

幾何学 IV
2019 年度

佃 修一

2020 年 6 月 5 日

2019 年度後期「幾何学 IV」の講義メモ.

Su [3] や de Longueville [1] の 1 章を元ネタに公平な分割について講義した. ホモロジーの導入もやりたかったがそこまでは全然到達しなかった.

講義内容を全部タイプしたわけではない. また, 途中何度か記号や添字を変更したので, 整合性が取れていない部分が多々あると思われる.

目次

第 1 章	Fair-Division	1
第 2 章	三角形に対する Sperner の補題と Fari-Division	5
第 3 章	単体複体	7
3.1	記号	7
3.2	凸包	8
3.3	幾何的単体	21
3.4	(有限) 幾何的単体複体	27
3.5	重心細分 (barycentric subdivision)	38
3.5.1	ToDo	44
第 4 章	Sperner, Envy-free Division, Brouwer	45
4.1	グラフについて少し	45
4.2	Sperner の補題	47
4.3	Envy-free	49
4.4	Rental Harmony?	55
4.5	Brouwer の不動点定理と Sperner の補題	55
付録 A	準備	61
A.1	同値関係	61
A.2	群の作用	63
A.3	部分空間	65
A.4	直積空間	65
A.5	商空間	66
A.6	ハウスドルフ空間	67
A.7	コンパクト空間	68

A.8	コンパクト Hausdorff 空間	70
A.9	コンパクト距離空間	71
A.10	\mathbb{R}^n	72
	参考文献	75

List of exercises

exercise1	9
exercise2	12
exercise3	37
exercise4	39
exercise5	51
exercise6	52
exercise7	56
exercise8	65
exercise9	66
exercise10	67
exercise11	67
exercise12	71

第 1 章

Fair-Division

Definition 1.0.1. • $I = [0, 1]$ を閉区間とする.

- μ_1, \dots, μ_n を, 分布関数が連続であるような確率測度とする.

1. I の部分集合 P_1, \dots, P_n で次の条件をみたすもの

(a) 各 $P_i \subset I$ は区間の和集合 (可測集合であればよい)

(b) $I = \bigcup_{i=1}^n P_i$

(c) $i \neq j$ なら $P_i \cap P_j$ は有限集合

と, 置換 $\pi \in S_n$ の組 $(P_1, \dots, P_n; \pi)$ を I の n 分配とよぶ.

2. I の n 分配 $(P_1, \dots, P_n; \pi)$ が

(a) fair (公平) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の i に対し, $\mu_i(P_{\pi(i)}) \geq 1/n$.

(b) envy-free (妬みなし) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の i, j に対し, $\mu_i(P_{\pi(i)}) \geq \mu_i(P_j)$.

Remark . I 上の確率測度 μ に対し, $F(t) = \mu([0, t])$ で与えられる関数を分布関数という.

ここでは区間の測度 (その区間がどれくらい好きか) が決まればよいので, 以下のような設定で考えればよい.

1. 連続関数 $F: I \rightarrow I$ で, 次の条件をみたすもの

- $F(0) = 0, F(1) = 1$

- F は単調増加

が与えられており, $\mu([a, b]) = F(b) - F(a)$ により, μ を定める.

$F(t)$ は区間 $[0, t]$ が全体 $[0, 1]$ に対してどれくらいの割合で好き/欲しいかを表している.

2. あるいは, 少し強い条件になるが, 可積分関数 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ で, $\int_0^1 f(t) dt = 1$ をみたすものが与えられており, $\mu([a, b]) = \int_a^b f(t) dt$ により, μ を定める (この場合, 分布関数は絶対連続となり, f はその密度関数) .

$f(t)$ は $t \in I$ の部分がどれくらい好き/欲しいかを表している.

一点の測度は 0 であることに注意.

公平な分配については次の事が知られている.

Theorem 1.0.2. $n - 1$ 回のカットによる (つまり各 P_i が区間となる) fair な n 分配が存在する.

Remark . カット数を気にしなければぴったり $1/n$ となるように出来ることが知られている. また, 全員の好みが変わっていれば $> 1/n$ となる n 分配が存在することも.

証明は moving-knife algorithm による. I を例えばパウンドケーキだと思って, 右端からナイフをゆっくり動かす. $1/n$ になったと思った人が手を挙げ, そこでカットしたピースをとる. これを繰り返す.

ちゃんと証明をつけると余計わかりにくくなる気もするが一応つけておこう.

見目が少し強い次の結果を示す (帰納法を使う際この形の方がよい). 定理はこれで $a = 0, b = 1$ としたもの.

Proposition 1.0.3. $0 \leq a < b \leq 1$ が任意の i に対し $\mu_i([a, b]) > 0$ をみたすとする.

このとき, $[a, b]$ の分割

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

と, 置換 $\pi \in S_n$ で, 任意の i に対し

$$\mu_i([t_{\pi(i)-1}, t_{\pi(i)}]) \geq \frac{\mu_i([a, b])}{n}$$

となるものが存在する.

Proof. n についての帰納法.

$n = 1$ のときはあきらめ.

$n \geq 2$ とし, $n - 1$ で成立するとして, n の場合を示す.

まず $a = 0, b = 1$ の場合を示す. F_i を μ_i の分布関数とし,

$$s_i = \max F_i^{-1}(1 - 1/n)$$

とおく. $F_i(0) = 0, F_i(1) = 1$, F_i は連続ゆえ中間値の定理より $F_i^{-1}(1 - 1/n) \neq \emptyset$. また F_i は連続だから $F_i^{-1}(1 - 1/n)$ は I の (よって \mathbb{R} の) 閉集合. したがって最大数が存在する.

$$\begin{aligned} \mu_i([0, s_i]) &= F_i(s_i) \\ &= 1 - 1/n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n-1}{n} \\
\mu_i([s_i, 1]) &= 1 - \mu_i([0, s_i]) \\
&= 1 - (1 - 1/n) \\
&= 1/n
\end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned}
t_{n-1} &= \max_i s_i \\
i_n &= \max \{i \mid s_i = t_{n-1}\}
\end{aligned}$$

とおく.

$s_{i_n} = t_{n-1}$ なので,

$$\mu_{i_n}([t_{n-1}, 1]) = \mu_{i_n}([s_{i_n}, 1]) = 1/n.$$

また, 任意の i に対し $s_i \leq t_{n-1}$ ゆえ $[0, s_i] \subset [0, t_{n-1}]$ だから

$$\mu_i[0, t_{n-1}] \geq \mu_i([0, s_i]) = \frac{n-1}{n}.$$

$[0, t_{n-1}]$ と $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_n\}$ に帰納法の仮定を使えば, 分割 $0 = t_0 < \dots < t_{n-1}$ と, $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_n\}$ の置換 π が存在して, $i \neq i_n$ に対し,

$$\begin{aligned}
\mu_i([t_{\pi(i)-1}, t_{\pi(i)}]) &\geq \frac{\mu_i([0, t_{n-1}])}{n-1} \\
&\geq \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

となる. $\pi(i_n) = n$ と定めればよい.

一般の a, b の場合.

関数 $l: I \rightarrow [a, b]$ を $l(t) = (1-t)a + tb$ で定める. $\nu_i([c, d]) = \mu_i([l(c), l(d)]) / \mu_i([a, b])$ とおく. 上で示したことから, ν_1, \dots, ν_n に対し, 分割 $0 = s_0 < \dots < s_n = 1$ と置換 π で, 任意の i に対し,

$$\nu_i([s_{\pi(i)-1}, s_{\pi(i)}]) \geq 1/n$$

となるものがある.

$t_i = l(s_i)$ とおけば, $a = t_0 < \dots < t_n = b$ で,

$$\begin{aligned}
\mu_i([t_{\pi(i)-1}, t_{\pi(i)}]) &= \mu_i([l(s_{\pi(i)-1}), l(s_{\pi(i)})]) \\
&= \mu_i([a, b]) \nu_i([s_{\pi(i)-1}, s_{\pi(i)}]) \\
&\geq 1/n
\end{aligned}$$

□

envy-free な分配についての次の結果を示すのが、この講義の前半（今の調子だと講義全体）の主題（結局全体の主題となった）。

Theorem 1.0.4 ([5, 2, 3]). n 回のカットによる（つまり各 P_i が区間となる）envy-free な $n + 1$ 分配が存在する。

第 2 章

三角形に対する Sperner の補題と Fari-Division

つづく...

第 3 章

単体複体

3.1 記号

この講義では以下の記号を使う。私が担当のときの幾何学序論の記号とは違う!!ので注意せよ。

また、記号の使い方が修正されていない部分が含まれている。

Notation 3.1.1. 1. $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq -1$ に対し,

$$[n] = \{m \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq m \leq n\} = \{0, 1, \dots, n\}$$

と定める。また必要があれば、普通の順序 $0 < 1 < \dots < n$ を入れる。

$\sharp[n] = n + 1$ であることに注意せよ。

$$\begin{aligned} [-1] &= \emptyset \\ [0] &= \{0\} \\ [1] &= \{0, 1\} \\ [2] &= \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

2. $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ に対し,

$$\mathbf{n} = \{m \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq m < n\} = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

と定める。また必要があれば、普通の順序 $0 < 1 < \dots < n-1$ を入れる。(幾何学序論ではこれを $[n]$ と書いていた。) $\sharp \mathbf{n} = n$ である。

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \emptyset \\ \mathbf{1} &= \{0\} \\ \mathbf{2} &= \{0, 1\} \\ \mathbf{3} &= \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

3. $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$ に対し,

$$\underline{n} = \{m \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq m \leq n\} = \{1, 2, \dots, n\}$$

と定める. また必要があれば, 普通の順序 $1 < 2 < \dots < n$ を入れる.

$\#\underline{n} = n$ である.

$$\underline{0} = \emptyset$$

$$\underline{1} = \{1\}$$

$$\underline{2} = \{1, 2\}$$

$$\underline{3} = \{1, 2, 3\}$$

3.2 凸包

\mathbb{R}^N である必要は全然ないし, アフィン空間を導入するのが自然なのだろうけれど, あまりたくさん準備をするのも何なので \mathbb{R}^N で話をする.

Definition 3.2.1. 1. $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^N$ の一次結合 $\sum_{i=0}^n a_i v_i$ は,

(a) $\sum_{i=0}^n a_i = 1$ であるときアフィン結合 (**affine combination**) であるという.

(b) $\sum_{i=0}^n a_i = 1$ かつ, 任意の i に対し $a_i \geq 0$ であるとき凸結合 (**convex combination**) であるという.

2. $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ がアフィン独立 (**affine independent**) あるいは一般の位置にある

\Leftrightarrow
def

$$\sum_{i=0}^n a_i v_i = 0 \text{ かつ } \sum_{i=0}^n a_i = 0 \Rightarrow a_0 = \dots = a_n = 0.$$

Example 3.2.2. $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ とする.

1. $x \neq y$ であるとき, x, y のアフィン結合全体

$$\{tx + (1-t)y \mid t \in \mathbb{R}\}$$

は x と y を通る直線である. また x, y の凸結合全体

$$\{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

は x と y を結ぶ線分である.

2. x, y, z がアフィン独立なのは, x, y, z が一直線上にないとき (かつそのときだけ) である.

exercise 1. 1. 上の 2 を確かめよ. 次の形の方が示しやすいかもしれない.

x, y, z が一般の位置にない $\Leftrightarrow x, y, z$ が一直線上にある

2. $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ が一般の位置にあるとき, x, y, z の凸結合全体

$$\{sx + ty + uz \mid s + t + u = 1, s, t, u \geq 0\}$$

はどんな図形?

3. $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ が一般の位置にあるとき, x, y, z のアフィン結合全体

$$\{sx + ty + uz \mid s + t + u = 1\}$$

はどんな図形?

Lemma 3.2.3. $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ とする. 次は同値.

1. $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$ はアフィン独立.
2. $\{v_i - v_0 \mid 0 < i \leq n\}$ は一次独立.
3. 任意の j に対し, $\{v_i - v_j \mid 0 \leq i \leq n, i \neq j\}$ は一次独立.

Proof. 1,2 が同値であることを示せばよい.

$n = 0$ のとき (を別にやる必要はないはず?だが多分別にした方が分かりやすいであろう).

定義より明らかに $\{v_0\}$ はアフィン独立. 一方, $\{v_i - v_0 \mid 0 < i \leq 0\} = \emptyset$ であり, \emptyset は一次独立である.

$n > 0$ とする.

1 \Rightarrow 2.

$$0 = \sum_{i \geq 1} a_i (v_i - v_0) = \left(- \sum_{i \geq 1} a_i \right) v_0 + \sum_{i \geq 1} a_i v_i$$

とすると, 仮定より $a_i = 0$.

2 \Rightarrow 1.

$$\sum_{i=0}^n a_i v_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n a_i = 0$$

とすると

$$a_0 = - \sum_{i=1}^n a_i$$

だから

$$\begin{aligned} 0 &= \left(-\sum_{i \geq 1} a_i \right) v_0 + \sum_{i \geq 1} a_i v_i \\ &= \sum_{i \geq 1} a_i (v_i - v_0). \end{aligned}$$

仮定より $a_i = 0$ ($i \geq 1$) となり, $a_0 = -\sum_{i \geq 1} a_i = 0$.

□

Definition 3.2.4. 1. \mathbb{R}^N の部分集合 F は, ある $u \in F$ が存在し,

$$F - u := \{x - u \mid x \in F\} \subset \mathbb{R}^N$$

が部分ベクトル空間となるとき, アフィン部分空間 (**affine subspace**) という.

$V := F - u$ とおくと,

$$F = V + u := \{v + u \mid v \in V(F)\}$$

と書ける. つまり F は部分ベクトル空間 V を u だけ平行移動したものである.

Lemma 3.2.5 で示すように, 部分ベクトル空間 V は $u \in F$ のとり方によらずに定まる. V を $V(F)$ と書き, $V(F)$ が d 次元ベクトル空間であるとき, F は d 次元アフィン部分空間であるという.

1 次元アフィン部分空間は \mathbb{R}^N 内の直線, 2 次元アフィン部分空間は \mathbb{R}^N 内の平面, ... といった具合である.

2. $\{v_0, v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^N$ に対し, v_0, \dots, v_n のアフィン結合で書ける元全体のなす集合をアフィン包 (**affine hull**) といい, $\text{Aff}(v_0, \dots, v_n)$ と書く:

$$\text{Aff}(v_0, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i v_i \mid \sum_{i=0}^n a_i = 1 \right\}$$

Remark . 任意の部分集合 $S \subset \mathbb{R}^N$ に対し, S を含む最小のアフィン部分空間として, S のアフィン包が定義され, 後で述べる凸包と同様な性質が成り立つ (証明もほぼ同様に出来る).

Lemma 3.2.5. $F \subset \mathbb{R}^N$ をアフィン部分空間とする. このとき, 任意の $x, y \in F$ に対し, $F - x = F - y$ である.

Proof. $u \in F$, $V = F - u$ が部分ベクトル空間であるとする. 任意の $x, y, z \in F$ に対し $x - u, y - u, z - u \in V$ ゆえ

$$(z - u) - (x - u) + (y - u) \in V$$

だから

$$(z - u) - (x - u) + (y - u) + u \in F$$

ゆえ

$$z - x = ((z - u) - (x - u) + (y - u) + u) - y \in F - y$$

したがって $F - x \subset F - y$. 対称性から $F - y \subset F - x$. □

Example 3.2.2 は点の数が増えても成り立つ.

Lemma 3.2.6. 1. $\text{Aff}(v_0, \dots, v_n)$ は高々 n 次元アフィン部分空間である.

また, これが n 次元であることと, $\{v_0, \dots, v_n\}$ がアフィン独立であることは同値.

2. $\{v_0, \dots, v_n\}$ がアフィン独立でないことと, $\{v_0, \dots, v_n\}$ が $n - 1$ 次元 (以下) のアフィン部分空間に含まれることは同値

Proof. 1. $\{v_i - v_0 \mid 0 < i \leq n\}$ の張る部分ベクトル空間を V とする.

$$\text{Aff}(v_0, \dots, v_n) = V + v_0$$

を示せばよいが,

$$v_0 + \sum_{i \geq 1} a_i (v_i - v_0) = \left(1 - \sum_{i \geq 1} a_i\right) v_0 + \sum_{i \geq 1} a_i v_i$$

より (Lemma 3.2.3 の証明と同様に) 容易に分かる.

2. $\text{Aff}(v_0, \dots, v_n)$ の次元は $\{v_i - v_0 \mid 0 < i \leq n\}$ の張るベクトル空間の次元であることより分かる. □

Example-Definition 3.2.7.

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \gamma(t) = (t, t^2, \dots, t^d)$$

により与えられる \mathbb{R}^d 内の曲線をモーメント曲線 (the moment curve) という.

$t_0, \dots, t_d \in \mathbb{R}$ が全て異なるとき, $d + 1$ 個の点 $\{\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_d)\}$ はアフィン独立である.

Proof.

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_0) = (t_i - t_0, t_i^2 - t_0^2, \dots, t_i^d - t_0^d)$$

である. 行列式をみると

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} t_1 - t_0 & t_1^2 - t_0^2 & \dots & t_1^d - t_0^d \\ t_2 - t_0 & t_2^2 - t_0^2 & \dots & t_2^d - t_0^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_d - t_0 & t_d^2 - t_0^2 & \dots & t_d^d - t_0^d \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^d \\ 0 & t_1 - t_0 & t_1^2 - t_0^2 & \dots & t_1^d - t_0^d \\ 0 & t_2 - t_0 & t_2^2 - t_0^2 & \dots & t_2^d - t_0^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t_d - t_0 & t_d^2 - t_0^2 & \dots & t_d^d - t_0^d \end{vmatrix} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \longleftarrow + \\ \longleftarrow + \\ \longleftarrow + \\ \longleftarrow + \end{array} \right] \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \dots & t_0^d \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^d \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_d & t_d^2 & \dots & t_d^d \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

これは Vandermonde 行列式だから

$$= \prod_{0 \leq i < j \leq d} (t_j - t_i) \neq 0$$

ゆえ $\{ \gamma(t_i) - \gamma(t_0) \mid 0 < i \leq d \}$ は一次独立.

□

exercise 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 \\ 1 & t_1 & t_1^2 \\ 1 & t_2 & t_2^2 \end{vmatrix} = (t_1 - t_0)(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)$$

であることを行列式の定義に戻って（左辺を展開し，因数分解することで）確かめよ.

Definition 3.2.8. 1. \mathbb{R}^N の部分集合 C が凸 (convex) である

⇔ 任意の $x, y \in C$ に対し, x と y を結ぶ線分が C に含まれる.

2. $X \subset \mathbb{R}^N$ に対し, X を含む最小の凸集合を X の凸包 (convex hull) といい, $\text{Conv}(X)$ と書く.

次の Lemma 3.2.9.1, 2 より, 凸包は存在し

$$\text{Conv}(X) = \bigcap_{\substack{C: \text{凸} \\ C \supset X}} C$$

である.

