ とする. 任意の $(A', g) \in (K\downarrow K(A))$ に対し, $(A', hg) \in (K\downarrow B)$ で, $\mathrm{Lan}_K F(h)$ の定め方より, 次は可換:

$$\begin{tikzcd}
& F(A') \arrow[dl, "\sigma_{(A',hg)}"'] \arrow[dr, "\sigma_{(A,g)}"] & \\
\mathrm{Lan}_K F(B) & & \mathrm{Lan}_K F(K(A)) \arrow[ll, "\mathrm{Lan}_K F(h)"]
\end{tikzcd}$$

特に $(A, 1_{K(A)}) \in (K \downarrow K(A))$ に対し

$$\begin{tikzcd} & F(A) \arrow[dl, "\sigma_{(A,h)}"'] \arrow[dr, "\sigma_{(A,1)}=\eta_A"] & \\ \mathrm{Lan}_K F(B) & & \mathrm{Lan}_K F(K(A)) \arrow[ll, "\mathrm{Lan}_K F(h)"] \end{tikzcd}$$

は可換. 次の図式で, 上の三角形は仮定より可換, 下の四角形は τ が自然変換なので可換.

$$\begin{tikzcd} & F(A) \arrow[ddl, bend right, "\sigma_{(A,h)}"'] \arrow[d, "\eta_A"] \arrow[dr, "\alpha_A"] & \\ & \mathrm{Lan}_K F(K(A)) \arrow[dl, "\mathrm{Lan}_K F(h)"] \arrow[r, "\tau_{K(A)}"'] & GK(A) \arrow[d, "G(h)"] \\ \mathrm{Lan}_K F(B) \arrow[rr, "\tau_B"'] & & G(B) \end{tikzcd}$$

よって $\tau_B \sigma_{(A,h)} = G(h)\alpha_A$.

$\square$

定義 5.1°. $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ を圏, $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ を関手とする.

関手 $\mathrm{Ran}_K F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ と自然変換 $\varepsilon\colon \mathrm{Ran}_K FK \to F$ の組 $(\mathrm{Ran}_K F, \varepsilon)$ は, 次の普遍性をみたすとき, K にそった F の right Kan extension という:

- 任意の関手 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ と任意の自然変換 $\alpha\colon GK \to F$ に対し, 自然変換 $\sigma\colon G \to \mathrm{Ran}_K F$ で $\varepsilon(\sigma K) = \alpha$ をみたすものがただ一つ存在する:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[dr, "\mathrm{Ran}_K F"'] \arrow[dr, shift left=3, "G"] \arrow[dr, phantom, shift left=1.5, "\sigma"] & \\ \mathcal{A} \arrow[u, "K"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{C} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F & GK \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\sigma K"] \\ & \mathrm{Ran}_K FK \arrow[ul, "\varepsilon"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[d, dotted, "\sigma"] \\ \mathrm{Ran}_K F \end{tikzcd}$$

定理 5.2°. $\mathcal{C}$ が完備であれば, right Kan extension が存在する.

Proof.

$$(B \downarrow K) \xrightarrow{Q_B} \mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}$$

$$\mathrm{Ran}_K F(B) = \mathrm{Lim}\, FQ_B \in \mathcal{C}$$

と定める.

$$
\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "g'"] & & & & \\
K(A) \arrow[rr, "K(f)"'] & & K(A') & & & \\
 & \arrow[d, squiggly, "Q_B"'] & & & & \\
 & & & & \operatorname{Lim} FQ_B \arrow[r, equal] & \operatorname{Ran}_K F(B) \arrow[dl, "\sigma_{(A,g)}"'] \arrow[dr, "\sigma_{(A',g')}"] & \\
A \arrow[rr, "f"] & & A' \arrow[r, squiggly, "F"] & F(A) \arrow[rrr, "F(f)"'] & & & F(A')
\end{tikzcd}
$$

□

定理 5.3 (Left Kan extension)**.** Let $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ be small categories, $\mathcal{C}$ a cocomplete catgory, and $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ be 関手. Then the functor $K^*\colon [\mathcal{B},\mathcal{C}] \to [\mathcal{A},\mathcal{C}]$ has a left adojoint functor $\operatorname{Lan}_K\colon [\mathcal{A},\mathcal{C}] \to [\mathcal{B},\mathcal{C}]$. Thus there exits a natural isomorphism

$$\operatorname{Nat}(\operatorname{Lan}_K F, G) \cong \operatorname{Nat}(F, GK)$$

for each $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ and $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$.

