位相空間問題集

琉球大学

2009 年 4 月 21 日

凡例

- $\mathbb{N}$：自然数全体
  $\mathbb{Z}$：整数全体
  $\mathbb{Q}$：有理数全体
  $\mathbb{R}$：実数全体
  $\mathbb{C}$：複素数全体
  これらには, 必要ならば, 特にことわらないかぎり, 通常の加法, 乗法, 距離および（$\mathbb{C}$ を除いては）順序を与えるものとする.
- $\mathbb{R}^n$ の距離あるいは位相は, 特にことわらないかぎり, ユークリッド距離により定まるものとする.
- $A \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} B$ は, 左辺 A を右辺 B で定義することを意味する.

目次

第1章

集合と写像

1.1　集合

【定義 **1.1.1**】　数や物の集まりを集合といい, 集合を構成している各々の数や物を要素または元（げん）という.

a が集合 A の要素であることを記号で $a \in A$（または $A \ni a$）と表し, a は A に属するという. a が A の要素でないときは $a \notin A$ （または $A \not\ni a$）と表す.

【定義 **1.1.2**】　A, B を集合とする. B の要素がすべて A の要素であるとき B は A に含まれる , あるいは A は B を含む といって, $A \supset B$ または $B \subset A$ と表す. このとき B は A の部分集合であるという.

つまり

$$B \subset A \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

【定義 **1.1.3**】　$A \supset B$ かつ $B \supset A$ のとき $A = B$ と定める.

【定義 **1.1.4**】　要素をひとつも持たない集合を空集合といって, 記号 $\emptyset$ で表す.

見直し

【定義 **1.1.5**】　集合を要素とする集合を集合族とよぶ.
I を集合とし, I の各要素 i に対して, ひとつの集合 A_i が対応しているとする. このとき全ての A_i からなる集合族 $\{A_i \mid i \in I\}$ を I で添字付けられた集合族 といい, I をこの集合族の添字集合という. この集合族を $\{A_i\}_{i \in I}$ などと表す.

1.2　集合の演算

【定義 1.2.1】　1. A, B を集合としたとき, A, B の少なくとも一方に属する要素を全部集めたものを A と B の合併集合（または和, 結び）といって, $A \cup B$ で表す.
つまり
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

2. A と B の両方に属する要素を全部集めたものを A と B の共通集合（または積, 交わり）といって, $A \cap B$ で表す.
つまり
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$
$A \cap B = \emptyset$ のとき, A と B は 互いに素という.
3. A に属して, B に属さない要素の全体を A から B を引いた差集合といって, $A - B$ または $A \setminus B$ で表す.
つまり
$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$
4. ある集合 X を固定して, X の部分集合についてのみ考えるとき, $X - A$ を A の（X に関する）補集合といって A^c であらわす. このとき X を全体集合という.
5. $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ を集合 I で添字付けられた集合族とする. このとき少なくともどれかひとつの A_i に属する要素全部を集めたものを $\mathcal{A}$ の合併集合（または和集合）といって $\bigcup_{i \in I} A_i$ または $\cup\{A_i \mid i \in I\}$ あるいは $\cup\mathcal{A}$ 等と表す.
つまり
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I(x \in A_i)\}$$
また, 全ての A_i に属する要素を全部集めたものを $\{A_i \mid i \in I\}$ の共通集合といって $\bigcap_{i \in I} A_i$ または $\cap\{A_i \mid i \in I\}$ あるいは $\cap\mathcal{A}$ 等と表す.
つまり
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I(x \in A_i)\}$$
特に $I = \mathbb{N}$ のとき, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ を $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$ を $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ とも書く.
6. X を集合としたとき, X の部分集合の全てを要素としてもつ集合を X の巾（べき）集合といって $\mathcal{P}(X)$ で表す.
つまり
$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}$$