- Lemma 3.2.9.** 1. \mathbb{R}^N は凸である.
 2. $C_\lambda \subset \mathbb{R}^N$ が凸であれば, $\bigcap_\lambda C_\lambda$ もそうである.
 3. $C \subset \mathbb{R}^N$ が凸であれば, C の元の凸結合は C の元である.
 4.

$$\text{Conv}(X) = \{x \mid x \text{ は } X \text{ の元の凸結合}\}$$

Proof. 1, 2 はあきらか.

3. C の元 n 個の凸結合で書ける元全体のなす集合を C_n と書く. $C_n \subset C$ であることを帰納法で示そう.

明らかに $C_1 = C$ ゆえ, $C_1 \subset C$.

$C_n \subset C$ と仮定する. このとき $C_{n+1} \subset C$ であることを示す. $v_0, \dots, v_n \in C$, $\sum_{i=0}^n a_i = 1$, $a_i \geq 0$ であれば,

$$x := \sum_{i=0}^n a_i v_i \in C$$

となることを示せばよい.

$a_0 = 1$ のとき.

$$1 = a_0 + \sum_{i>0} a_i = 1 + \sum_{i>0} a_i$$

ゆえ

$$\sum_{i>0} a_i = 0$$

であり, $a_i \geq 0$ なので $a_1 = \dots = a_{n+1} = 0$. よって $x = v_0 \in C$.

$a_0 \neq 1$ のとき.

$$\sum_{i>0} a_i = 1 - a_0 > 0$$

ゆえ

$$\sum_{i>0} \frac{a_i}{1 - a_0} = 1, \quad \frac{a_i}{1 - a_0} \geq 0.$$

よって

$$\sum_{i>0} \frac{a_i}{1 - a_0} v_i \in C_n.$$

したがって, 帰納法の仮定より

$$\sum_{i>0} \frac{a_i}{1 - a_0} v_i \in C$$

である.

$$\begin{aligned} x &= a_0 v_0 + \sum_{i>0} a_i v_i \\ &= a_0 v_0 + (1 - a_0) \sum_{i>0} \frac{a_i}{1 - a_0} v_i \end{aligned}$$

で, C は凸だから $x \in C$.

4.

$$C_X = \{x \mid x \text{ は } X \text{ の元の凸結合}\}$$

とおく. $X \subset \text{Conv}(X)$ で, $\text{Conv}(X)$ は凸だから, 3 より $C_X \subset \text{Conv}(X)$.

一方, $X \subset C_X$ だから, $\text{Conv}(X) \subset C_X$ を示すには, C_X が凸であることを示せばよい. $x = \sum a_i u_i, y = \sum b_j w_j$ を X の元の凸結合とする. $\{u_i\} \cup \{w_j\}$ をあらためて $\{v_i\}$ と書き, 適当に番号を付け替えて (必要なら係数に 0 を付け加えて) やれば $x = \sum a_i v_i, y = \sum b_i v_i$ であるとしてよい. $0 \leq t \leq 1$ に対し,

$$\begin{aligned} tx + (1 - t)y &= t \sum a_i v_i + (1 - t) \sum b_i v_i \\ &= \sum (ta_i + (1 - t)b_i) v_i \end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned} \sum (ta_i + (1 - t)b_i) &= t \sum a_i + (1 - t) \sum b_i \\ &= t + (1 - t) = 1 \end{aligned}$$

であり, 明らかに $ta_i + (1 - t)b_i \geq 0$ だから $tx + (1 - t)y$ も X の元の凸結合である. \square

Proposition 3.2.10. $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ を線型写像とする.

1. $C \subset \mathbb{R}^N$ が凸ならば $f(C)$ もそう.
2. $X \subset \mathbb{R}^N$ とする. このとき $f(\text{Conv}(X)) = \text{Conv}(f(X))$.

Proof. 1. f は線型だから線分を線分にうつす. ($tf(x) + (1 - t)f(y) = f(tx + (1 - t)y)$.)

2. $X \subset \text{Conv}(X)$ ゆえ $f(X) \subset f(\text{Conv}(X))$. $\text{Conv}(X)$ は凸ゆえ $f(\text{Conv}(X))$ もそう. よって $\text{Conv}(f(X)) \subset f(\text{Conv}(X))$.

一方, Lemma 3.2.9.Item 4 より, $\text{Conv}(X)$ の元は X の元の凸結合である. f は線型なので X の元の凸結合を $f(X)$ の元の凸結合にうつす. よって $f(\text{Conv}(X)) \subset \text{Conv}(f(X))$.

\square

Example-Definition 3.2.11. \mathbb{R}^n の部分空間

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$$

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$$

をそれぞれ n 次元円盤, $n-1$ 次元球面という.

D^n は凸である. 実際, $x, y \in D^n$ とすると, $0 \leq t \leq 1$ に対し

$$\begin{aligned} |tx + (1-t)y| &\leq |tx| + |(1-t)y| \\ &= |t||x| + |1-t||y| \\ &\leq |t| + |1-t| \\ &= t + (1-t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

あきらかに S^{n-1} は凸ではない. (より強いことが成り立つ. $x, y \in S^{n-1}$ に対し, x と y を結ぶ線分上の x, y 以外の点は S^{n-1} の点ではない. 実際, $x \neq y$, $0 < t < 1$ のとき, $|tx + (1-t)y| < |tx| + |(1-t)y|$ となることが示せる.)

Lemma 3.2.12. $C \subset \mathbb{R}^n$ を凸有界閉集合で, 内点を持つ ($C^\circ \neq \emptyset$) ものとする. このとき, C は D^n と同相で, 境界 $C^f = C^a - C^\circ (= C - C^\circ)$ は S^{n-1} と同相である.

Remark. 内点を持つという条件はさほど本質的ではない. C の張るアフィン部分空間を考えればよい.

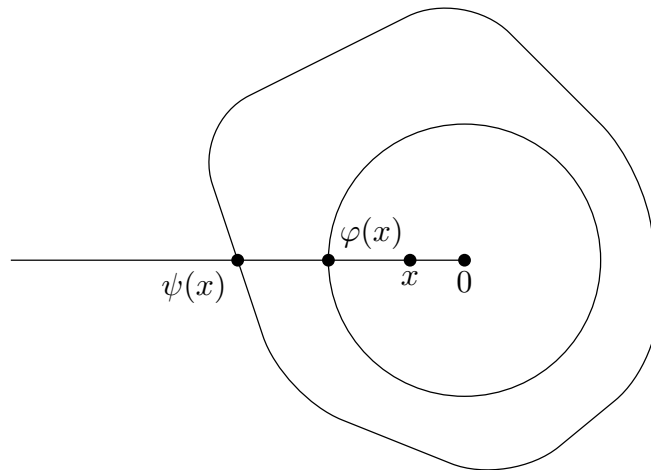


図 3.1

Proof. C の内点 $a \in C^\circ$ を一つとり,

$$U_\varepsilon(a) \subset C$$

となる $\varepsilon > 0$ を一つ固定する. 拡大縮小と平行移動 ($x \mapsto (x - a)/\varepsilon$) は \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^n への同相写像なので, $a = 0, \varepsilon = 1$ としてよい.

証明の方針は以下のとおり (図 3.1 参照).

$x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対し, x と原点 0 を結ぶ半直線が C の境界とただ一点で交わることを示し, その点を $\psi(x)$ とする. 写像

$$\begin{aligned} \psi: S^{n-1} &\rightarrow C^f, \\ \varphi: C^f &\rightarrow S^{n-1}, \end{aligned} \quad \varphi(x) = \frac{x}{|x|}$$

が同相写像であることを示し, さらに, 写像

$$\begin{aligned} \Psi: D^n &\rightarrow C, & \Psi(x) &= |\psi(x)|x \\ \Phi: C &\rightarrow D^n, & \Phi(x) &= \frac{x}{|\psi(x)|} \end{aligned}$$

が同相写像であることを示す.

さて, $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対し, 連続写像

$$r_x: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad r_x(t) = tx$$

の像を R_x とおく: $R_x := r_x(\mathbb{R}_{\geq 0})$.

$r_x(0) = 0 \in C$ ゆえ $r_x^{-1}(C) \neq \emptyset$. C が有界なので $r_x^{-1}(C)$ も有界. C が閉集合なので $r_x^{-1}(C)$ も閉集合. よって $r_x^{-1}(C) \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ は最大値を持つ.

$$\begin{aligned} t(x) &:= \max r_x^{-1}(C) \\ &= \sup \{t \geq 0 \mid tx \in C\} \\ \psi(x) &:= t(x)x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

とおく. 次が成り立つ.

1. $t(x) > 0$.
2. $|\psi(x)| = t(x)|x| \geq 1$.
3. $t > t(x)$ ならば $tx \notin C$.
4. $\psi(x) = t(x)x \in C^f$.
5. $t < t(x)$ ならば $tx \in C^\circ$.

実際, $0 \leq t < 1/|x|$ ならば $|tx| < 1$ だから $r_x(t) = tx \in U_1(0) \subset C$ ゆえ $t \in r_x^{-1}(C)$. すなわち, $[0, 1/|x|) \subset r_x^{-1}(C)$. よって $t(x) \geq 1/|x| > 0$ であり, $|\psi(x)| = |t(x)x| = t(x)|x| \geq 1$.

$t(x)$ の定義よりあきらかに 3 は成り立つ. また $\psi(x) \in C$ である.

$U_1(0) \subset C$, $\psi(x) \in C$ で, C は凸なので, $0 \leq t < t(x)$ ならば

$$U_{\frac{t(x)-t}{t(x)}}(tx) \subset C$$

ゆえ *2, $tx \in C^\circ$, すなわち 5 が成り立つ.

4 は 3, 5 より従う.

4 より, ψ は写像

$$\psi: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow C^f$$

を定める.

また, 3, 4, 5 より $R_x \cap C^f = \{\psi(x)\}$ である. よって

6. $x \in C^f$ ならば ($x \in R_x \cap C^f = \{\psi(x)\}$ ゆえ) $\psi(x) = x$.

7. $0 \neq y \in R_x$ ならば ($R_y = R_x$ ゆえ) $\psi(y) = \psi(x)$. 言い換えれば, $k > 0$ ならば $\psi(kx) = \psi(x)$.

写像

$$\varphi: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}, \quad x \mapsto \frac{x}{|x|}$$

を考える. φ はあきらかに連続である. $0 \notin C^f$ ゆえ $C^f \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ である. φ 及び ψ の制限

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi|_{C^f}: C^f &\rightarrow S^{n-1}, & x &\mapsto \frac{x}{|x|} \\ \psi = \psi|_{S^{n-1}}: S^{n-1} &\rightarrow C^f, & x &\mapsto \psi(x) \end{aligned}$$

を考える. $x \in C^f$ に対し

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi(x) &= \psi(\varphi(x)) \\ &= \psi(x) && (\varphi(x) \in R_x \text{ だから 7 より}) \\ &= x && (x \in C^f \text{ だから 6 より}). \end{aligned}$$

一方, $x \in S^{n-1}$ に対し, すぐわかるように

$$\varphi \circ \psi(x) = x.$$

すなわち, $\varphi|_{C^f}: C^f \rightarrow S^{n-1}$ は連続な全単射で, $\psi|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow C^f$ がその逆写像である. C^f は \mathbb{R}^n の有界閉集合だからコンパクト, S^{n-1} は Hausdorff なので, $\varphi|_{C^f}$ は同相写像. よって $\psi|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow C^f$ もそう, とくに連続である.

$x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ に対し, 先と同様に $\varphi(x) \in R_x$ なので, $\psi \circ \varphi(x) = \psi(x)$, すなわち $\psi = (\psi|_{S^{n-1}}) \circ \varphi$ である:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n - \{0\} & \xrightarrow{\psi} & C^f \\ & \searrow \varphi & \nearrow \psi|_{S^{n-1}} \\ & S^{n-1} & \end{array}$$

$\varphi, \psi|_{S^{n-1}}$ はどちらも連続なので, $\psi: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow C^f$ も連続である.

写像

$$\Psi: D^n \rightarrow C,$$

$$\Phi: C \rightarrow D^n$$

を

$$\Psi(x) = \begin{cases} |\psi(x)|x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \frac{x}{|\psi(x)|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

により定める.

2 より

$$|\psi(x)| = t(x)|x|,$$

3, 4, 5 より $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し

$$tx \in C \Leftrightarrow t \leq t(x)$$

とくに

$$x \in C \Leftrightarrow t(x) \geq 1$$

だから,

$$\begin{aligned} |x| \leq 1 &\Leftrightarrow |\psi(x)| \leq t(x) \Leftrightarrow |\psi(x)|x \in C \\ x \in C &\Leftrightarrow t(x) \geq 1 \Leftrightarrow |\psi(x)| \geq |x| \end{aligned}$$

ゆえ, $x \in D^n - \{0\}$ なら $|\psi(x)|x \in C$, $x \in C$ ならば $x/|\psi(x)| \in D^n$ である. よって Ψ, Φ は well-defined で, $x \neq 0$ で連続である. また, C^f が有界なので $\psi(x)$ は上に有界. よって $x \rightarrow 0$ のとき $|\psi(x)|x \rightarrow 0$. さらに 2 より $1 \leq |\psi(x)|$ であるから $1/|\psi(x)| \leq 1$. よって $x \rightarrow 0$ のとき $x/|\psi(x)| \rightarrow 0$. だから $x = 0$ でも連続.

あきらかに, $\Psi \circ \Phi(0) = 0, \Phi \circ \Psi(0) = 0$.

$x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(x) &= \Psi(\Phi(x)) \\ &= \Psi\left(\frac{x}{|\psi(x)|}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \psi \left(\frac{x}{|\psi(x)|} \right) \right| \frac{x}{|\psi(x)|} \\
&= |\psi(x)| \frac{x}{|\psi(x)|} \qquad (7 \text{ より}) \\
&= x. \\
\Phi \circ \Psi(x) &= \Phi(\Psi(x)) \\
&= \Phi(|\psi(x)|x) \\
&= \frac{|\psi(x)|x}{\| |\psi(x)|x \|} \\
&= x.
\end{aligned}$$

よって Ψ, Φ は同相写像.

また, $x \in S^{n-1}$, すなわち $|x| = 1$ ならば $|\psi(x)| = t(x)|x| = t(x)$ なので,

$$\Psi(x) = |\psi(x)|x = t(x)x = \psi(x),$$

すなわち $\Psi|_{S^{n-1}} = \psi|_{S^{n-1}}$.

$x \in C^f$ ならば, $\psi(x) = x$ なので,

$$\Phi(x) = \frac{x}{|\psi(x)|} = \frac{x}{|x|} = \varphi(x),$$

すなわち $\Phi|_{C^f} = \varphi|_{C^f}$.

よって, $\Psi|_{S^{n-1}}: S^{n-1} \rightarrow C^f, \Phi|_{C^f}: C^f \rightarrow S^{n-1}$ は同相写像.

□

*1

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^d \\ 1 & t_1 & t_1^2 & \cdots & t_1^d \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \cdots & t_2^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_d & t_d^2 & \cdots & t_d^d \end{vmatrix} \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \end{array} \right]^{-1} \\ \left[\begin{array}{c} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \end{array} \right]^{-1} \\ \left[\begin{array}{c} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \end{array} \right]^{-1} \\ \left[\begin{array}{c} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \end{array} \right]^{-1} \\ \left[\begin{array}{c} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \end{array} \right]^{-1} \\ \left[\begin{array}{c} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \end{array} \right]^{-1} \\ \left[\begin{array}{c} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \end{array} \right]^{-1} \\ \left[\begin{array}{c} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \end{array} \right]^{-1} \\ \left[\begin{array}{c} \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \\ \longleftarrow^{-1} \end{array} \right]^{-1} \end{array} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^2 & \cdots & t_0^d \\ 0 & t_1 - t_0 & t_1^2 - t_0^2 & \cdots & t_1^d - t_0^d \\ 0 & t_2 - t_0 & t_2^2 - t_0^2 & \cdots & t_2^d - t_0^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & t_d - t_0 & t_d^2 - t_0^2 & \cdots & t_d^d - t_0^d \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} -t_0 \quad + \\ \downarrow \quad \downarrow \\ -t_0 \quad + \\ \downarrow \quad \downarrow \\ -t_0 \quad + \\ \downarrow \quad \downarrow \\ -t_0 \quad + \end{array} \\
 & = \begin{vmatrix} t_1 - t_0 & t_1^2 - t_0^2 & t_1^3 - t_0^3 & \dots & t_1^d - t_0^d \\ t_2 - t_0 & t_2^2 - t_0^2 & t_2^3 - t_0^3 & \dots & t_2^d - t_0^d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_d - t_0 & t_d^2 - t_0^2 & t_d^3 - t_0^3 & \dots & t_d^d - t_0^d \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} t_1 - t_0 & t_1^2 - t_0 t_1 & t_1^3 - t_0 t_1^2 & \dots & t_1^d - t_0 t_1^{d-1} \\ t_2 - t_0 & t_2^2 - t_0 t_2 & t_2^3 - t_0 t_2^2 & \dots & t_2^d - t_0 t_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_d - t_0 & t_d^2 - t_0 t_d & t_d^3 - t_0 t_d^2 & \dots & t_d^d - t_0 t_d^{d-1} \end{vmatrix} \\
 & = \begin{vmatrix} t_1 - t_0 & (t_1 - t_0)t_1 & (t_1 - t_0)t_1^2 & \dots & (t_1 - t_0)t_1^{d-1} \\ t_2 - t_0 & (t_2 - t_0)t_2 & (t_2 - t_0)t_2^2 & \dots & (t_2 - t_0)t_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_d - t_0 & (t_d - t_0)t_d & (t_d - t_0)t_d^2 & \dots & (t_d - t_0)t_d^{d-1} \end{vmatrix} \\
 & = \prod_{1 \leq j \leq d} (t_j - t_0) \begin{vmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^{d-1} \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & t_d & t_d^2 & \dots & t_d^{d-1} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

後は帰納法.

あるいは, t_i に t_j を代入すると行列式は 0 になるので $\prod_{0 \leq i < j \leq d} (t_j - t_i)$ で割り切れ, 次数を比較するとこれの定数倍. $t_1 t_2^2 \dots t_d^d$ の係数を比較.

^{*2} 点 y を中止とする半径 r の球面上の点 z に対し, 点 $tx + (1-t)z$ は, 点 $tx + (1-t)y$ を中心とする半径 $|1-t|r$ の球面上の点である (図 3.2):

$$\begin{aligned}
 |(tx + (1-t)z) - (tx + (1-t)y)| &= |(1-t)(z - y)| \\
 &= |1-t||z - y| \\
 &= |1-t|r.
 \end{aligned}$$

もちろん対応 $z \mapsto tx + (1-t)z$ は $t \neq 1$ ならば全単射.

x を原点に平行移動して考えたほうが見やすいかもしれない. この場合, $k = 1 - t$ 倍するという \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^n への写像が, 点 y を中心とする半径 r の球面を, 点 ky を中心とする半径 $|k|r$ の球面に写すということをいっている.