Proof. For 関手 $F \in [\mathcal{A},\mathcal{C}]$, we define 関手

For a 自然変換 $\alpha\colon F \to G \in [\mathcal{A},\mathcal{C}]$, we define a natural transformation $\operatorname{Lan}_K \alpha\colon \operatorname{Lan}_K F \to \operatorname{Lan}_K G \in [\mathcal{B},\mathcal{C}]$ as follows: For each object $B \in \mathcal{B}$, the 自然変換 α defines a 自然変換 $\alpha 1\colon FQ_B \to GQ_B$, which induces an arrow

$$(\operatorname{Lan}_K \alpha)_B\colon \operatorname{Lan}_K F(B) = \varinjlim_{(K\downarrow B)} FQ_B \to \varinjlim_{(K\downarrow B)} GQ_B = \operatorname{Lan}_K G(B).$$

It is straightforward to see that $\operatorname{Lan}_K \alpha$ is natural in $B \in \mathcal{B}$ and $\operatorname{Lan}_K\colon [\mathcal{A},\mathcal{C}] \to [\mathcal{B},\mathcal{C}]$ is 関手.

To prove that the functor Lan_K is left adjoint to K^*, we show that the condition (5) in 補題 4.9 holds, namely, there exist 自然変換 s

$$\eta\colon 1_{[\mathcal{A},\mathcal{C}]} \to K^* \operatorname{Lan}_K \quad \text{and} \quad \varepsilon\colon \operatorname{Lan}_K K^* \to 1_{[\mathcal{B},\mathcal{C}]}$$

such that the following equalities hold:

$$\begin{aligned}(K^*\varepsilon)(\eta K^*) = 1_{K^*}\colon K^* &\xrightarrow{\eta K^*} (K^* \operatorname{Lan}_K)K^* \\ &= K^*(\operatorname{Lan}_K K^*) \xrightarrow{K^*\varepsilon} K^*,\end{aligned} \tag{5.1}$$

$$(\varepsilon \operatorname{Lan}_K)(\operatorname{Lan}_K \eta) = 1_{\operatorname{Lan}_K} \colon \operatorname{Lan}_K \xrightarrow{\operatorname{Lan}_K \eta} \operatorname{Lan}_K(K^* \operatorname{Lan}_K) \\ = (\operatorname{Lan}_K K^*) \operatorname{Lan}_K \xrightarrow{\varepsilon \operatorname{Lan}_K} \operatorname{Lan}_K . \quad (5.2)$$

We construct 自然変換 s

$$\eta_F \colon F \to K^* \operatorname{Lan}_K(F) \quad \text{and} \quad \varepsilon_G \colon \operatorname{Lan}_K K^*(G) \to G$$

as follows: By the definition of K^*, we have $(K^* \operatorname{Lan}_K F)(A) = \operatorname{Lan}_K F(K(A))$ for $A \in \mathcal{A}$. Note that $(A, 1_{K(A)})$ is an object of $(K \downarrow K(A))$.

Let $\eta_F(A) \colon F(A) \to (K^* \operatorname{Lan}_K F)(A)$ be the canonical arrow

$$F(A) = FQ_{K(A)}(A, 1_{K(A)}) \to \varinjlim_{(K \downarrow K(A))} FQ_{K(A)} \\ = \operatorname{Lan}_K F(K(A)) = (K^* \operatorname{Lan}_K F)(A).$$

Let $B \in \mathcal{B}$ be an object. Each object $(A, f) \in (K \downarrow B)$ gives an arrow

$$GKQ_B(A, f) = G(K(A)) \xrightarrow{G(f)} G(B),$$

which defines a cocone $GKQ_B \to \Delta_{G(B)}$, whence we obtain an arrow

$$\varepsilon_G(B) \colon \operatorname{Lan}_K K^*G(B) = \varinjlim_{(K \downarrow B)} (K^*G)Q_B = \varinjlim_{(K \downarrow B)} GKQ_B \to G(B).$$

Again it is straightforward to see that η and ε are natural transformaitons.

We will show that the equality (5.1) holds. For $A \in \mathcal{A}$ and $G \in [\mathcal{B}, \mathcal{C}]$, the following diagram is commutative by definitions:

$$\begin{tikzcd}
K^*G(A) \arrow[d, equal] \arrow[rrrr, bend left, "(\eta K^*)_G(A) = \eta_{K^*G}(A)"] & & & & \\
GK(A) \arrow[r, equal] & GKQ_{K(A)}(A, 1_{K(A)}) \arrow[r] & \varinjlim_{(K \downarrow K(A))} GKQ_{K(A)} \arrow[r, equal] & K^* \operatorname{Lan}_K K^*G(A).
\end{tikzcd}$$