7. X を集合, $A \subset X$ を X の部分集合とする．次で定義される X 上の関数 χ_A を A の（X 上の）特性関数という．

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A) \end{cases}$$

X 上の特性関数の全体を 2^X で表す．

8. X, Y を空でない集合とするとき, 集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

を X と Y の直積という．

問題

1. 任意の集合 A について, $\emptyset \subset A$ および $A \subset A$ が成り立つことを説明せよ．
2. A, B, C を集合とする．$A \supset B$ かつ $B \supset C$ ならば $A \supset C$ を示せ．
3. 集合 A, B, C に対し次を示せ．
   (1) $A \subset C$ かつ $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$
   (2) $A \supset C$ かつ $B \supset C \Rightarrow A \cap B \subset C$
4. X を全体集合, A, B をその部分集合とする．次を示せ．
   (1) $A - B = A \cap B^c$
   (2) $(A^c)^c = A$
5. X を全体集合, A, B をその部分集合とする．次を示せ．
   (1) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   (2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
6. A, B, C, D を集合とする．次の等式を示せ．

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

7. X を集合とする．X の部分集合 A, B に対して演算 $\cdot$ と $\oplus$ を次のように定義する．

$$A \cdot B = A \cap B, \quad A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

このとき,
   (1) 演算 $\cdot$ および $\oplus$ は交換法則, 結合法則をみたすことを示せ．
   (2) 演算 $\cdot$ に関する単位元は存在するかどうか調べよ．存在するときは, 各元の逆元があるかどうか調べよ．
   (3) 演算 $\oplus$ についても (2) と同じことを調べよ．

(4) 分配法則 $(A \oplus B) \cdot C = A \cdot B \oplus B \cdot C$ が成り立つかどうか調べよ.

8. 次のことを示せ. ただし各 A_i はある全体集合 X の部分集合.

(1)
$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

(2)
$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

9. 次のことを示せ.

(1)
$$A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$$

(2)
$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

10. $\mathbb{R}$ の部分集合 A_n $(n \in \mathbb{N})$ が次で与えられるとき, それぞれについて $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ と $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ.

(1) $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

(2) $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$

(3) $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$

(4) $A_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right]$

(5) $A_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$

(6) $A_n = (-n, n)$

(7) $A_n = [n, \infty)$

11. $x \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathbb{R}$ の部分集合 A_x を $A_x = [0, x)$ により定める. このとき $\bigcap\limits_{x>1} A_x$ を求めよ.

12. 集合 $A_1, A_2, \ldots$ に対して

$$\overline{\lim_{n}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$
$$\underline{\lim_{n}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $\underline{\lim}\, A_n \subset \overline{\lim}\, A_n$ を示せ.

(2) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ のとき $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ であることを示せ.

(3) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ のとき (2) のようなことがいえるかどうか調べよ.

(4)

$$A_n = \begin{cases} \{n, n+1, n+2, \dots\} & n : \text{偶数} \\ \{1, 2, \dots, n\} & n : \text{奇数} \end{cases}$$

であるとき $\overline{\lim}\, A_n$, $\underline{\lim}\, A_n$ を求めよ.

13. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ を示せ.
14. X, Y を集合, $A \subset X$, $B \subset Y$ を部分集合とする. このとき $X \times Y$ において $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$ であることを示せ.

1.3　写像

【定義 1.3.1】　X, Y を集合とする. X の各要素 $x \in X$ に対して Y の要素 y がただひとつ対応するような対応を X から Y への<u>写像</u>という. 対応 f が X から Y への写像であるとき $f\colon X \to Y$ と表す.

より形式的には, X から Y への写像 f とは, 直積 $X \times Y$ の部分集合であって, 任意の $x \in X$ に対し $(x, y) \in f$ となる $y \in Y$ がただひとつ存在するものである. (§1.5 参照)

【定義 1.3.2】　$f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. f により $x \in X$ が $y \in Y$ に対応しているとき y を $f(x)$ で表し, <u>x の f による像</u>という.
2. X の部分集合 A に対して, Y の部分集合

$$\{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$$

を, <u>集合 A の f による像</u> といって $f(A)$ で表す.

3. X を f の<u>定義域</u>, $f(X)$ を f の<u>値域</u>あるいは<u>像</u>という.
4. Y の部分集合 B に対して, $f(x) \in B$ となる $x \in X$ の全体を, <u>f による B の逆像</u>といい, $f^{-1}(B)$ で表す. つまり

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \subset X$$

【定義 1.3.3】　$f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. $f(X) = Y$ であるとき, f は X から Y への<u>上への写像</u>または<u>全射</u>であるという.

つまり

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X,\ f(x) = y$$

2. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つとき, f は1対1または単射であるという.
3. 1 対 1 かつ上への写像であるとき, 全単射であるという.