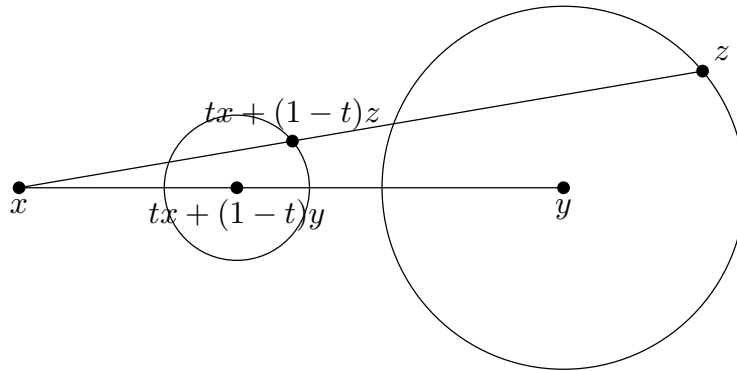


図 3.2

3.3 幾何的単体

Definition 3.3.1. 1. \mathbb{R}^N 内の d 次元幾何的単体 (geometric simplex) とは, \mathbb{R}^N 内の $d+1$ 個のアフィン独立な点の凸包である. またこれら $d+1$ 個の点を頂点といい, これらの頂点がこの幾何的単体を張るという. しばしば幾何的単体を省略して単体といい, d 次元単体を d 単体という.

$\{v_0, \dots, v_d\}$ がアフィン独立であるとき, これらの張る単体を $|v_0 \dots v_d|$ と書く.

単体 σ の次元を $\dim \sigma$ と書く. σ が d 単体ならば $\dim \sigma = d$ である.

2. 頂点の部分集合 (もアフィン独立) の凸包は次元が d 以下の単体であるが, これらはその幾何的単体の面 (face) とよばれる.

k 次元の面を k 面とよぶことがある.

空集合 (空集合の凸包) は面とは見なさないことが多いが, この講義では -1 次元面であると考え.

単体 τ が単体 σ の面であるとき $\tau \leq \sigma$ と書く.

3. \mathbb{R}^{d+1} の部分集合 $\{e_0, \dots, e_d\}$ の張る幾何的単体を標準的 d 単体 といい, Δ^d で表す. ただし, $e_0 = (1, 0, \dots, 0), e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)$.

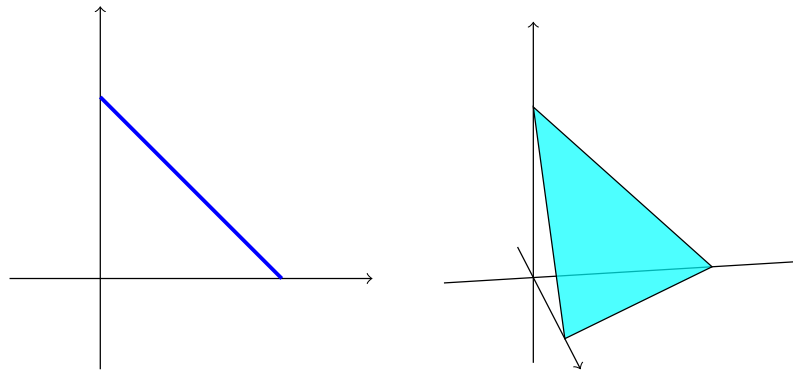
定義より

$$\Delta^d = \left\{ (x_0, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_{i=0}^d x_i = 1, \forall i: x_i \geq 0 \right\}$$

である (図 3.3 参照).

Definition 3.3.2. $\{v_0, \dots, v_d\} \subset \mathbb{R}^N$ がアフィン独立であるとする. 任意の $x \in |v_0 \dots v_d|$ は

$$x = \sum \lambda_i v_i, \quad \sum \lambda_i = 1$$

図 3.3 Δ^1 と Δ^2

と一意に表される（もちろん、このとき $\lambda_i \geq 0$ である）。実際、

$$\begin{aligned} x &= \sum \lambda_i v_i, & \sum \lambda_i &= 1 \\ &= \sum \mu_i v_i, & \sum \mu_i &= 1 \end{aligned}$$

であれば、

$$0 = \sum (\lambda_i - \mu_i) v_i \quad \sum (\lambda_i - \mu_i) = 0$$

で、 $\{v_0, \dots, v_d\}$ はアフィン独立であるから、任意の i に対し $\lambda_i - \mu_i = 0$.

$(\lambda_0, \dots, \lambda_d)$ を、点 $x \in |v_0 \dots v_d|$ の (v_0, \dots, v_d) に関する重心座標 (barycentric coordinate) という。 $(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \Delta^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ である。

点 $\sum \lambda_i v_i$ ($\sum \lambda_i = 1$) は、各点 v_i に重さ λ_i のものを置いた時の重心。これが重心座標という名前の由来。

Definition 3.3.3. $\sigma = |v_0 \dots v_d|$ を d 単体とする。 σ の $d-1$ 面全体の和集合を σ の境界 (boundary) といい、 $\dot{\sigma}$ と書く。

$$\dot{\sigma} = \bigcup_{i=0}^d |v_0 \dots \check{v}_i \dots v_d| = \bigcup_{\substack{\tau \leq \sigma \\ \tau \neq \sigma}} \tau$$

である。ただし \check{v}_i は v_i を除くということ。また、 $\sigma - \dot{\sigma}$ を σ の内部といい、 $\text{Int } \sigma$ と書く。

$\dot{\sigma}$ は、重心座標のある成分が 0 である点全体であり、 $\text{Int } \sigma$ は、重心座標の成分が全て正である点全体である。

$\sigma \subset \mathbb{R}^d$ (σ の次元と同じ次元のユークリッド空間に含まれる) のときは、 \mathbb{R}^d の部分集合としての境界、内部と一致する（ことが分かる）。

Proposition 3.3.4. $\sigma = |v_0 \dots v_d| \subset \mathbb{R}^N$ を d 単体とする. 写像

$$\begin{array}{ccc} \varphi_\sigma: \Delta^d & \longrightarrow & \sigma \\ \Psi & & \Psi \\ (\lambda_0, \dots, \lambda_d) & \longmapsto & \sum_{i=0}^d \lambda_i v_i \end{array}$$

は同相写像である. (この写像を σ の特性写像ということがある. 頂点の順序の選び方に依存していることに注意).

また, φ_σ の制限は同相

$$\varphi_\sigma: \dot{\Delta}^d \rightarrow \dot{\sigma}$$

を与える.

Proof. $(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \Delta^d$ ならば $\sum \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$ だから $\varphi(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \sigma$ ゆえ, φ_σ は well-defined.

φ_σ はあきらかに連続 (\mathbb{R}^{d+1} から \mathbb{R}^N への線型写像の制限) である.

また, 重心座標を対応させる写像

$$\begin{array}{ccc} \lambda_\sigma: \sigma & \longrightarrow & \Delta^d \\ \Psi & & \Psi \\ \sum_{i=0}^d \lambda_i v_i & \longmapsto & (\lambda_0, \dots, \lambda_d) \end{array}$$

を考えると, あきらかに $\varphi_\sigma \circ \lambda_\sigma = \text{id}, \lambda_\sigma \circ \varphi_\sigma = \text{id}$ が成り立つ. すなわち λ_σ は φ_σ の逆写像であり, φ_σ は全単射である.

Δ^d は \mathbb{R}^{d+1} の有界閉集合 (

$$\Delta^d \subset B^{d+1}$$

$$\Delta^d = s^{-1}(1) \cap \bigcap p_i^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 0})$$

ただし $s(\lambda_0, \dots, \lambda_d) = \sum \lambda_i, p_i(\lambda_0, \dots, \lambda_d) = \lambda_i$) ゆえコンパクト. σ は \mathbb{R}^N の部分空間だから Hausdorff.

よって φ_σ は同相写像 (で, λ_σ がその逆写像).

あきらかに $\varphi_\sigma(\dot{\Delta}^d) = \dot{\sigma}$ ゆえ, φ_σ の制限は同相 $\dot{\Delta}^d \rightarrow \dot{\sigma}$ を与える. \square

また, この証明より次が分かった.

Corollary 3.3.5. 重心座標を対応させる写像

$$\lambda_\sigma: \sigma \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$$

は連続^{*3}.

Corollary 3.3.6. d 単体たちは同じ重心座標の点を対応させて同相. すなわち $\sigma = |v_0 \dots v_d|$, $\tau = |u_0 \dots u_d|$ を d 単体とすると, 写像

$$\begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{\quad} & \tau \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \sum \lambda_i v_i & \longmapsto & \sum \lambda_i u_i \end{array}$$

は同相写像である. とくに, この対応により, 境界 $\partial\sigma$ と $\partial\tau$ も同相.

Proof. これは合成

$$\sigma \xrightarrow{\lambda_\sigma} \Delta^d \xrightarrow{\varphi_\tau} \tau.$$

□

Definition 3.3.7. $\{u_0, \dots, u_l\}$, $\{v_0, \dots, v_m\}$ はアフィン独立であるとし, $f: \{u_0, \dots, u_l\} \rightarrow \{v_0, \dots, v_m\}$ を写像とする.

写像 $|f|: |u_0 \dots u_l| \rightarrow |v_0 \dots v_m|$ を

$$|f| \left(\sum_{i=0}^l \lambda_i u_i \right) = \sum_{i=0}^l \lambda_i f(u_i)$$

で定め, f の線型拡張 (っていう?) あるいは f の幾何学的実現 (**geometric realization**) という.

$$\sum_{i=0}^l \lambda_i f(u_i) = \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i: f(u_i)=v_j} \lambda_i \right) v_j$$

であり

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \left(\sum_{i: f(u_i)=v_j} \lambda_i \right) &= \sum_{i=0}^l \lambda_i = 1, \\ \sum_{i: f(u_i)=v_j} \lambda_i &\geq 0 \end{aligned}$$

ゆえ

$$\sum_{i=0}^l \lambda_i f(u_i) \in |v_0 \dots v_m|$$

だから $|f|$ は well-defined.

Proposition 3.3.8. $\{u_0, \dots, u_l\}, \{v_0, \dots, v_m\}, \{w_0, \dots, w_n\}$ はアフィン独立であると
し, $f: \{u_0, \dots, u_l\} \rightarrow \{v_0, \dots, v_m\}, g: \{v_0, \dots, v_m\} \rightarrow \{w_0, \dots, w_n\}$ を写像とする. こ
のとき次が成り立つ.

1. $|\text{id}| = \text{id}: |u_0 \dots u_l| \rightarrow |u_0 \dots u_l|$.
2. $|g \circ f| = |g| \circ |f|: |u_0 \dots u_l| \rightarrow |w_0 \dots w_n|$.
3. $i: \{u_{i_1}, \dots, u_{i_k}\} \hookrightarrow \{u_0, \dots, u_l\}$ を部分集合の包含写像とすると, $|i|: |u_{i_1} \dots u_{i_k}| \rightarrow |u_0 \dots u_l|$ も包含写像.

Proof. あきらか. □

Proposition 3.3.4 (あるいは Corollary 3.3.5) と Proposition 3.3.8 から次が分かる.

Corollary 3.3.9. $\{u_0, \dots, u_l\}, \{v_0, \dots, v_m\}$ はアフィン独立, $f: \{u_0, \dots, u_l\} \rightarrow \{v_0, \dots, v_m\}$ を写像とする. f の拡張 $|f|: |u_0 \dots u_l| \rightarrow |v_0 \dots v_m|$ は, $\text{Im } f \subset \{v_0, \dots, v_m\}$ の張る面への全射連続写像である.

Proof. $|f|$ は, 重心座標 $\lambda: |u_0 \dots u_l| \rightarrow \Delta^l$ と線型写像

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{l+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^M \\ \cup & & \cup \\ (\lambda_0, \dots, \lambda_l) & \longmapsto & \sum \lambda_i f(u_i) \end{array}$$

($\{v_0, \dots, v_m\} \subset \mathbb{R}^M$) の合成だから連続.

切断 $s: \text{Im } f \rightarrow \{u_0, \dots, u_l\}$, すなわち $f \circ s = \text{id}$ となる写像を一つとると, $|f| \circ |s| = \text{id}: |\text{Im } f| \rightarrow |u_0 \dots u_l|$ ゆえ, $|\text{Im } f| = |u_0 \dots u_l|$.

□

Example 3.3.10. 標準的単体の他によく使われる単体として以下のものがある.

1. $(0, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^d$ の張る d 次元単体を Δ_c^d と書く.

$$\Delta_c^d = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d x_i \leq 1, \forall i: x_i \geq 0 \right\}$$

である (図 3.4 参照).

2. $(1, \dots, 1), (0, 1, \dots, 1), \dots, (0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$ の張る d 次元単体を Δ_*^d と書く.

$$\Delta_*^d = \left\{ (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \mid 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_d \leq 1 \right\}$$

である (図 3.5 参照) . 実際, $v_i = (\overbrace{0, \dots, 0}^i, 1, \dots, 1)$ とおくと,

$$\sum_{i=0}^d \lambda_i v_i = (\lambda_0, \lambda_0 + \lambda_1, \dots, \lambda_0 + \dots + \lambda_{d-1})$$

ゆえ, $\sum_{i=0}^d \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0$ ならば

$$0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_0 + \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_0 + \dots + \lambda_{d-1} \leq 1.$$

一方, $x_0 = 0, x_{d+1} = 1$ とおくと

$$(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=0}^d (x_{i+1} - x_i) v_i$$

ゆえ, $0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_d \leq 1$ ならば,

$$\sum_{i=0}^d (x_{i+1} - x_i) = x_{d+1} - x_0 = 1, x_{i+1} - x_i \geq 0$$

だから $(x_1, \dots, x_d) \in \Delta_*^d$.

いずれも \mathbb{R}^{d+1} ではなく \mathbb{R}^d の部分集合であることに注意.

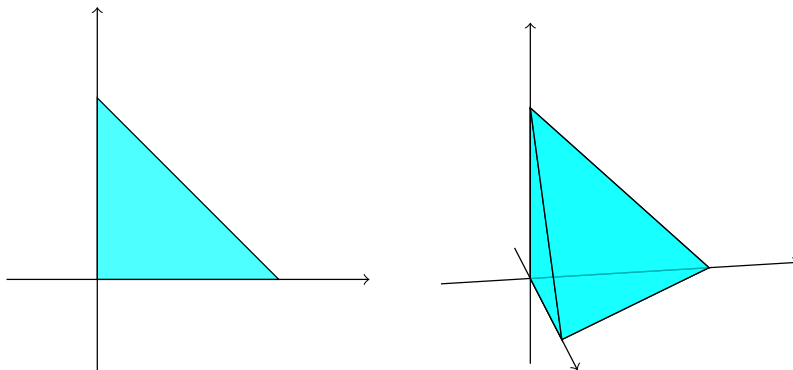


図 3.4 Δ_c^2 と Δ_c^3

Proposition 3.3.11. $d \geq 1$ とする ($d = 0$ でもよいけど...) . d 次元単体は d 次元円盤 D^d と同相. d 次元単体の境界は $d - 1$ 次元球面 S^{d-1} と同相.

Proof. Corollary 3.3.6 より, 特定の d 単体に対して示せばよい.

$\Delta_c^d \subset \mathbb{R}^d$ は凸有界閉集合で, あきらかに内点を持つ. また (単体としての) 境界と \mathbb{R}^d の部分集合としての境界が同じであること, $\dot{\Delta}_c^d = (\Delta_c^d)^f$, が容易に分かる. よって Lemma 3.2.12 より, Δ_c^d は D^d と, $\dot{\Delta}_c^d$ は S^{d-1} と同相. \square

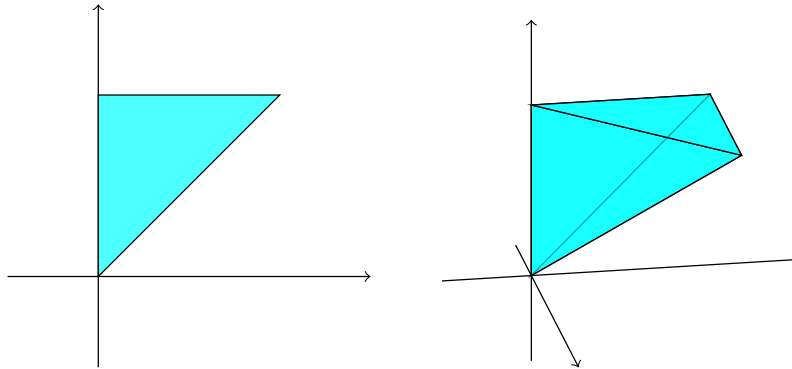


図 3.5 Δ_*^2 と Δ_*^3

*3 重心座標はアフィン包 $\text{Aff}(v_0, \dots, v_d)$ でも全く同様に定義され,

$$H := \left\{ (x_0, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \sum_{i=0}^d x_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

とおくと, 写像

$$\begin{array}{ccc} \lambda: \text{Aff}(v_0, \dots, v_d) & \longrightarrow & H \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \sum \lambda_i v_i & \longmapsto & (\lambda_0, \dots, \lambda_d) \end{array}$$

を与え, 連続である (平行移動と線型写像の合成... アフィン写像).

3.4 (有限) 幾何的単体複体

Definition 3.4.1. \mathbb{R}^N 内の (有限) 幾何的単体複体 (geometric simplicial complex) K とは, \mathbb{R}^N 内の単体の有限個 (ただし 1 個以上) の集合で次の条件をみたすものである.

1. K の単体の面は全て K に属す:
 $\sigma \in K$ かつ $\tau \leq \sigma$ ならば $\tau \in K$
2. K の二つの単体の共通部分は, それぞれの単体の面である:
 $\sigma, \tau \in K$ ならば $\sigma \cap \tau \leq \sigma, \sigma \cap \tau \leq \tau$.

混乱の恐れのないときは, 幾何的単体複体を (「幾何的」を略して) 単体複体という.

Remark . 単体を無限個持つものも同様に定義される. が, 後で出てくる多面体の位相の入れ方に少し準備が必要なので, この講義では扱わない.

Remark . 先に注意したように, この講義では, 単体 σ に対し, $\emptyset \subset \sigma$ も面であると考え.

多くの文献では \emptyset は面とは考えないので, Definition 3.4.1 の条件 2 は「 $\sigma, \tau \in K$ かつ $\sigma \cap \tau \neq \emptyset$ ならば, $\sigma \cap \tau \leq \sigma, \sigma \cap \tau \leq \tau$ 」としている.

Definition 3.4.2. K を単体複体とする.

1. K の単体の最大の次元を K の次元といい, $\dim K$ で表す:

$$\dim K = \max \{ \dim \sigma \mid \sigma \in K \}$$

2. K の 0 単体全体を K^0 または $V(K)$ と書き, K の頂点集合という.

Example 3.4.3. $\sigma = |v_0 \dots v_d|$ を d 単体とする.

1. σ の面全体のなす集合

$$K(\sigma) := \{ \tau \mid \tau \leq \sigma \}$$

は単体複体である. 条件 1 はあきらかに成り立つ. 条件 2 を確かめよう.