On the other hand, for each object $(A', f) \in (K \downarrow K(A))$, the following diagram is commutative by definitions:

$$\begin{tikzcd}
GK(A') \arrow[r, equal] \arrow[rrd, bend right, "G(f)"'] & GKQ_{K(A')}(A', f) \arrow[r] & \varinjlim_{(K \downarrow K(A))} GKQ_{K(A)} \arrow[r, equal] & K^* \operatorname{Lan}_K K^*G(A) \arrow[d, "(K^*\varepsilon)_G(A) = K^*(\varepsilon_G(K(A)))"] \\
 & & GK(A) \arrow[r, equal] & K^*G(A).
\end{tikzcd}$$

In particular, we have the folloing commutative diagram;

$$
\begin{tikzcd}
K^*G(A) \arrow[d, equal] \arrow[drrr, bend left, "\eta K^*"] & & & \\
GK(A) \arrow[r, equal] \arrow[drr, bend right, "G(1_{K(A)})=1"'] & GKQ_{K(A)}(A, 1_{K(A)}) \arrow[r] & \varinjlim\limits_{(K\downarrow K(A))} GKQ_{K(A)} \arrow[r, equal] & K^* \operatorname{Lan}_K K^*G(A) \arrow[d, "K^*\varepsilon"] \\
 & & GK(A) \arrow[r, equal] & K^*G(A),
\end{tikzcd}
$$

which shows that the equality (5.1) holds.

Finally we will show that the equality (5.2) holds. Let $B \in \mathcal{B}$ and $F \in [\mathcal{B}, \mathcal{C}]$. By definitions, we have the following commutative diagram for each object $(A, f) \in (K \downarrow B)$;

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Lan}_K F(B) \arrow[r, "(\operatorname{Lan}_k \eta)_F(B)", "=(\operatorname{Lan}_K(\eta_F))(B)"'] \arrow[d, equal] & \operatorname{Lan}_K K^* \operatorname{Lan}_K F(B) \arrow[r, "(\varepsilon \operatorname{Lan}_K)_F(B)", "=\varepsilon_{\operatorname{Lan}_K F}(B)"'] \arrow[d, equal] & \operatorname{Lan}_K F(B) \arrow[d, equal] \\
\varinjlim\limits_{(K\downarrow B)} FQ_B & \varinjlim\limits_{(K\downarrow B)} K^* \operatorname{Lan}_K FQ_B & \varinjlim\limits_{(K\downarrow B)} FQ_B \\
 & K^* \operatorname{Lan}_K FQ_B(A, f) \arrow[u] \arrow[d, equal] & \\
 & \operatorname{Lan}_K F(K(A)) \arrow[d, equal] \arrow[uuur, bend right, "\operatorname{Lan}_K F(f)"'] & \\
 & \varinjlim\limits_{(K\downarrow K(A))} FQ_{K(A)} & \\
FQ_B(A, f) \arrow[r, equal] \arrow[uuuu] & FQ_{K(A)}(A, 1_{K(A)}) \arrow[r, equal] \arrow[u] & FQ_B(A, f) \arrow[uuuu]
\end{tikzcd}
$$

where vertical arrows are canonical ones. By the universality of the colimit $\varinjlim\limits_{(K\downarrow B)} FQ_B$, the composite $(\varepsilon \operatorname{Lan}_K)(\operatorname{Lan}_k \eta)_F(B)$ is the identity, which shows that the equality (5.2) holds. □

定理 5.3°((Right Kan extension))**.** Let $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ be small categories, $\mathcal{C}$ a complete catgory, and $K\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ be 関手. Then the functor $K^*\colon [\mathcal{B}, \mathcal{C}] \to [\mathcal{A}, \mathcal{C}]$ has a right adojoint functor $\mathrm{Ran}_K \colon [\mathcal{A}, \mathcal{C}] \to [\mathcal{B}, \mathcal{C}]$. Thus there exits a natural isomorphism

$$\mathrm{Nat}(GK, F) \cong \mathrm{Nat}(G, \mathrm{Ran}_K F)$$

for each $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ and $G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$.

One may set $\mathrm{Ran}_K F(B) = \varprojlim_{(B \downarrow K)} FQ_B$. □

参考文献

[1] F. Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1*, volume 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Basic category theory.

[2] Brendan Fong and David I. Spivak. Seven sketches in compositionality.

[3] Peter T. Johnstone. *Sketches of an elephant: a topos theory compendium. Vol. 1*, volume 43 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2002.

[4] Tom Leinster. *Basic category theory*, volume 143 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[5] S Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[6] Emily Riehl. *Category Theory in Context*. Aurora: Modern Math Originals. Dover Publications, 2016.

[7] David I. Spivak. *Category theory for the sciences*. MIT Press, Cambridge, MA, 2014.

List of ToDos