$\tau_1, \tau_2 \in K(\sigma)$ とする. ある $T_1, T_2 \subset \{v_0, \dots, v_d\}$ が存在し, $\tau_i = \text{Conv}(T_i)$ となる. このとき

$$\text{Conv}(T_1) \cap \text{Conv}(T_2) = \text{Conv}(T_1 \cap T_2)$$

である. 実際, あきらかに

$$\text{Conv}(T_1) \cap \text{Conv}(T_2) \supset \text{Conv}(T_1 \cap T_2).$$

一方, $x \in \text{Conv}(T_1) \cap \text{Conv}(T_2)$ とすると,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{u \in T_1} \lambda_u u = \sum_{v \in T_2} \mu_v v \\ \sum_{u \in T_1} \lambda_u &= \sum_{v \in T_2} \mu_v = 1, \quad \lambda_u \geq 0, \quad \mu_v \geq 0 \end{aligned}$$

と書ける.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{u \in T_1} \lambda_u u - \sum_{v \in T_2} \mu_v v \\ &= \sum_{u \in T_1 \setminus T_2} \lambda_u u - \sum_{v \in T_2 \setminus T_1} \mu_v v + \sum_{w \in T_1 \cap T_2} (\lambda_w - \mu_w) w \\ 0 &= \sum_{u \in T_1} \lambda_u - \sum_{v \in T_2} \mu_v \\ &= \sum_{u \in T_1 \setminus T_2} \lambda_u - \sum_{v \in T_2 \setminus T_1} \mu_v + \sum_{w \in T_1 \cap T_2} (\lambda_w - \mu_w) \end{aligned}$$

で, $T_1 \cup T_2 \subset \{v_0, \dots, v_d\}$ はアフィン独立だから, 係数は全て 0, とくに $u \in T_1 \setminus T_2$ に対し $\lambda_u = 0$. よって,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{u \in T_1} \lambda_u u = \sum_{u \in T_1 \cap T_2} \lambda_u u \\ 1 &= \sum_{u \in T_1} \lambda_u = \sum_{u \in T_1 \cap T_2} \lambda_u \end{aligned}$$

となり $x \in \text{Conv}(T_1 \cap T_2)$. したがって

$$\tau_1 \cap \tau_2 = \text{Conv}(T_1 \cap T_2) \leq \text{Conv}(T_i) = \tau_i.$$

$\dim K(\sigma) = \dim \sigma = d$ である.

2. σ の proper 面全体のなす集合

$$K(\dot{\sigma}) = \{\tau \mid \tau \leq \sigma, \tau \neq \sigma\}$$

は $d - 1$ 次元単体複体である.

Definition 3.4.4. \mathbb{R}^N 内の単体複体 K に対し, \mathbb{R}^N の部分空間

$$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$$

を K の多面体 (polytope) という.

Example 3.4.5. σ を単体とする.

$$\begin{aligned} |K(\sigma)| &= \bigcup_{\tau \in K(\sigma)} \tau = \bigcup_{\tau \leq \sigma} \tau = \sigma \\ |K(\dot{\sigma})| &= \bigcup_{\tau \in K(\dot{\sigma})} \tau = \bigcup_{\tau < \sigma} \tau = \dot{\sigma} \end{aligned}$$

Remark . 単体複体は単体の集まりであって, 位相空間ではない. 例えば

$$K(|v_0 v_1 v_2|) = \{\emptyset, v_0, v_1, v_2, |v_0 v_1|, |v_1 v_2|, |v_0 v_2|, |v_0 v_1 v_2|\}$$

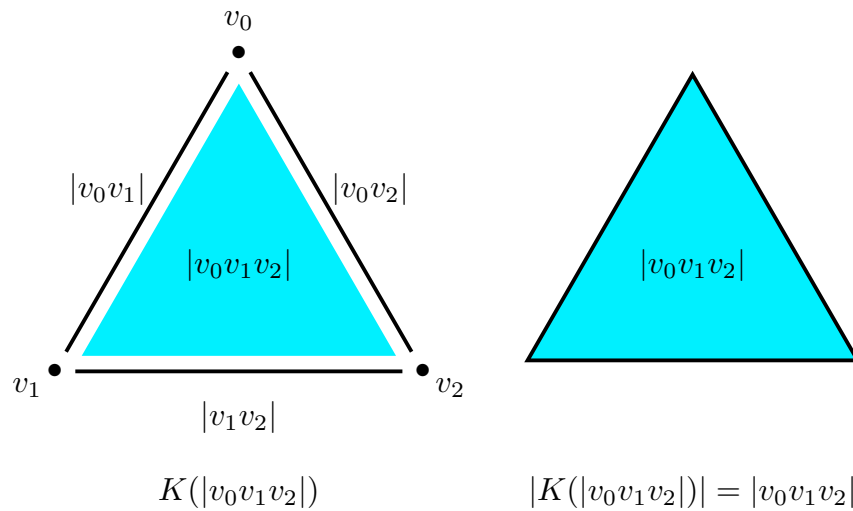
である.

Definition 3.4.6. K を単体複体とする. K の部分集合 L は,

$$\sigma \in L \text{ かつ } \tau \leq \sigma \text{ ならば, } \tau \in L$$

という条件をみたすとき, 部分複体という.

幾何的単体複体の定義の条件 2 は, K の任意の部分集合に対し成立する. したがって K の部分集合 L について, L がそれ自身単体複体になっていることと, L が K の部分複体であることは同値である.

図 3.6 K と $|K|$

Proposition 3.4.7. L, K を幾何的単体複体とする.

1. $L \cap K$ も単体複体である.
2. $|L| \cap |K| = |L \cap K|$ ならば, $L \cup K$ も単体複体である.

Remark. 1. $\emptyset \in L$ と考えているので, $\emptyset \in L \cap K$ となり $L \cap K \neq \emptyset$ である.

2. あきらかに $|L| \cap |K| \supset |L \cap K|$ は常に成り立つ. 等号は一般には成立しない.

なお, 定義より ($|L \cup K|$ は $L \cup K$ が単体複体でなくても意味を持ち) $|L \cup K| = |L| \cup |K|$ が常に成り立つ.

3. 和集合の方に条件がついているのはちょっと感じが悪い. 抽象単体複体であればこの条件は不要.

Proof. 1. あきらか.

2. 条件 1 はあきらかに成り立つ. 条件 2 を確かめよう.

$\sigma, \tau \in L \cup K$ とする. このとき $\sigma \cap \tau \leq \sigma$ を示せばよい.

$\sigma, \tau \in L$ または $\sigma, \tau \in K$ のときはよい.

$\sigma \in L, \tau \in K$ の場合を考える. このとき

$$\begin{aligned} \sigma \cap \tau &\subset |L| \cap |K| \\ &= |L \cap K| \\ &= \bigcup_{\rho \in L \cap K} \rho \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\sigma \cap \tau &= \sigma \cap \tau \cap \left(\bigcup_{\rho \in L \cap K} \rho \right) \\ &= \bigcup_{\rho \in L \cap K} (\sigma \cap \tau \cap \rho)\end{aligned}$$

$\rho \in L \cap K$ に対し $\sigma \cap \tau \cap \rho \leq \sigma$ であることをみよう. $\rho \in L, \rho \in K$ である.

$\tau \in K, \rho \in K$ で, K は単体複体だから $\tau \cap \rho \leq \rho$.

$\tau \cap \rho \leq \rho \in L$ で, L は単体複体だから, $\tau \cap \rho \in L$.

$\sigma, \tau \cap \rho \in L$ で, L は単体複体だから $\sigma \cap \tau \cap \rho = \sigma \cap (\tau \cap \rho) \leq \sigma$.

よって $\sigma \cap \tau$ は σ の面の和集合であり, 凸集合の共通部分ゆえ凸だから, 次の Lemma 3.4.8 より, σ の面

□

Lemma 3.4.8. 幾何的単体 σ の面の和集合 c が凸ならば, c は σ の面: $c \leq \sigma$.

Proof. $\tau_i \leq \sigma$ とし, $c = \bigcup_i \tau_i$ が凸であるとする. このとき

$$c = \text{Conv} \left(\bigcup_i V(\tau_i) \right)$$

であることを示そう.

$$c \supset \bigcup_i V(\tau_i)$$

で, c は凸なので

$$c \supset \text{Conv} \left(\bigcup_i V(\tau_i) \right)$$

一方

$$\begin{aligned}\tau_i &= \text{Conv}(V(\tau_i)) \\ &\subset \text{Conv} \left(\bigcup_i V(\tau_i) \right)\end{aligned}$$

ゆえ

$$c = \bigcup_i \tau_i \subset \text{Conv} \left(\bigcup_i V(\tau_i) \right).$$

$\bigcup_i V(\tau_i) \subset V(\sigma)$ ゆえ, その凸包は σ の面.

□

Corollary 3.4.9. K_1, \dots, K_n が幾何的単体複体で, 任意の i, j に対し $|K_i| \cap |K_j| = |K_i \cap K_j|$ であれば, $\bigcup_{i=1}^n K_i$ も単体複体である.

Proof. n についての帰納法.

$\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i$ が単体複体だとする. 仮定より $|K_i| \cap |K_n| = |K_i \cap K_n|$ なので

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} K_i \right| \cap |K_n| &= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} |K_i| \right) \cap |K_n| \\ &= \bigcup_{i=1}^{n-1} (|K_i| \cap |K_n|) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n-1} |K_i \cap K_n| \\ &= \left| \bigcup_{i=1}^{n-1} (K_i \cap K_n) \right| \\ &= \left| \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i \right) \cap K_n \right|. \end{aligned}$$

よって $\bigcup_{i=1}^{n-1} K_i \cup K_n$ も単体複体. □

Definition 3.4.10. $x \in \mathbb{R}^N$, $A \subset \mathbb{R}^N$ とする. 任意の $a \in A$ に対し $\overline{xa} \cap A = \{a\}$ が成り立つとき, x と A は一般の位置にあるという. ただし

$$\overline{xa} = \{tx + (1-t)a \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

は x と a を結ぶ線分.

このとき, x と A の点を結ぶ線分全体の和集合を $x * A$ と書き, x と A の結 (**join**) あるいは x を頂点とする A 上の錐 (**cone**) という.

$$x * A = \bigcup_{a \in A} \overline{xa} = \{tx + (1-t)a \mid 0 \leq t \leq 1, a \in A\}$$

Lemma 3.4.11. $\{v_0, \dots, v_n\}$ がアフィン独立であるとする. $x \in \text{Aff}(v_0, \dots, v_n)$ ならば x と $|v_0 \dots v_n|$ は一般の位置にない.

Proof. $x \notin |v_0 \dots v_n|$ としてよい.

$$x = \sum_i \mu_i v_i, \quad \sum_i \mu_i = 1$$

とする.

$$b := \frac{1}{n+1} \sum_i v_i \in |v_0 \dots v_n|$$

を考える. $x \neq b$ である. x と b を結ぶ線分上の点は

$$\begin{aligned} tx + (1-t)b &= \sum_i t\mu_i v_i + \frac{1-t}{n+1} \sum_i v_i \\ &= \sum_i \left(t\mu_i + \frac{1-t}{n+1} \right) v_i \end{aligned}$$

で, 係数の和は

$$\begin{aligned} \sum_i \left(t\mu_i + \frac{1-t}{n+1} \right) &= t \sum_i \mu_i + (n+1) \frac{1-t}{n+1} \\ &= t + (1-t) = 1 \end{aligned}$$

である. 各 v_i の係数は t について連続, 0 以上で, $t = 0$ のとき正. よって, 十分小さい $t > 0$ に対し正. すなわち十分小さい $t > 0$ に対し $tx + (1-t)b$ は $\{v_0, \dots, v_n\}$ の凸結合ゆえ $|v_0 \dots v_n|$ の点. よって $\overline{xb} \cap |v_0 \dots v_n| \supseteq \{b\}$, すなわち x と $|v_0 \dots v_n|$ は一般の位置にない. \square

Lemma 3.4.12. A を凸とし, x と A が一般の位置にあるとする.

1. $\{v_0, \dots, v_n\} \subset A$ がアフィン独立ならば, $\{x, v_0, \dots, v_n\}$ もアフィン独立である.
2. $x * A = \text{Conv}(\{x\} \cup A)$.

Proof. 1.

$$ax + \sum_i \lambda_i v_i = 0, \quad a + \sum_i \lambda_i = 0$$

とする. A は凸なので $|v_0 \dots v_n| \subset A$ であり, x と A が一般の位置にあるので, x と $|v_0 \dots v_n|$ も一般の位置にある. とくに $x \notin \text{Aff}(v_0, \dots, v_n)$ なので $a = 0$ である ($a \neq 0$ とすると a で割れば,

$$x = \sum_i \frac{-\lambda_i}{a} v_i, \quad \sum_i \frac{-\lambda_i}{a} = 1$$

つまり x は $\{v_0, \dots, v_n\}$ のアフィン結合となる).

このとき, $\{v_0, \dots, v_n\}$ がアフィン独立という仮定より, $\lambda_i = 0$ となる.

2. $\overline{xa} \subset \text{Conv}(\{x\} \cup A)$ ゆえ $x * A \subset \text{Conv}(\{x\} \cup A)$.

$\{x\} \cup A \subset x * A$ ゆえ, $x * A$ が凸であることを示せばよい.

$y, z \in x * A$ とする. y と z を結ぶ線分が $x * A$ に含まれることを示そう.

$a, b \in A$, $0 \leq s, t \leq 1$ が存在し $y = sx + (1-s)a$, $z = tx + (1-t)b$ となる. A は凸ゆえ $0 < s, t < 1$ の場合を考えればよい (ことがすぐ分かる).

$0 \leq r \leq 1$ に対し

$$\begin{aligned}
 & ry + (1-r)z \\
 &= r(sx + (1-s)a) + (1-r)(tx + (1-t)b) \\
 &= (rs + (1-r)t)x + r(1-s)a + (1-r)(1-t)b \\
 &= (rs + (1-r)t)x \\
 &\quad + (r(1-s) + (1-r)(1-t)) \left(\frac{r(1-s)a + (1-r)(1-t)b}{r(1-s) + (1-r)(1-t)} \right)
 \end{aligned}$$

である. $rs + (1-r)t$ は s と t を結ぶ線分上の点, $r(1-s) + (1-r)(1-t)$ は $1-s$ と $1-t$ を結ぶ線分上の点で, $0 < s, t < 1$ だから, $0 < 1-s, 1-t < 1$ なので

$$0 < rs + (1-r)t < 1, \quad 0 < r(1-s) + (1-r)(1-t) < 1$$

である. また $r(1-s) \geq 0, (1-r)(1-t) \geq 0$ で, A は凸だから

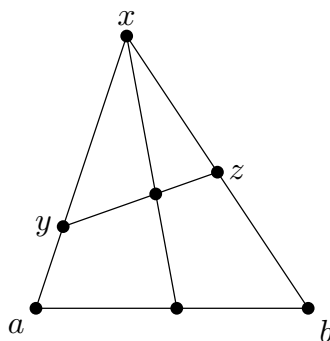
$$\frac{r(1-s)a + (1-r)(1-t)b}{r(1-s) + (1-r)(1-t)} \in A$$

である.

$$\begin{aligned}
 & (rs + (1-r)t) + (r(1-s) + (1-r)(1-t)) \\
 &= rs + r(1-s) + (1-r)t + (1-r)(1-t) \\
 &= r + (1-r) = 1
 \end{aligned}$$

なので, $ry + (1-r)z$ は A の点と x を結ぶ線分上の点, すなわち $x * A$ の点.

□



todo $x * K$

Definition 3.4.13. K, L を幾何的単体複体とする. 次の二つの条件をみたすとき, L は K の細分 (subdivision) であるという.

1. 任意の $\tau \in L$ に対し, ある $\sigma \in K$ が存在し $\tau \subset \sigma$ となる.

2. $|L| = |K|$

Remark . [1, Appendix] の細分の定義はよろしくない.

Lemma 3.4.14. L が K の細分であるとする. このとき, 任意の $\emptyset \neq \tau \in L$ に対し, $\sigma \in K$ で, $\text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma$ となるものが, ただ一つ存在する. また, この σ に対し $\tau \subset \sigma$ である.

Proof. $\tau \neq \emptyset$ ならば $\text{Int } \tau \neq \emptyset$ である. また, $\sigma, \sigma' \in K, \sigma \neq \sigma'$ に対し $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \sigma' = \emptyset$ なので, 一意性はあきらか.

$\tau = |v_0 \dots v_m| \in L$ とする.

L が K の細分なので, $\tau \subset \sigma$ となる $\sigma \in K$ が存在する. $\sigma_\tau = \bigcap_{\tau \subset \sigma \in K} \sigma$ とおくと, K が (有限) 単体複体であることより, $\sigma_\tau \in K$ であることが分かる. $\sigma_\tau = |u_0 \dots u_l|$ とする.

$|v_0 \dots v_m| = \tau \subset \sigma_\tau$ ゆえ $v_i \in \sigma_\tau$ だから

$$v_i = \sum_j \lambda_{ij} u_j, \quad \lambda_{ij} \geq 0$$

と書ける. このとき, 任意の j に対し, ある i が存在し $\lambda_{ij} > 0$ である. 実際, ある j が存在し, 任意の i に対し $\lambda_{ij} = 0$ であるとする. 任意の i に対し, $v_i \in |u_0 \dots \hat{u}_j \dots u_l|$ となるので, $\tau \subset |u_0 \dots \hat{u}_j \dots u_l| \subset \sigma_\tau$ となり, σ_τ の最小性に反する.

$x \in \text{Int } \tau$ とすると,

$$\begin{aligned} x &= \sum_i \mu_i v_i, & \forall i : \mu_i > 0 \\ &= \sum_{i,j} \mu_i \lambda_{ij} u_j \\ &= \sum_j \left(\sum_i \mu_i \lambda_{ij} \right) u_j \end{aligned}$$

任意の j に対し, $\lambda_{ij} > 0$ なる i があり, $\mu_i > 0$ だから, $\sum_i \mu_i \lambda_{ij} > 0$. すなわち $x \in \text{Int } \sigma_\tau$. よって $\text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma_\tau$. また, σ_τ の定め方より $\tau \subset \sigma_\tau$. \square

Remark . $\overline{\text{Int } \tau} = \tau$ なので, $\text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma$ ならば, $\tau = \overline{\text{Int } \tau} \subset \sigma$.

Corollary 3.4.15. L が K の細分であるとする. $\emptyset \neq \tau \in L, \sigma \in K$ に対し, $\text{Int } \tau \cap \text{Int } \sigma \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma$.

Proof. \Leftarrow はあきらか.

上で示したように $\text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma_\tau$ となる σ_τ がただ一つ存在する. $\sigma \neq \sigma_\tau$ ならば $\text{Int } \sigma_\tau \cap \text{Int } \sigma = \emptyset$ である. $\text{Int } \tau \cap \text{Int } \sigma \subset \text{Int } \sigma_\tau \cap \text{Int } \sigma$ ゆえ, $\sigma \neq \sigma_\tau$ ならば $\text{Int } \tau \cap \text{Int } \sigma = \emptyset$. つまり, $\text{Int } \tau \cap \text{Int } \sigma \neq \emptyset$ ならば $\sigma = \sigma_\tau$ ゆえ $\text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma$. \square

Corollary 3.4.16. L を K の細分, $K' \subset K$ を部分複体とする. このとき

$$\begin{aligned} L' &:= \{\tau \in L \mid \exists \sigma \in K' : \tau \subset \sigma\} \\ &= \{\tau \in L \mid \exists \sigma \in K' : \tau \subset |\sigma|\} \end{aligned}$$

は K' の細分である.

Proof. あきらかに L' は L の部分複体である. とくに単体複体である.

また, 細分の条件 1 は L' の定め方より成り立つ. 任意の $\sigma \in K$ に対し

$$\text{Int } \sigma \subset |K| = |L| = \coprod_{\tau \in L} \text{Int } \tau$$

であり, $\text{Int } \tau \cap \text{Int } \sigma \neq \emptyset \Leftrightarrow \text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma$ だから

$$\begin{aligned} \text{Int } \sigma &= \text{Int } \sigma \cap \left(\coprod_{\tau \in L} \text{Int } \tau \right) \\ &= \coprod_{\tau \in L} (\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \tau) \\ &= \coprod_{\substack{\tau \in L \\ \text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma}} \text{Int } \tau \end{aligned}$$

が成り立つ. $\text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma$ ならば $\tau \subset \sigma$ ゆえ

$$\begin{aligned} |K'| &= \coprod_{\sigma \in K'} \text{Int } \sigma \\ &= \coprod_{\sigma \in K'} \left(\coprod_{\substack{\tau \in L \\ \text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma}} \text{Int } \tau \right) \\ &\subset \coprod_{\sigma \in K'} \left(\coprod_{\substack{\tau \in L \\ \tau \subset \sigma}} \text{Int } \tau \right) \\ &\subset \bigcup_{\tau \in L'} \tau \\ &= |L'| \end{aligned}$$

よって $|K'| \subset |L'|$. L' の定め方よりあきらかに $|L'| \subset |K'|$. したがって $|K'| = |L'|$.

ToDo. L' が下の形で書けること \square

Corollary 3.4.17. L が K の細分ならば $V(K) \subset V(L)$ である.

Proof. $V(K) = K^0$ に上の補題を適応すれば分かる. あるいは

$v \in V(K)$ に対し,

$$v \in |K| = |L| = \coprod_{\tau \in L} \text{Int } \tau$$

ゆえ, ある $\tau \in L$ が存在し, $v \in \text{Int } \tau$ となる. この τ に対し, ある $\sigma \in K$ が存在し $\text{Int } \tau \subset \text{Int } \sigma$ となる. よって $v \in \text{Int } \sigma$. とくに $v \in \sigma$. $|v| = |v| \cap \sigma$ は σ の 0 面, すなわち σ の頂点. 頂点が内部に含まれるのは $\dim \sigma = 0$ のときのみ. よって $\sigma = |v|$. $\tau \subset \sigma$ なので, $v \in \tau \subset |v| = \{v\}$ ゆえ $|v| = \tau \in L$. \square

Example 3.4.18. $\sigma = |v_0 v_1 v_2|$ を 2 単体, $K = K(\sigma)$ とする.

$0 \leq i < j \leq 2$ に対し, v_i と v_j の中点を u_{ij} とおく:

$$u_{01} = \frac{v_0 + v_1}{2}, \quad u_{02} = \frac{v_0 + v_2}{2}, \quad u_{12} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

単体の集合

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \begin{array}{l} v_0, v_1, v_2, u_{01}, u_{02}, u_{12}, \\ |v_0 u_{01}|, |v_0 u_{02}|, |v_1 u_{01}|, |v_1 u_{12}|, |v_2 u_{02}|, |v_2 u_{12}|, \\ |u_{01} u_{02}|, |u_{01} u_{12}|, |u_{02} u_{12}|, \\ |v_0 u_{01} u_{02}|, |v_1 u_{01} u_{12}|, |v_2 u_{02} u_{12}|, |u_{01} u_{02} u_{12}| \end{array} \right\} \\ &= K(|v_0 u_{01} u_{02}|) \cup K(|v_1 u_{01} u_{12}|) \cup K(|v_2 u_{02} u_{12}|) \cup K(|u_{01} u_{02} u_{12}|) \end{aligned}$$

が単体複体であることが (例えば絵を見れば) 容易に分かる.

2 つめの条件が成り立つことは容易に分かる.

また,

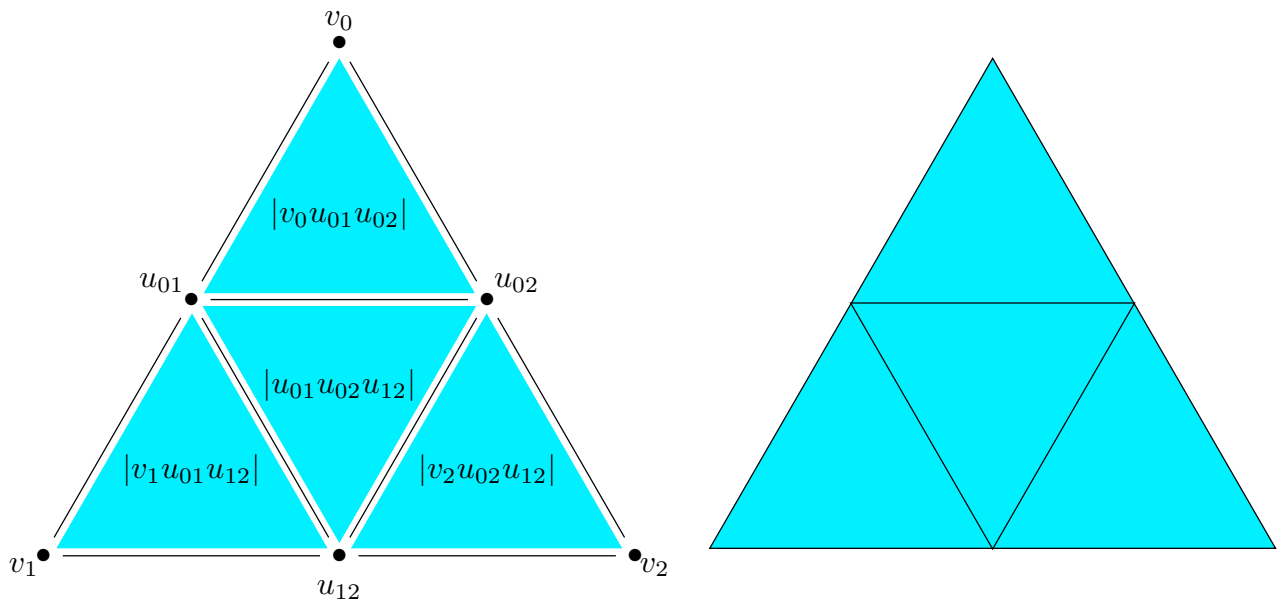
$$|L| = |v_0 u_{01} u_{02}| \cup |v_1 u_{01} u_{12}| \cup |v_2 u_{02} u_{12}| \cup |u_{01} u_{02} u_{12}|$$

であるが, 絵を見れば $|L| = \sigma = |K|$ が成り立つことも分かる (もちろん, きちんと式で見てもそれ程大変ではない).

よって L は K の細分である.

exercise 3. 1. $\{u_{01}, u_{02}, u_{12}\}$ はアフィン独立であることを示せ.

2. $\{v_0, u_{01}, u_{02}\}$ はアフィン独立であることを示せ.

図 3.7 L と $|L|$

3.5 重心細分

Definition 3.5.1. $\sigma = |v_0 \dots v_n|$ を n 単体とする. 点

$$b_\sigma = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i \in \sigma$$

を σ の重心 (barycenter) という.

$b_\sigma \in \text{Int } \sigma$ であり, $\tau < \sigma$ ならば $b_\sigma \notin \tau$ であることに注意.

$|v_0|$ の重心は v_0 . $|v_0v_1|$ の重心は v_0 と v_1 を結ぶ線分の中点. $|v_0v_1v_2|$ の重心は三角形の重心.

Lemma 3.5.2. $\sigma = |v_0 \dots v_n|$ を n 単体,

$$\emptyset \neq \sigma_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_d \leq \sigma$$

を σ の面の列とする. このとき $\{b_{\sigma_0}, \dots, b_{\sigma_d}\}$ はアフィン独立である.

Proof. $d = n$ のときを示せばよい. さらにこの場合, $\sigma_i = |v_0v_1 \dots v_i|$, つまり,

$$\begin{array}{ccccccc} \emptyset \neq & \sigma_0 & < & \sigma_1 & < & \dots & < & \sigma_n & = & \sigma \\ & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \\ & |v_0| & & |v_0v_1| & & & & |v_0v_1 \dots v_n| & & \end{array}$$

としてよい.

$$b_{\sigma_i} = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i v_j = \frac{1}{i+1} \sum_{j \leq i} v_j$$

である.

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i b_{\sigma_i} = 0, \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 0$$

とすると,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^n \lambda_i b_{\sigma_i} \\ &= \sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda_i}{i+1} \sum_{j \leq i} v_j \right) \\ &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i \geq j} \frac{\lambda_i}{i+1} \right) v_j \\ \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i \geq j} \frac{\lambda_i}{i+1} \right) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j \leq i} \frac{\lambda_i}{i+1} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \left((i+1) \frac{\lambda_i}{i+1} \right) \\ &= \sum_{i=0}^n \lambda_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. $\{v_0, \dots, v_n\}$ はアフィン独立なので, $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$. □

exercise 4. 上の証明中の計算を $n = 2$ の場合にやってみよ.

Lemma 3.5.3. $\sigma = |v_0 \dots v_n|$ を n 単体, $\sigma_i = |v_0 v_1 \dots v_i| \leq \sigma$ とする. このとき

$$|b_{\sigma_0} \dots b_{\sigma_n}| = \left\{ \sum_{i=0}^n \mu_i v_i \mid \mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0, \sum \mu_i = 1 \right\}$$

である. さらに, $x \in |b_{\sigma_0} \dots b_{\sigma_n}| \subset |v_0 \dots v_n|$ の, $b_{\sigma_0}, \dots, b_{\sigma_n}$ に関する重心座標を $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, $\{v_0, \dots, v_n\}$ に関する重心座標を (μ_0, \dots, μ_n) , つまり

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_{\sigma_i} = \sum_{i=0}^n \mu_i v_i$$

とすると,

$$\mu_j = \sum_{i=j}^n \frac{\lambda_i}{i+1} \quad \lambda_j = (j+1)(\mu_j - \mu_{j+1})$$

(ただし $\mu_{n+1} = 0$ とする) である.

とくに, $\lambda_i = 0$ となる点, つまり $\{b_{\sigma_1} \dots b_{\sigma_n}\} \setminus \{b_{\sigma_i}\}$ の張る面の点は,

$$\mu_0 \geq \dots \geq \mu_i = \mu_{i+1} \geq \dots \geq \mu_n \geq 0$$

をみたす点である.

Proof. $b_{\sigma_i} \in \sigma$ ゆえ $|b_{\sigma_0} \dots b_{\sigma_n}| \subset \sigma$ である.

$x \in |b_{\sigma_0} \dots b_{\sigma_n}|$ に対し, 先の証明と同じ計算で

$$x = \sum_{i=0}^n \lambda_i b_{\sigma_i} = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=j}^n \frac{\lambda_i}{i+1} \right) v_j$$

であるから

$$\mu_j = \sum_{i=j}^n \frac{\lambda_i}{i+1}$$

が分かる. よって

$$\begin{aligned} \mu_j - \mu_{j+1} &= \sum_{i=j}^n \frac{\lambda_i}{i+1} - \sum_{i=j+1}^n \frac{\lambda_i}{i+1} \\ &= \frac{\lambda_j}{j+1} \geq 0. \end{aligned}$$

これより $\lambda_j = (j+1)(\mu_j - \mu_{j+1})$ および

$$|b_{\sigma_0} \dots b_{\sigma_n}| \subset \left\{ \sum_{i=0}^n \mu_i v_i \mid \mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0, \sum \mu_i = 1 \right\}$$

が分かる. 一方,

$$x = \sum_i \mu_i v_i, \quad \mu_0 \geq \mu_1 \geq \dots \geq \mu_n \geq 0, \quad \sum \mu_i = 1$$

とすると,

$$\lambda_i = (i+1)(\mu_i - \mu_{i+1})$$

とおけば, 先の計算を逆にたどると

$$x = \sum_i \mu_i v_i = \sum_i \lambda_i b_{\sigma_i}$$

となる. $\mu_i \geq \mu_{i+1}$ だから $\lambda_i \geq 0$ であり,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \lambda_i &= \sum_{i=0}^n (i+1)(\mu_i - \mu_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^n \mu_i = 1 \end{aligned}$$

だから $x \in |b_{\sigma_0} \dots b_{\sigma_n}|$. □

$|\text{Sd}(\sigma)| = \sigma$ と $\tau \leq \sigma$ なら $\text{Sd}(\tau) \subset \text{Sd}(\sigma)$ から inductive に $\text{Sd}(\sigma)$ が単体複体であることを示し, $\text{Sd}(\sigma) = b_\sigma * \text{Sd}(\dot{\sigma})$ は単体複体であるという風にやるのが楽か?

Proposition 3.5.4. 単体 σ に対し集合

$$\text{Sd}(\sigma) = \{|b_{\sigma_0} \dots b_{\sigma_d}| \mid \emptyset \neq \sigma_0 < \dots < \sigma_d \leq \sigma\}$$

を考える. $\text{Sd}(\sigma)$ は単体複体で, $K(\sigma)$ の細分である. とくに

$$|\text{Sd}(\sigma)| = \sigma.$$

Proof. ToDo. □

Definition 3.5.5. K を幾何的単体複体とする. 集合

$$\begin{aligned} \text{Sd} K &= \{|b_{\sigma_0} \dots b_{\sigma_d}| \mid \emptyset \neq \sigma_0 < \dots < \sigma_d, \sigma_d \in K\} \\ &= \bigcup_{\sigma \in K} \{|b_{\sigma_0} \dots b_{\sigma_d}| \mid \emptyset \neq \sigma_0 < \dots < \sigma_d \leq \sigma\} \\ &= \bigcup_{\sigma \in K} \text{Sd}(\sigma) \end{aligned}$$

は単体複体である.

実際, 上でみたように各 $\text{Sd}(\sigma)$ は単体複体である. $\sigma, \tau \in K$ に対し $\sigma \cap \tau \leq \sigma, \tau$ ゆえ

$$\text{Sd}(\sigma \cap \tau) \subset \text{Sd}(\sigma) \cap \text{Sd}(\tau)$$

だから

$$\begin{aligned} |\text{Sd}(\sigma \cap \tau)| &\subset |\text{Sd}(\sigma) \cap \text{Sd}(\tau)| \\ &\subset |\text{Sd}(\sigma)| \cap |\text{Sd}(\tau)| \\ &= \sigma \cap \tau \\ &= |\text{Sd}(\sigma \cap \tau)| \end{aligned}$$

したがって

$$|\text{Sd}(\sigma) \cap \text{Sd}(\tau)| = |\text{Sd}(\sigma)| \cap |\text{Sd}(\tau)|$$

よって $\bigcup_{\sigma \in K} \text{Sd}(\sigma)$ は単体複体である.

これを K の重心細分という.

非負整数 r に対し, $\text{Sd}^r K$ を

$$\begin{aligned} \text{Sd}^0 K &= K, \\ \text{Sd}^r K &= \text{Sd}(\text{Sd}^{r-1} K) \end{aligned}$$

により帰納的に定義する.

Definition 3.5.6. 単体複体 K に対し, K の単体の直径の最大値を $\text{mesh } K$ と書く:

$$\text{mesh } K = \max \delta(\sigma) \mid \sigma \in K.$$

なお,

$$\delta(\sigma) = \sup \{ \|x - y\| \mid x, y \in \sigma \}$$

である.

Lemma 3.5.7. 1. 単体 $\sigma = |v_0 \dots v_n|$ に対し

$$\delta(\sigma) = \max_{i,j} \|v_i - v_j\|$$

である.

2. n 次元幾何的単体複体 K に対し

$$\text{mesh } \text{Sd} K \leq \frac{n}{n+1} \text{mesh } K.$$

よって

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{mesh } \text{Sd}^r K = 0.$$

Proof. 1. $x, y \in \sigma$,

$$\begin{aligned} x &= \sum_i \lambda_i v_i, & \sum_i \lambda_i &= 1, \lambda_i \geq 0 \\ y &= \sum_i \mu_i v_i, & \sum_j \mu_j &= 1, \mu_j \geq 0 \end{aligned}$$

に対し

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \left(\sum_i \lambda_i v_i \right) - \left(\sum_i \lambda_i \right) y \right\| \\ &= \left\| \sum_i \lambda_i (v_i - y) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_i \lambda_i \|v_i - y\| \\
&\leq \sum_i \lambda_i \max_i \|v_i - y\| \\
&= \max_i \|v_i - y\|
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
\|v_i - y\| &\leq \sum_j \mu_j \|v_i - v_j\| \\
&\leq \max_j \|v_i - v_j\|
\end{aligned}$$

ゆえ

$$\|x - y\| \leq \max_{i,j} \|v_i - v_j\|$$

だから

$$\delta(\sigma) \leq \max_{i,j} \|v_i - v_j\|$$

$v_i \in \sigma$ ゆえ $\max_{i,j} \|v_i - v_j\| \leq \delta(\sigma)$.

2. $\sigma < \tau \in K$, $\dim \sigma = l$, $\dim \tau = m$ とする. $l < m \leq n$ である. $b_\sigma = \frac{1}{l+1} \sum_{v \in V(\sigma)} v$ だから, 上の証明の前半を $b_\sigma, b_\tau \in \tau$ に適用すると, ある頂点 $v \in V(\sigma) \subset V(\tau)$ が存在し, $\|b_\sigma - b_\tau\| = \|v - b_\tau\|$ となる.

$$\begin{aligned}
\|b_\sigma - b_\tau\| &= \|v - b_\tau\| \\
&= \left\| v - \frac{1}{m+1} \sum_{u \in V(\tau)} u \right\| \\
&\leq \frac{1}{m+1} \sum_{u \in V(\tau)} \|v - u\| \\
&= \frac{1}{m+1} \sum_{u \in V(\tau) \setminus v} \|v - u\| \\
&\leq \frac{1}{m+1} \sum_{u \in V(\tau) \setminus v} \delta(\tau) \\
&= \frac{m}{m+1} \delta(\tau) \\
&\leq \frac{m}{m+1} \text{mesh } K \\
&\leq \frac{n}{n+1} \text{mesh } K
\end{aligned}$$

よって

$$\text{mesh Sd } K \leq \frac{n}{n+1} \text{mesh } K.$$

□

3.5.1 ToDo

- もう少し単体複体の例を...

つづく...

第 4 章

Sperner, Envy-free Division, Brouwer

4.1 グラフについて少し

Definition 4.1.1. 有限集合 V と $E \subset \binom{V}{2}$ の組 $G = (V, E)$ を, 有限単純グラフという。ただし

$$\binom{V}{2} = \{e \subset V \mid \#e = 2\}.$$

V を G の頂点集合, V の元を G の頂点, E を G の辺集合, E の元を G の辺という。 G を明示する必要がある場合, V を $V(G), V_G, E$ を $E(G), E_G$ 等と書く。

グラフの定義には様々なヴァリエーションがある。この講義では, グラフは全て有限単純グラフを考える。

Definition 4.1.2. $G = (V, E)$ をグラフとする。 $v \in V$ に対し, v から出ている辺の本数を v の次数といい, $\deg v$ あるいは $\deg_G v$ で表す:

$$E_v = \{e \in E \mid v \in e\}$$

とおけば, $\deg v = \#E_v$.

単純グラフの一つの辺は頂点をちょうど二つ持つので, 各頂点から出ている辺の本数を全て加えると, 辺の数の 2 倍となる^{*4}。すなわち, 次が成り立つ。

Lemma 4.1.3. $G = (V, E)$ を有限単純グラフとする。このとき

$$2\#E = \sum_{v \in V} \deg v.$$

Corollary 4.1.4. 有限単純グラフの奇数次数の頂点の個数は偶数である。

Proof. $G = (V, E)$ を有限単純グラフとし, 偶数次数の頂点全体を V_0 , 奇数次数の頂点全体を V_1 とする:

$$V_i = \{v \in V \mid \deg v \equiv i \pmod{2}\}.$$

$V = V_0 \amalg V_1$ だから

$$2\#E = \sum_{v \in V} \deg v = \sum_{v \in V_0} \deg v + \sum_{v \in V_1} \deg v.$$

mod 2 で見れば

$$0 = \sum_{v \in V_0} 0 + \sum_{v \in V_1} 1 = \#V_1.$$

□

*4 形式的には $E \times V$ の部分集合 I を

$$I := \{(e, v) \mid v \in e\} \subset E \times V$$

とおいたときに $\#I$ を考えるとよい. $p_1: I \rightarrow E$, $p_2: I \rightarrow V$ を射影とする.

$$I = p_1^{-1}(E) = \prod_{e \in E} p_1^{-1}(e)$$

で,

$$p_1^{-1}(e) = \{(e, v) \mid v \in e\} \cong \{v \mid v \in e\} = e$$

だから $\#p_1^{-1}(e) = \#e = 2$. よって

$$\#I = \# \left(\prod_{e \in E} p_1^{-1}(e) \right) = \sum_{e \in E} \#p_1^{-1}(e) = \sum_{e \in E} 2 = 2\#E.$$

一方

$$I = p_2^{-1}(V) = \prod_{v \in V} p_2^{-1}(v)$$

で,

$$p_2^{-1}(v) = \{(e, v) \mid v \in e\} \cong \{e \mid v \in e\} = E_v$$

だから $\#p_2^{-1}(v) = \#E_v = \deg v$. よって

$$\#I = \# \left(\prod_{v \in V} p_2^{-1}(v) \right) = \sum_{v \in V} \#p_2^{-1}(v) = \sum_{v \in V} \#E_v = \sum_{v \in V} \deg v.$$

4.2 Sperner の補題

Definition 4.2.1. K を単体複体, $V = V(K)$ を K の頂点集合とする.

1. S を集合とする. 写像 $l: V \rightarrow S$ を, K の (S に値をもつ) ラベリング (labeling) という.
2. $l: V \rightarrow S$ を K のラベリングとし, $T \subset S$ とする. $\tau \in K$ は, $l(V(\tau)) = T$ であるとき T 充満ラベル付き (fully labelled) であるという. S 充満ラベル付き であるとき充満ラベル付きであるという.
3. n 単体 $|v_0 \dots v_n|$ の細分 (正確には $K(|v_0 \dots v_n|)$ の細分) K の $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$ に値をもつラベリング $l: V \rightarrow [n] = \{0, 1, \dots, n\}$ は, 次の条件をみたすとき, Sperner ラベリングという:

$$l(v) \in \{i \mid \lambda_i(v) \neq 0\}$$

ただし $\lambda: |v_0 \dots v_n| \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ を ($\{v_0, \dots, v_n\}$ に関する) 重心座標, λ と第 i 成分への射影との合成を $\lambda_i: |v_0 \dots v_n| \rightarrow \mathbb{R}$ とする. つまり $x = \sum_i \lambda_i v_i \in |v_0 \dots v_n|$ に対し, $\lambda(x) = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i(x) = \lambda_i$. $V \subset |K| = |v_0 \dots v_n|$ であることに注意する.

- Example 4.2.2.**
1. $l(v_i) = i$. $v \in |v_i v_j|$ ならば $l(v) \in \{i, j\}$. $v \in |v_i v_j v_k|$ ならば $l(v) \in \{i, j, k\}$.
 2. 0 単体 $\sigma = |v_0|$ の細分は $K(\sigma) = \{\emptyset, \sigma\}$ 自身のみで, $V = \{v_0\}$. よってラベリング $l: \{v_0\} \rightarrow [0] = \{0\}$ は一意に定まり ($l(v_0) = 0$), これは Sperner ラベリング.

Theorem 4.2.3 (Sperner の補題). $\Delta = |v_0 \dots v_n|$ を n 単体, K を Δ の細分, $l: V = V(K) \rightarrow [n]$ を K の Sperner ラベリングとする.

このとき, K は奇数個の充満ラベル付き単体を持つ.

Proof. 単体の次元 n に関する帰納法で示そう.

$n = 0$ のときはあきらかに成り立つ.

$n - 1$ 次元まで成り立つと仮定する. K を n 単体 $|v_0 \dots v_n|$ の細分,

$$l: V = V(K) \rightarrow [n]$$

を K の Sperner ラベリングとする.

$\sigma \in K$ が充満ラベル付きならば $\dim \sigma = n$ なので, 充満ラベル付き n 単体の個数が奇数であることを示せばよい.

まず、次のことに注意する. $\sigma \in K$ を K の $n-1$ 単体とする. もちろん $\sigma \subset \dot{\Delta}$ か $\sigma \not\subset \dot{\Delta}$ のいずれかが成り立つ. K は n 単体 Δ の細分なので, $\sigma \subset \dot{\Delta}$ であれば $\sigma < \tau$ となる n 単体 $\tau \in K$ がただ一つ存在し, $\sigma \not\subset \dot{\Delta}$ であれば $\sigma < \tau$ となる n 単体 $\tau \in K$ がちょうど二つ存在する *5.

K の $n-1$ 単体で, $[n-1]$ 充満ラベル付きであるものをドアとよぶ. すなわち,

$$\sigma \in K \text{ がドア} \Leftrightarrow \dim \sigma = n-1 \text{ かつ } l(V(\sigma)) = [n-1].$$

K の任意の n 単体 σ には, ドア (σ の面でドアであるもの) は高々二つしかない. また, σ が充満ラベル付きであることと, ドアをただ一つ持つことは同値である. 実際, σ がドアを持つとすると, $\sigma = |u_0 \dots u_{n-1}u|$, $l(u_j) = j$ と書ける. $l(u) \leq n-1$ ならば, σ はちょうど二つのドアを持ち, また, $n \notin l(V(\sigma))$ だから充満ラベル付きではない. $l(u) = n$ ならば, σ はただ一つのドアを持ち, 充満ラベル付きである.

Δ の境界

$$\dot{\Delta} = \bigcup_{i=0}^n |v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n|$$

に含まれるドアを考える. l が Sperner ラベリングなので, $\sigma \subset |v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n|$ であれば $i \notin l(V(\sigma))$ である. よって, $i \leq n-1$ のとき $|v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n|$ にはドアは無い. $i = n$, つまり $|v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n| = |v_0 \dots v_{n-1}|$ の場合,

$$L = \{\sigma \in K \mid \sigma \subset |v_0 \dots v_{n-1}|\}$$

とおくと, L は単体複体であり, $|v_0 \dots v_{n-1}|$ の細分である. また, l が Sperner ラベリングなので, $l(V(L)) \subset [n-1]$ であり, あきらかに $l|_{V(L)}: V(L) \rightarrow [n-1]$ は L の Sperner ラベリングである. よって帰納法の仮定から, L は奇数個の $[n-1]$ 充満ラベル付き単体を持つ. すなわち L の元であるドアは奇数個ある.

次のグラフ G を考える.

頂点集合 $V(G)$ は K の n 単体全体 (を K_n と書く) に一点付け加えたもの:

$$K_n := \{\sigma \in K \mid \dim \sigma = n\},$$

$$V(G) = K_n \cup \{o\}.$$

辺集合 $E(G)$ は以下で定まるもの:

1. $\sigma, \tau \in K_n$ に対し, $\{\sigma, \tau\} \in E(G) \Leftrightarrow \sigma \cap \tau$ がドアである.
2. $\sigma \in K_n$ に対し, $\{o, \sigma\} \in E(G) \Leftrightarrow \sigma$ が L の元であるドアを面を持つ.

G の頂点の次数を考えよう.

$\sigma \in K_n$ の $n-1$ 面で L の元であるものは高々一つである. また, 最初に注意したように, L の $n-1$ 単体はただ一つの n 単体の面である. よって, L の元であるドアを面を持

つ $\sigma \in K_n$ の個数は, L のドアの個数と等しい. したがって, o の次数は L のドアの個数, すなわち奇数である.

また, 任意の $\sigma \in K_n$ に対し, σ の次数は σ のドアの数に等しい:

$$\deg \sigma = \#\{\rho < \sigma \mid \rho \text{ はドア}\}$$

実際,

$$\begin{aligned} \{\rho < \sigma \mid \rho \text{ はドア}\} &= \{\rho < \sigma \mid \rho \not\subset \dot{\Delta}, \rho \text{ はドア}\} \amalg \{\rho < \sigma \mid \rho \subset \dot{\Delta}, \rho \text{ はドア}\} \\ &= \{\rho < \sigma \mid \rho \not\subset \dot{\Delta}, \rho \text{ はドア}\} \amalg \{\rho < \sigma \mid \rho \in L, \rho \text{ はドア}\}. \end{aligned}$$

$\#\{\rho < \sigma \mid \rho \in L, \rho \text{ はドア}\} \leq 1$ なので

$$\begin{aligned} \#\{\rho < \sigma \mid \rho \in L, \rho \text{ はドア}\} &= 1 \\ \Leftrightarrow \{\rho < \sigma \mid \rho \in L, \rho \text{ はドア}\} &\neq \emptyset \\ \Leftrightarrow \{o, \sigma\} &\in E(G). \end{aligned}$$

最初に注意したように, $\dim \rho = n - 1$, $\rho < \sigma$, $\rho \not\subset \dot{\Delta}$ ならば, $\rho = \sigma \cap \tau$ となる $\tau \in K_n$ がただ一つ存在する. よって

$$\begin{aligned} &\{\rho < \sigma \mid \rho \not\subset \dot{\Delta}, \rho \text{ はドア}\} \\ &= \{\tau \in K_n \mid \sigma \cap \tau \text{ はドア}\} \\ &= \{\tau \in K_n \mid \{\sigma, \tau\} \in E(G)\}. \end{aligned}$$

とくに $\deg \sigma \leq 2$ だから $\deg \sigma$ が奇数 $\Leftrightarrow \deg \sigma = 1$. また, $\deg \sigma = 1 \Leftrightarrow \sigma$ はドアをただ一つ持つ $\Leftrightarrow \sigma$ は充満ラベル付き.

グラフの奇数次数の頂点は偶数個で, o は奇数次数なので, $\sigma \in K_n$ で $\deg \sigma$ が奇数のものが奇数個ある. つまり充満ラベル付き単体の個数は奇数.

□

*5 これを厳密に証明するのはちょっと細かい議論が必要だと思う. 直感的にはあきらかであろう.

4.3 Envy-free

目標であった Theorem 1.0.4:

Theorem 1.0.4 ([5, 2, 3]). n 回のカットによる (つまり各 P_i が区間となる) envy-free な $n + 1$ 分配が存在する.

の証明を与えよう。証明は $n = 2$ の場合と同様である。

「 n 回のカットによる envy-free な $n + 1$ 分配」をきちんと定式化しておく。

$I = [0, 1]$ を閉区間とする。 I の n 回カットというのは、 I の n 個の点を指定するという事なので、集合

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1\}$$

つまり n 単体 Δ_*^n (Example 3.3.10) の点に他ならない。 n 回のカット $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_*^n$ により得られる $n + 1$ 個のピースを $P(x, 0), \dots, P(x, n)$ とする、すなわち

$$P(x, i) = [x_i, x_{i+1}]$$

と定める (ただし, $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$ とおく)。

また、閉区間の測度だけ考えれば十分である。したがって示したいことは次である。

Theorem 4.3.1. $F_i: I \rightarrow I$ ($i \in [n] = \{0, 1, \dots, n\}$) を単調増加連続関数で $F_i(0) = 0$, $F_i(1) = 1$ をみたすものとする。 $\mu_i(a, b) = F_i(b) - F_i(a)$ により

$$\mu_i: \Delta_*^2 = \{(a, b) \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\} \rightarrow I$$

を定め、閉区間 $[a, b]$ に対し、 $\mu_i([a, b]) = \mu_i(a, b)$ と定める。

このとき、ある点 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_*^n$ と、ある置換 (全単射) $\pi: [n] \rightarrow [n]$ が存在し、任意の $i, j \in [n]$ に対し

$$\mu_i(P(x, \pi(i))) \geq \mu_i(P(x, j))$$

をみたす (ただし, $P(x, j) = [x_j, x_{j+1}]$, $x_0 = 0, x_{n+1} = 1$)。

まず、近似解が (有限のステップで) 得られること、すなわち次を示そう。

Theorem 4.3.2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し、ある点 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta_*^n$ と、ある置換 $\pi: [n] \rightarrow [n]$ が存在し、任意の $i, j \in [n]$ に対し

$$\mu_i(P(x, \pi(i))) > \mu_i(P(x, j)) - \varepsilon$$

をみたす。

$n = 2$ の場合と同様に、 Δ_*^n の細分上にうまく Sperner ラベリングを与えることで証明する。そのために次を準備しよう。

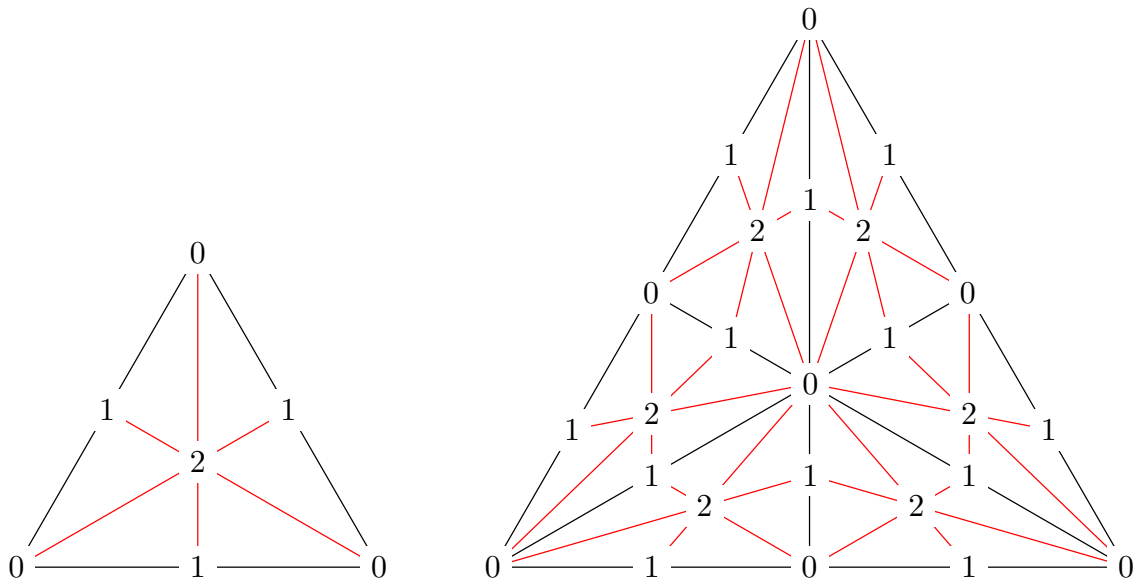
Lemma 4.3.3. K を n 次元単体複体とする。 K の重心細分 $\text{Sd } K$ のラベリング

$$d: V(\text{Sd } K) = \{b_\sigma \mid \sigma \in K\} \rightarrow [n] = \{0, 1, \dots, n\}$$

を

$$d(b_\sigma) = \dim \sigma$$

で定めると, $\text{Sd } K$ の任意の n 単体は充満ラベル付きである.



Proof. $\text{Sd } K$ の n 単体は, K の単体の列

$$\emptyset \neq \sigma_0 < \dots < \sigma_n \in K$$

の重心により張られる $|b_{\sigma_0} \dots b_{\sigma_n}|$ という形のものである. $d_i := d(b_{\sigma_i}) = \dim \sigma_i$ とおくと, $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ なので $d_i < d_{i+1}$ であり, $\dim K = n$ なので $d_n \leq n$ である. よって

$$0 \leq d_0 < d_1 < \dots < d_n \leq n$$

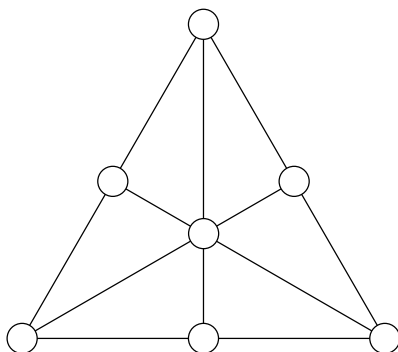
となる. したがって $d_i = i$ (なぜか?). □

exercise 5. d_0, \dots, d_n が整数で,

$$0 \leq d_0 < d_1 < \dots < d_n \leq n$$

をみたせば, 全ての i に対し $d_i = i$ であることを示せ.

exercise 6. $\text{Sd } \Delta^2$ の $[2] = \{0, 1, 2\}$ に値をもつラベリングで, 全ての 2 単体が充満ラベル付きとなるようなもの (つまり, 下の図の○に 0, 1, 2 いずれかの番号をつけ, 小さい三角形 6 個それぞれの頂点に 0, 1, 2 全ての番号がついているようにする) をなるべくたくさん (出来れば全て) 挙げよ.



Theorem 4.3.2 の証明. μ_0, \dots, μ_n はコンパクト距離空間上の連続関数なので一様連続である. よって, ある $\delta > 0$ が存在し, 任意の $0 \leq i \leq n$ と, 任意の $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \Delta_*^2$ に対し, $\|x - y\| < \delta$ ならば $|\mu_i(x_1, x_2) - \mu_i(y_1, y_2)| < \varepsilon/2$ となる (関数が $n+1$ 個 (有限個) なので, あるいは disjoint union の上の連続関数と思うと, δ は i にもよらずにとれる).

この δ に対し, $\text{mesh Sd}^r \Delta_*^n < \delta$ となる $r \geq 1$ をとり (Lemma 3.5.7 を見よ), $K = \text{Sd}^r \Delta_*^n$ とおく. Lemma 4.3.3 より, ラベリング

$$d: V(K) \rightarrow [n]$$

で, K の任意の n 単体が充満ラベル付きとなるようなものがある. これを用いて新たなラベリング

$$l: V(K) \rightarrow [n]$$

を以下のように定める. $v \in V(K)$ は $|K| = \Delta_*^n$ の点であるから, $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_n \leq 1$ と書ける. このとき,

$$l(v) = \min \left\{ k \mid \mu_{d(v)}(P(v, k)) = \max_j \mu_{d(v)}(P(v, j)) \right\}$$

と定める. ただし $v_0 = 0, v_{n+1} = 1$ とおく. つまり, $\mu_{d(v)}(v_k, v_{k+1})$ が最大となる k (が複数あればそのうち一番小さいもの) を $l(v)$ とする ($d(v)$ 番目の人に, $[v_0, v_1], \dots, [v_n, v_{n+1}]$ の中で一番好きなものを選んでもらう. ただし, 同じくらい好きなものがあれば, 番号の若いものを選んでもらう).

l は Sperner ラベリングである. 実際, $v \in V(K)$ とする. 簡単のため $\mu_{d(v)}$ を μ , $F_{d(v)}$ を F と書く. $v = (v_1, \dots, v_n) \in \Delta_*^n$ の重心座標は Example 3.3.10 で見たように $(v_1 - v_0, v_2 - v_1, \dots, v_{n+1} - v_n)$ で与えられる. $v_{j+1} - v_j = 0$ ならば, $\mu(P(v, j)) = \mu(v_j, v_{j+1}) = 0$ であるが,

$$\mu(v_i, v_{i+1}) \geq 0 \quad (\forall i)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \mu(v_i, v_{i+1}) &= \sum_{i=0}^n (F(v_{i+1}) - F(v_i)) \\
&= F(v_{n+1}) - F(v_0) \\
&= F(1) - F(0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

ゆえ $\mu(P(v, i)) = \mu(v_i, v_{i+1}) > 0$ となる i が存在するので, $l(v) \neq j$. よって

$$l(v) \in \{j \mid v_{j+1} - v_j \neq 0\}$$

つまり l は Sperner ラベリングである.

Sperner の補題より, (l により) 充満ラベル付きな n 単体 $\sigma \in K$ が存在する. K の任意の n 単体はラベリング d でも充満ラベル付きだったので,

$$l: V(\sigma) \xrightarrow{l} [n], \quad d: V(\sigma) \xrightarrow{d} [n]$$

は全単射である. $d(v) = i$ となる $v \in V(\sigma)$ を v^i と書く.

$$\begin{array}{ccc}
i \in \{0, \dots, n\} & \xlongequal{\quad} & [n] \xrightarrow{\pi} [n] \\
\uparrow & & \uparrow d \cong \nearrow l \\
v^i \in \{v^0, \dots, v^n\} & \xlongequal{\quad} & V(\sigma)
\end{array}$$

全単射 $\pi: [n] \rightarrow [n]$ を $\pi = l \circ d^{-1}$ により定める. また, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \sigma$ を任意にとる (とり方を指定したければ, 例えば $x = b_\sigma$ とする). この x と π が求めるものであることを示そう.

$i \in [n]$ とする. $d(v^i) = i$ なので, π と l の定め方より,

$$\begin{aligned}
\pi(i) &= l \circ d^{-1}(i) \\
&= l(v^i) \\
&= \min \left\{ k \mid \mu_{d(v^i)}(P(v^i, k)) = \max_j \mu_{d(v^i)}(P(v^i, j)) \right\} \\
&= \min \left\{ k \mid \mu_i(P(v^i, k)) = \max_j \mu_i(P(v^i, j)) \right\}
\end{aligned}$$

よって,

$$\mu_i(P(v^i, \pi(i))) = \max_j \mu_i(P(v^i, j)).$$

したがって任意の $j \in [n]$ に対し

$$\mu_i(P(v^i, \pi(i))) \geq \mu_i(P(v^i, j))$$

が成り立つ。 $v^i, x \in \sigma$ であるから、任意の k に対し、

$$\|(v_k^i, v_{k+1}^i) - (x_k, x_{k+1})\| \leq \|v^i - x\| \leq \delta(\sigma) \leq \text{mesh } K < \delta$$

よって

$$|\mu_i(P(v^i, k)) - \mu_i(P(x, k))| = |\mu_i(v_k^i, v_{k+1}^i) - \mu_i(x_k, x_{k+1})| < \varepsilon/2$$

とくに

$$\begin{aligned} \mu_i(P(x, \pi(i))) &> \mu_i(P(v^i, \pi(i))) - \varepsilon/2 \\ \mu_i(P(v^i, j)) &> \mu_i(P(x, j)) - \varepsilon/2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \mu_i(P(x, \pi(i))) &> \mu_i(P(v^i, \pi(i))) - \varepsilon/2 \\ &\geq \mu_i(P(v^i, j)) - \varepsilon/2 \\ &> \mu_i(P(x, j)) - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 \\ &= \mu_i(P(x, j)) - \varepsilon. \end{aligned}$$

□

さて、Theorem 4.3.1 を証明しよう。

Proof. Theorem 4.3.2 より、各 $k \in \mathbb{N}$ に対し、ある点 $x^k \in \Delta_*^n$ と、ある置換 $\pi_k: [n] \rightarrow [n]$ が存在し、任意の $i, j \in [n]$ に対し、

$$\mu_i(P(x^k, \pi_k(i))) > \mu_i(P(x^k, j)) - \frac{1}{k}$$

をみたす。

$[n]$ から $[n]$ への全単射は有限個 ($(n+1)!$ 個) なので、ある置換 π が存在し、無限個の番号 k に対し $\pi_k = \pi$ となる^{*6} 必要なら番号を付け替えて、全ての $k \in \mathbb{N}$ に対し $\pi_k = \pi$ であるとしてよい^{*7}。

Δ_*^n はコンパクトなので、点列 $\{x^k\}$ は収束部分列を含む。再び番号を付け替えて、点列 $\{x^k\}$ は収束列であるとしてよい。

すなわち、 Δ_*^n の収束列 $\{x^k\}$ と、ある置換 $\pi: [n] \rightarrow [n]$ が存在し、任意の $i, j \in [n]$ に対し

$$\mu_i(P(x^k, \pi(i))) > \mu_i(P(x^k, j)) - \frac{1}{k}$$

が成り立つ。

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in \Delta_*^n$$

とする. μ_i は連続なので,

$$\begin{aligned}\mu_i(P(x, \pi(i))) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_i(P(x^k, \pi(i))) \\ &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mu_i(P(x^k, j)) - \frac{1}{k} \right) \\ &= \mu_i(P(x, j)).\end{aligned}$$

□

^{*6} $[n]$ から $[n]$ への全単射全体を $S_{[n]}$ と書く. $p: \mathbb{N} \rightarrow S_{[n]}$ を $p(k) = \pi_k$ で定める.

$$\mathbb{N} = p^{-1}(S_{[n]}) = \coprod_{\pi \in S_{[n]}} p^{-1}(\pi)$$

ゆえ, 少なくとも一つの π に対し $p^{-1}(\pi)$ は無限集合.

^{*7} $\mathbb{N} \cap p^{-1}(\pi)$ の元を小さいほうから順に k_1, k_2, \dots とする. もちろん $\pi_{k_l} = \pi$ である. また $\{k_l\}_{l \in \mathbb{N}}$ は狭義単調増加列なので $k_l \geq l$ である. $y^l = x^{k_l}$ とおくと,

$$\begin{aligned}\mu_i(P(y^l, \pi(i))) &= \mu_i(P(x^{k_l}, \pi_{k_l}(i))) \\ &> \mu_i(P(x^{k_l}, j)) - \frac{1}{k_l} \\ &\geq \mu_i(P(x^{k_l}, j)) - \frac{1}{l} \\ &= \mu_i(P(y^l, j)) - \frac{1}{l}\end{aligned}$$

となる. 点列 $\{x^k\}$ のかわりに $\{y^k\}$ を考えればよい.

4.4 Rental Harmony?

4.5 Brouwer の不動点定理と Sperner の補題

Brouwer の不動点定理

Theorem 4.5.1 (Brouwer). 任意の連続写像 $f: D^n \rightarrow D^n$ は不動点を持つ.

と Sperner の補題はほぼ同値である.

Sperner の補題から Brouwer の不動点定理を証明しよう. 証明の方法は, Theorem 4.3.1, Theorem 4.3.2 の証明と同様である.

D^n と標準的 n 単体

$$\Delta^n = \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, \forall i: x_i \geq 0 \right\}$$

は同相なので, 次の Theorem 4.5.2 を示せばよい.

exercise 7. なぜか?

Theorem 4.5.2. 任意の連続写像 $f: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ は不動点を持つ.

先と同様, まず近似バージョンを示す.

Lemma 4.5.3. $x = (x_0, \dots, x_n), y = (y_0, \dots, y_n) \in \Delta^n$ とする. このとき $x = y \Leftrightarrow \forall i \in [n] : x_i \leq y_i$.

Proof. 任意の $i \in [n]$ に対し $x_i \leq y_i$ であるとする. $x, y \in \Delta^n$ なので

$$\sum_i x_i = \sum_i y_i = 1$$

である. 任意の i に対し $y_i - x_i \geq 0$ なので,

$$0 \leq y_i - x_i \leq \sum_i (y_i - x_i) = \sum_i y_i - \sum_i x_i = 0$$

ゆえ $y_i = x_i$, よって $y = x$.

□

Theorem 4.5.4. $f: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ を連続写像とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $x = (x_0, \dots, x_n) \in \Delta^n$ が存在し, 任意の $0 \leq i \leq n$ に対し,

$$f(x)_i < x_i + \varepsilon$$

が成り立つ.

Proof. $\varepsilon > 0$ とする. Δ^n はコンパクトだから f は一様連続なので, ある $\varepsilon/2 > \delta > 0$ が存在し, 任意の $x, y \in \Delta^n$ に対し, $\|x - y\| < \delta$ ならば, $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon/2$ となる.

この δ に対し, $\text{mesh Sd}^r \Delta^n < \delta$ となる $r \geq 1$ をとり, $K = \text{Sd}^r \Delta^n$ とおく.

$x \in \Delta^n$ に対し, 集合 $L(x) \subset [n]$ を

$$L(x) := \{i \in [n] \mid f(x)_i < x_i\}$$

で定める.

$L(v) = \emptyset$ となる $v \in V(K)$ が存在すれば, 任意の $i \in [n]$ に対し $f(v)_i \geq v_i$ となるから $f(v) = v$ なので, $x = v$ とすればよい.

任意の $v \in V(K)$ に対し $L(v) \neq \emptyset$ であるとする. ラベリング $l: V(K) \rightarrow [n]$ を,

$$l(v) = \min L(v) = \min \{i \mid f(v)_i < v_i\}$$

により定める ($l(v) \in L(v)$ であればよい) . $f(v)_i \geq 0$ なので, $v_i = 0$ ならば $i \notin L(v)$ ゆえ $l(v) \neq i$. よって $l(v) \in \{i \mid v_i \neq 0\}$, つまり l は Sperner ラベリング.

Sperner の補題より, 充満ラベル付きな n 単体 $\sigma \in K$ が存在する.

$x \in \sigma$ を任意にとると求める条件をみたすことを示そう. 実際, $i \in [n]$ とする. σ は充満ラベル付きなので, $v \in V(\sigma)$ で $l(v) = i$, すなわち, $f(v)_i < v_i$ となるものが存在する.

$x, v \in \sigma$ ゆえ

$$\|x - v\| \leq \delta(\sigma) \leq \text{mesh } K < \delta$$

だから

$$\begin{aligned} |f(x)_i - f(v)_i| &\leq \|f(x) - f(v)\| < \varepsilon/2 \\ |x_i - v_i| &\leq \|x - v\| < \delta < \varepsilon/2 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} f(x)_i &< f(v)_i + \varepsilon/2 \\ &< v_i + \varepsilon/2 \\ &< x_i + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &= x_i + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Theorem 4.5.2 の証明. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対し, $x^k \in \Delta^n$ で, 任意の $i \in [n]$ に対し

$$f(x^k)_i < x_i^k + \frac{1}{k}$$

となるものをとる. Δ^n はコンパクトだから, 点列 $\{x^k\}$ は収束部分列を含む. $x \in \Delta^n$ をその極限点とすると, f は連続だから, 任意の $i \in [n]$ に対し

$$f(x)_i \leq x_i$$

が成り立つ. よって $f(x) = x$.

□

逆に Brouwer の不動点定理から次の (弱い) Sperner の補題を示そう.

Theorem 4.5.5. $\Delta = |v_0 \dots v_n|$ を n 単体, K を Δ の細分, $l: V = V(K) \rightarrow [n]$ を K の Sperner ラベリングとする.

このとき, K は少なくとも一つ充満ラベル付き単体を持つ.

Lemma 4.5.6. (全単射) 写像 $s: [n] \rightarrow [n]$ を $s(i) = i + 1 \pmod{n+1}$ で定める. $\emptyset \neq I \subset [n]$ を部分集合とする. $s(I) \subset I$ ならば $I = [n]$.

Proof. あきらか.

□

Theorem 4.5.5 の証明. 写像 $m: V(K) \rightarrow [n]$ を

$$m = s \circ l: V(K) \xrightarrow{l} [n] \xrightarrow{s} [n]$$

で定め, $f: V(K) \rightarrow \{v_0, \dots, v_n\}$ を

$$f(u) = v_{m(u)}$$

で定める. f の拡張

$$|f|: \Delta = |K| \rightarrow \Delta$$

を考える (Definition 3.3.7 参照). $|f|$ は連続であるから, Brouwer の不動点定理より不動点を持つ.

x を不動点とする. $x \in \text{Int } \sigma$ となる $\sigma \in K$ が (ただ一つ) 存在する. この σ が充満ラベル付きであることを示そう.

$x = \sum \lambda_i v_i \in \Delta$ とし, $I = \{i \in [n] \mid \lambda_i \neq 0\}$ とおく. σ の頂点集合を U とすると

$$x = \sum_{u \in U} \mu_u u, \quad \mu_u > 0$$

と書ける. $j \notin I$ ならば $u \in U$ の重心座標の j 成分は 0 (なぜか?) であり, l は Sperner ラベリングであるから, $l(u) \neq j$ である. よって $l(u) \in I$ である, すなわち $l(U) \subset I$.

x は不動点, すなわち $x = |f|(x)$ ゆえ

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda_i v_i &= x \\ &= |f|(x) \\ &= \sum \mu_u f(u) \\ &= \sum \mu_u v_{m(u)} \\ &= \sum_i \left(\sum_{u \in m^{-1}(i)} \mu_u \right) v_i \end{aligned}$$

よって係数を比べると

$$\begin{aligned} I &= \left\{ i \mid \sum_{u \in m^{-1}(i)} \mu_u \neq 0 \right\} \\ &= \{i \mid m^{-1}(u) \neq \emptyset\} \\ &= m(U) \end{aligned}$$

さて,

$$s(l(U)) = m(U) = I$$

なので

$$\#l(U) \geq \#I$$

で,

$$l(U) \subset I$$

なので,

$$l(U) = I$$

である. よって

$$s(I) = s(l(U)) = I$$

したがって $I = [n]$.

$$l(U) = I = [n]$$

だから σ は充満ラベル付き.

□

付録 A

準備

これまでに学んだ（かもしれない）であろう事で必要なことをまとめておく．証明がっていないものは幾何学序論の私の講義ノート [4] にあると思う．

A.1 同値関係

Definition A.1.1. 集合 X 上の関係が次の 3 つの条件:

1. (反射律, **reflexive law**) $x \sim x$,
2. (対称律, **symmetric law**) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
3. (推移律, **transitive law**) $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

を満たすとき, 関係 \sim は集合 X 上の同値関係 (**equivalence relation**) であるという.

Definition A.1.2. 関係 \sim を集合 X 上の同値関係とする. X の要素 $a \in X$ に対し, a と同値な要素全体のなす X の部分集合

$$C_a = \{x \in X \mid x \sim a\}$$

を a の同値類 (**equivalence class**) という. a の同値類を $[a]$, \bar{a} 等と書くことも多い.

$x \in C_a$ をひとつとることを, x を C_a の代表元 (**representative**) としてとるという.

Definition A.1.3. X を集合, \sim を X 上の同値関係とする.

1. 同値類の全体 $\{C_a \mid a \in X\}$ を X/\sim と書き, 同値関係 \sim による X の商集合 (**quotient set**) という.

2. $a \in X$ を $C_a \in X/\sim$ にうつす写像

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X/\sim \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ a & \longmapsto & C_a \end{array}$$

を自然な写像 あるいは商写像, 自然な射影などという.

Proposition A.1.4. X を集合, \sim を X 上の同値関係とし, $\pi: X \rightarrow X/\sim$ をこの関係による商集合への自然な射影, すなわち $x \in X$ に, x を含む同値類 $C_x \in X/\sim$ を対応させる写像とする.

$f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 次は同値である.

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) = f(x')$.
2. $f = \bar{f} \circ \pi$ となるような写像 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

さらに, このような写像 \bar{f} は一意的である. この写像 \bar{f} を f により誘導される写像 (**induced map**) という.

具体的に書けば $\bar{f}(C_x) = f(x)$ である.

Corollary A.1.5. X, Y を集合, \sim, \approx をそれぞれ X, Y 上の同値関係, $p: X \rightarrow X/\sim$, $q: Y \rightarrow Y/\approx$ をそれぞれ自然な射影とする.

$f: X \rightarrow Y$ を写像とする. 次は同値である.

1. $x \sim x' \Rightarrow f(x) \approx f(x')$.
2. $q \circ f = \bar{f} \circ p$ となるような写像 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y/\approx$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ X/\sim & \xrightarrow{\exists \bar{f}} & Y/\approx \end{array}$$

この \bar{f} は $\bar{f}(C_x) = C_{f(x)}$ により与えられる.

Proof. $q \circ f: X \rightarrow Y/\approx$ に Prop. A.1.4 を使えばよい. □

A.2 群の作用

Definition A.2.1. X を集合, G を群とする. 写像 $\mu: X \times G \rightarrow X$ が与えられ, 次の条件をみたすとき, G は X に (μ により) 右から作用するという.

1. $\mu(\mu(x, g), h) = \mu(x, gh)$.
2. $\mu(x, e) = x$. ただし $e \in G$ は単位元.

しばしば, $\mu(x, g) \in X$ を $x \cdot g$ あるいは xg と書く. この書き方をすると上の条件は

1. $(xg)h = x(gh)$.
2. $xe = x$.

と書ける.

同様に, 写像 $\nu: G \times X \rightarrow X$ が与えられ, 次の条件をみたすとき, G は X に (ν により) 左から作用するという.

1. $\nu(h, \nu(g, x)) = \nu(hg, x)$.
2. $\nu(e, x) = x$. ただし $e \in G$ は単位元.

しばしば, $\nu(g, x) \in X$ を $g \cdot x$ あるいは gx と書く. この書き方をすると上の条件は

1. $h(gx) = (hg)x$.
2. $ex = x$.

と書ける.

Lemma A.2.2. G が X に左から作用しているとする. $g \in G$ に対し, 写像 $\nu_g: X \rightarrow X$ を $\nu_g(x) = \nu(g, x) = g \cdot x$ で定める. 次が成り立つ.

1. $\nu_h \circ \nu_g = \nu_{hg}$.
2. $\nu_e = 1_X$.

特に ν_g は全単射で, $\nu_{g^{-1}}$ がその逆写像を与える.

Proof.

$$\begin{aligned}\nu_h(\nu_g(x)) &= h \cdot (g \cdot x) = (hg) \cdot x = \nu_{hg}(x) \\ \nu_e(x) &= e \cdot x = x = 1_X(x) \\ \nu_g \circ \nu_{g^{-1}} &= \nu_{gg^{-1}} = \nu_e = 1_X \\ \nu_{g^{-1}} \circ \nu_g &= \nu_{g^{-1}g} = \nu_e = 1_X\end{aligned}$$

□

Lemma A.2.3. G が X に左から作用しているとする. 写像 $\mu: X \times G \rightarrow X$ を $\mu(x, g) = g^{-1} \cdot x$ と定めることにより G は X に右から作用する.

Proof.

$$\begin{aligned}\mu(\mu(x, g), h) &= h^{-1} \cdot \mu(x, g) = h^{-1} \cdot (g^{-1} \cdot x) \\ &= (h^{-1}g^{-1}) \cdot x = (gh)^{-1} \cdot x = \mu(x, gh) \\ \mu(x, e) &= e^{-1} \cdot x = e \cdot x = x\end{aligned}$$

□

Lemma A.2.4. G が X に右から (左から) 作用しているとする. X における関係 \sim を $x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G : x = y \cdot g$ ($x \sim y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists g \in G : x = g \cdot y$) により定めると \sim は同値関係である.

Proof. 右作用の場合のみ示す.

1. $x = x \cdot e$ ゆえ $x \sim x$.
2. $x \sim y$ とすると, $x = y \cdot g$ となる $g \in G$ がある. $y = y \cdot e = y \cdot (gg^{-1}) = (y \cdot g) \cdot g^{-1} = x \cdot g^{-1}$ ゆえ $y \sim x$.
3. $x \sim y$ かつ $y \sim z$ とすると, $x = y \cdot g, y = z \cdot h$ となる $g, h \in G$ がある. このとき $x = y \cdot g = (z \cdot h) \cdot g = z \cdot (hg)$ ゆえ $x \sim z$.

□

Definition A.2.5. G が X に右から作用しているとき, 上の同値関係による商集合を X/G と書き, X を G で割った集合という.

同様に G が X に左から作用しているとき, 上の同値関係による商集合を $G \setminus X$ と書き, X を G で割った集合という. また, $G \setminus X$ を X/G と書くことも多い.

Remark. G が X に左から作用しているとき, Lem. A.2.3 により与えられる右作用を考えると, これらの作用の定める同値関係は同じであることが $g \cdot y = (g^{-1})^{-1} \cdot y = y \cdot g^{-1}$ より分かる.

Example A.2.6. H を G の部分群とする. 群の積 $G \times H \rightarrow G$ により H は G に右から作用する. この作用による同値関係 \sim は $g \sim k \Leftrightarrow k^{-1}g \in H$ により与えられる. 実際, $g \sim k$ とすると $g = kh$ となる $h \in H$ がある. よって $k^{-1}g = h \in H$. 一方, $k^{-1}g \in H$ とすると $h = k^{-1}g$ とおけば $h \in H$ で $kh = g$.

A.3 部分空間

Definition A.3.1. (X, \mathcal{O}) を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A の部分集合族 \mathcal{O}_A を

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

と定めると, \mathcal{O}_A は A の位相となる. この位相を X による A の相対位相 (**relative topology**) という.

位相空間の部分集合に相対位相をいれて位相空間と見たとき, **部分空間 (subspace)** という.

部分空間への写像の連続性を調べる際, 次は有用である.

Proposition A.3.2. X, Y を位相空間, $B \subset Y$ を部分空間, $i: B \rightarrow Y$ を包含写像とする. このとき,

写像 $f: X \rightarrow B$ が連続 \Leftrightarrow 合成 $i \circ f: X \rightarrow Y$ が連続.

exercise 8. 証明せよ.

A.4 直積空間

Definition A.4.1. $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族とする. 直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に, 部分集合の族

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{p_\lambda^{-1}(O) \mid O \in \mathcal{O}_\lambda\}$$

が生成する位相 (この位相を**直積位相** という) を入れた位相空間を, 族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ の**直積空間**または**弱位相による直積空間**という. ただし $p_\lambda: \prod X_\lambda \rightarrow X_\lambda$ は標準的射影.

直積集合には普通とくにことわらなければ直積位相をいれる.

直積位相でよく使う/大事なものは次の性質である.

Theorem A.4.2. $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を位相空間の族, $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ を直積空間, A を位相空間とする.

1. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し連続写像 $f_\lambda: A \rightarrow X_\lambda$ が与えられているとする.
このとき連続写像 $f: A \rightarrow X$ で, 全ての λ に対し $p_\lambda \circ f = f_\lambda$ をみたすものがただひとつ存在する.
2. $f: A \rightarrow X$ を写像とする.

f が連続であるための必要十分条件は全ての λ に対し $p_\lambda \circ f: A \rightarrow X_\lambda$ が連続となることである.

- exercise 9.**
1. 直積空間の位相は, 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し p_λ が連続となるような, 最弱の位相であることを示せ.
 2. p_λ は開写像であることを示せ.
 3. p_λ が閉写像とはならないような例を挙げよ.
 4. Theorem A.4.2 を証明せよ.

A.5 商空間

Definition A.5.1. (X, \mathcal{O}_X) を位相空間, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とする. Y の部分集合族

$$\mathcal{O}_f = \{O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$$

は Y に位相を与える. この位相を f による等化位相といい, 位相空間 (Y, \mathcal{O}_f) を f による等化空間という.

Definition A.5.2. 関係 \sim を位相空間 X 上の同値関係とする. 商集合 X/\sim に, 自然な射影 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ による等化位相を与えたものを同値関係 \sim による商空間という.

定義により, 「 $O \subset X/\sim$ が開集合 $\Leftrightarrow \pi^{-1}(O)$ が開集合」である.

Definition A.5.3. X を位相空間, $A \subset X$ を空でない部分空間とする. $A \times A \subset X \times X$ の生成する同値関係による商空間を部分空間 A を一点に縮めた空間といい, X/A と書く.

Remark. $A \times A \subset X \times X$ の生成する同値関係とは, $A \times A$ を含む最小の同値関係 ($A \times A$ を含む同値関係全ての共通部分) .

具体的に書けば, $A \times A \cup \Delta(X)$. あるいは

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } x, y \in A$$

等化位相, 商空間でよく使う/大事なものは次の性質である.

Theorem A.5.4. X, Z を位相空間, Y を集合, $f: X \rightarrow Y$ を写像とし, Y に f による等化位相を入れる. $g: Y \rightarrow Z$ を写像とする.

このとき g が連続であるための必要十分条件は $g \circ f: X \rightarrow Z$ が連続であることである.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g \circ f} & Z \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ Y & & \end{array}$$

Theorem A.5.5. X, Y を位相空間, \sim を X 上の同値関係, X/\sim を商空間, $\pi: X \rightarrow X/\sim$ を自然な射影とする.

$f: X \rightarrow Y$ を写像とし, 次が可換であるとする (Proposition A.1.4 参照).

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

このとき, \bar{f} が連続であるための必要十分条件は f が連続であることである.

exercise 10. 1. Definition A.5.1 の \mathcal{O}_f は位相であることを示せ.

2. Definition A.5.1 で, f による等化位相は, f を連続にする最強の位相であることを示せ.

3. Theorem A.5.4 を証明せよ.

4. Theorem A.5.5 を証明せよ.

A.6 ハウスドルフ空間

Definition A.6.1. 位相空間 X が **Hausdorff** (ハウスドルフ) 空間である \Leftrightarrow 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x の近傍 U と y の近傍 V で, $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在する.

exercise 11. 位相空間 X が Hausdorff 空間である \Leftrightarrow 任意の相異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し, x を含む開集合 O と y を含む開集合 O' で, $O \cap O' = \emptyset$ となるものが存在する.

Example A.6.2. 距離空間は Hausdorff 空間である. 実際 X を距離空間, $x, y \in X$, $x \neq y$ とすると, $\varepsilon = d(x, y)/2 > 0$ で, $U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset$.

Theorem A.6.3. Hausdorff 空間において, 1 点は閉集合である.

Theorem A.6.4. Hausdorff 空間の部分空間も Hausdorff.

もう少し一般的に次が成り立つ.

Proposition A.6.5. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする. 連続な単射 $f: X \rightarrow Y$ が存在すれば X も Hausdorff.

Proof. $a, b \in X$, $a \neq b$ とする. f は単射だから $f(a) \neq f(b)$ である. Y は Hausdorff

だから $f(a)$ の近傍 U と, $f(b)$ の近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものがある. f は連続なので $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ はそれぞれ a, b の近傍で, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. \square

Theorem A.6.6. X, Y を位相空間とする. このとき $X \times Y$ が Hausdorff $\Leftrightarrow X, Y$ ともに Hausdorff.

Remark . 無限個の直積に対しても同様なことが成り立つ. 証明もほぼ同じ.

Theorem A.6.7. X を位相空間とする. このとき, X が Hausdorff \Leftrightarrow 対角線集合 $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ が $X \times X$ の閉集合.

Corollary A.6.8. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間, $A \subset X$ とし, $f, g: X \rightarrow Y$ を連続写像とする. このとき次が成り立つ.

1. X の部分集合

$$C := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$$

は閉集合である.

2. f と g が部分集合 A 上一致すれば, A^a 上一致する.

Example A.6.9. \mathbb{R} を 1 次元ユークリッド空間とする. 連続関数 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が \mathbb{Q} 上一致するならば $f = g$ である.

Corollary A.6.10. X を位相空間, Y を Hausdorff 空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続ならばグラフ

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

は $X \times Y$ の閉集合.

A.7 コンパクト空間

Definition A.7.1. 1. 位相空間 X がコンパクト (**compact**) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} X$ の任意の開被覆が有限部分被覆をもつ.

2. 位相空間 X の部分集合 A がコンパクトである $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 部分空間 A がコンパクトである.

Remark . コンパクト Hausdorff 空間のことをコンパクトといい, この定義 A.7.1 の条件をみたす空間を準コンパクト (**quasi-compact**) ということもある.

Proposition A.7.2. $A_1, A_2 \subset X$ がコンパクトならば $A_1 \cup A_2$ もコンパクトである.

Theorem A.7.3. コンパクト空間の閉部分集合はコンパクトである.

Theorem A.7.4. コンパクト空間の連続写像による像はコンパクトである.

Remark. コンパクト集合の連続写像による逆像はコンパクトとは限らない. 例えば \mathbb{R} 上の定数関数を考えてみよ.

Theorem A.7.5. X, Y ともにコンパクトなら $X \times Y$ もコンパクト.

Remark. 無限個の直積の場合も同様なことが成り立つ (チコノフ (Tikhonov) の定理) が, こちらは選択公理が必要 (選択公理と同値) であり証明はもう少し面倒.

Theorem A.7.6. コンパクト空間の無限部分集合は集積点をもつ.

Proof. X をコンパクト空間とする. $X \neq \emptyset$ としてよい. $A \subset X$ が集積点をもたないならば A は有限集合であることを示せばよい.

任意の $x \in X$ に対し, x は A の集積点ではないので, x を含む開集合 O_x で, $(A - \{x\}) \cap O_x = \emptyset$ となるものが存在する.

$$\emptyset = (A - \{x\}) \cap O_x = A \cap \{x\}^c \cap O_x = A \cap O_x \cap \{x\}^c$$

だから

$$A \cap O_x \subset \{x\}$$

である. 各 $x \in X$ に対し, この様な O_x をとる. $\{O_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆である. X はコンパクトなので, $x_1, \dots, x_n \in X$ で,

$$X = \bigcup_{i=1}^n O_{x_i}$$

となるものが存在する.

$$\begin{aligned} A &= A \cap X \\ &= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^n O_{x_i} \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n A \cap O_{x_i} \\ &\subset \bigcup_{i=1}^n \{x_i\} = \{x_1, \dots, x_n\} \end{aligned}$$

だから, A は有限集合. □

Corollary A.7.7. コンパクト距離空間の任意の点列は収束する部分列を含む.

Proof. X をコンパクト距離空間, $\{x_n\}$ を X の点列とする. $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ とおく. A が有限集合であれば, ある $x \in X$ が存在し, 無限個の番号 n に対し $x_n = x$ となるのでよい.

A が無限集合であれば, A は集積点をもつ. $x \in X$ を集積点とすると, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, $U_{\frac{1}{k}}(x) \cap A$ は無限集合であるので, $x_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(x)$, $n_k < n_{k+1}$ となる数列 $\{n_k\}_k$ がとれる. 部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ は x に収束する. \square

Remark. 逆も成り立つ. すなわち, 距離空間 X においては, X はコンパクトである \Leftrightarrow 任意の点列は収束する部分列を含む.

A.8 コンパクト Hausdorff 空間

Theorem A.8.1. Hausdorff 空間のコンパクト集合は閉集合である.

Corollary A.8.2. コンパクト Hausdorff 空間の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は閉集合であること.

Proof. Thm. A.7.3, A.8.1 よりあきらか. \square

Corollary A.8.3. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続写像は閉写像である.

Proof. Thm. A.7.3, A.7.4, A.8.1 よりあきらか. \square

Corollary A.8.4. コンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射は同相写像である. \square

Corollary A.8.5. X をコンパクト空間, Y を Hausdorff 空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続な全射とする. X 上の同値関係 \sim を, $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ により定める. このとき, 誘導写像 $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$ は同相写像である.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \bar{f} & \\ X/\sim & & \end{array}$$

Proof. X はコンパクトで, 商写像 $\pi: X \rightarrow X/\sim$ は連続な全射なので, Theorem A.7.4 より, X/\sim もコンパクト.

f が連続なので, A.5.5 より \bar{f} は連続である. $f = \bar{f} \circ \pi$ が全射なので, \bar{f} も全射. 同値関係の定め方より, あきらかに \bar{f} は単射.

すなわち, \bar{f} はコンパクト空間から Hausdorff 空間への連続な全単射である. よって同相写像. \square

A.9 コンパクト距離空間

Definition A.9.1. $(X, d_X), (Y, d_Y)$ を距離空間とする.

写像 $f: X \rightarrow Y$ が一様連続 (**uniformly continuous**) である $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x, x') < \delta$ ならば $d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$ となる.

明かに一様連続ならば連続である.

exercise 12. 一様連続ならば連続であることを示せ.

X がコンパクトのときは逆も言える.

Theorem A.9.2. (X, d_X) をコンパクト距離空間, (Y, d_Y) を距離空間とする. このとき, 写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続ならば, f は一様連続である.

Proof. $\varepsilon > 0$ とする.

点 $a \in X$ に対し, $f: X \rightarrow Y$ は点 a で連続なので, ある $\delta_a > 0$ が存在し, $d_X(a, x) < \delta_a$ ならば $d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2$ となる.

各 $a \in X$ に対し, この様な δ_a を一つとる *8. $\{U_{\delta_a}(a)\}_{a \in X}$ は X の開被覆で, X はコンパクトなので, ある $a_1, \dots, a_n \in X$ が存在し,

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_{\delta_i}(a_i)$$

となる. ただし見やすさのため $\delta_i = \delta_{a_i}$ とおいた.

$\delta := \min_i \delta_i$ とおく. $\delta > 0$ である.

$x, x' \in X, d_X(x, x') < \delta$ とする. $x \in X = \bigcup_{i=1}^n U_{\delta_i}(a_i)$ ゆえ, ある $1 \leq i \leq n$ が存在し, $x \in U_{\delta_i}(a_i)$, すなわち $d_X(a_i, x) < \delta_i$ である. よって $d_Y(f(a_i), f(x)) < \varepsilon/2$. また

$$\begin{aligned} d_X(a_i, x') &\leq d_X(a_i, x) + d_X(x, x') \\ &< \delta_i + \delta \\ &\leq \delta_i + \delta_i = 2\delta_i \end{aligned}$$

ゆえ $d_Y(f(a_i), f(x')) < \varepsilon/2$. したがって

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(x')) &\leq d_Y(f(x), f(a_i)) + d_Y(f(a_i), f(x')) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

*8 例えば

$$\min \{1, \sup \{\delta \mid d_X(a, x) < 2\delta \Rightarrow d_Y(f(a), f(x)) < \varepsilon/2\}\}$$

A.10 \mathbb{R}^n

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

の点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ に対し、その大きさ（ユークリッドノルム）を

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$

で定める。どこかで学んだことがあると思うが、次が成り立つ。

1. (a) $\|x\| \geq 0$.
(b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. 任意の $a \in \mathbb{R}$ と $x \in \mathbb{R}^n$ に対し、 $\|ax\| = |a|\|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

この講義では $\|x\|$ を $|x|$ と書くことがあるかもしれない。

\mathbb{R}^n の 2 点 $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ に対し x と y のユークリッド距離 $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

で定めるとこれは \mathbb{R}^n 上の距離関数である。

このノートでは、特に断らなければ \mathbb{R}^n にはこの距離をいれ、常にこの距離の定める位相を入れる。

Proposition A.10.1. $d_\infty(x, y)$, $d_1(x, y)$ を

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

で定めるとこれらは \mathbb{R}^n 上の距離関数であり、これらの定める位相はユークリッド距離の定める位相と等しい。

Proposition A.10.2. \mathbb{R}^n の位相は, \mathbb{R} の n 個の直積空間としての位相と等しい.

Corollary A.10.3. X を位相空間, $B \subset \mathbb{R}^n$ を部分空間, $f: X \rightarrow B$ を写像とする. このとき, f が連続であることと, 任意の $1 \leq i \leq n$ に対し, $p_i \circ f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が連続であることは同値. ただし, $p_i: B \rightarrow \mathbb{R}$ は, 包含と第 i 成分への射影 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の合成.

Proposition A.10.4. 足し算, 掛け算, 逆数

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto xy \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto 1/x \in \mathbb{R}$$

は連続.

Corollary A.10.5. 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は連続.

Proof. 行列を使って書けば, 各成分は足し算と掛け算で書ける. □

Theorem A.10.6 (Heine-Borel). ユークリッド空間 \mathbb{R}^n の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は有界閉集合であること.

つづく...

参考文献

- [1] Mark de Longueville. *A course in topological combinatorics*. Universitext. Springer, New York, 2013.
- [2] Walter Stromquist. How to cut a cake fairly. *Amer. Math. Monthly*, 87(8):640–644, 1980.
- [3] Francis Edward Su. Rental Harmony: Sperner’s Lemma in Fair Division. *The American Mathematical Monthly*, 106(10):930–942, December 1999.
- [4] Shuichi Tsukuda. 幾何学序論講義ノート. <http://math.u-ryukyu.ac.jp/~tsukuda/lecturenotes/>.
- [5] D. R Woodall. Dividing a cake fairly. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 78(1):233–247, November 1980.