【定義 1.3.4】 写像 $f\colon X \to Y$ が単射のとき, 各 $y \in f(X)$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ がただひとつ存在する. この x を $f^{-1}(x)$ と書くと f^{-1} は $f(X)$ から X への写像となる. これを f の逆写像という. 特に f が全単射であれば, f^{-1} は Y から x への写像になる.

【定義 1.3.5】 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする. このとき $x \in X$ に対して $g(f(x)) \in Z$ を対応させる写像を f と g の合成 といって, $g \circ f$ で表す.
つまり

$$g \circ f\colon X \to Z$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

【定義 1.3.6】 集合 X の各要素をそれ自身にうつす X から X への写像を X の恒等写像という. 恒等写像を Id_X や 1_X といった記号で表すことが多い. つまり

$$\mathrm{Id}_X\colon X \to X$$
$$\mathrm{Id}_X(x) = x$$

見直し

【定義 1.3.7】 X を集合, $A \subset X$ を部分集合とする. A の要素 $a \in A$ を X の要素 $a \in X$ と見ることにより得られる A から X への写像を包含写像という.
つまり $i\colon A \to X$ を包含写像とすると $i(a) = a$.
また, $i\colon A \to X$ が包含写像であるとき, $i\colon A \hookrightarrow X$ と書くこともある.

【定義 1.3.8】 集合 X, Y に対し, X から Y への写像全体のなす集合を Y^X と表す.
つまり

$$Y^X = \bigl\{ f \bigm| f \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への写像 } f\colon X \to Y \bigr\}$$

問題

15. $n \in \mathbb{N}$ に対して n の約数の個数 $d(n)$ を対応させる写像 $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ について次の問に答えよ.

(1) $d^{-1}(\{2\})$ はどんな集合か.

(2) $d^{-1}(\{3\})$ はどんな集合か.

(3) $d^{-1}(\{4\})$ はどんな集合か.

(4) d は 1 対 1 か. また上への写像か.

16. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする. A_1, A_2 を X の, B_1, B_2 を Y の部分集合とするとき次を示せ.

(1) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

(2) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

また次の等式が成り立つかどうかを調べ, 成り立つときには証明し, 成り立たないときには反例を挙げよ.

(3) $F(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(4) $F(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

(5) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(6) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(7) f が単射のときの (3)〜(6)

(8) f が全射のときの (3)〜(6)

17. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像, A を X の, B を Y の部分集合とするとき次の等式が成り立つかどうか調べよ. 等式が成り立たない場合, いずれかの包含関係が成り立つならばそれを示せ.

(1) $A = f^{-1}(f(A))$

(2) $B = f(f^{-1}(B))$

18. X, Y, Z を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする. このとき次を示せ.

(1) f, g がともに全単射ならば $g \circ f$ も全単射であり, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ である.

(2) $g \circ f$ が全射ならば g も全射である.
このときさらに g が単射であれば f は全射である.

(3) $g \circ f$ が単射ならば f も単射である.
このときさらに f が全射であれば g は単射である.

19. $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ とする. $x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = x^2$ という対応を考える. f を以下のような写像と考えたとき, それぞれ（イ）単射かどうか, （ロ）全射かどうか, を答えよ. また単射の場合は逆写像を求めよ.

(1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

(3) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$

(4) $f\colon \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

20. $n \in \mathbb{N}$ とする．$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ のとき $\mathcal{P}(X)$ の個数および 2^X の個数を求めよ．
21. X を集合とする．写像 $\chi \colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ を $\chi(A) = \chi_A$ で定める．χ は全単射であることを示せ．また, χ の逆写像はどのようなものか．
22. X を全体集合とする．部分集合 $A, B \subset X$ の特性関数を a, b とするとき, 次のことを示せ．
    (1) $A \subset B \Leftrightarrow a(x) \leq b(x) \ \forall x \in X$
    (2) $A \cap B$ の特性関数を c とすると, $c(x) = \min\{a(x), b(x)\} = a(x)b(x)$
    (3) $A \cup B$ および A^c の特性関数を a, b で表せ．
    (4) $A \triangle B$ の特性関数を a, b で表せ．
    ただし $A \triangle B$ は
    $$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$
    により与えられる集合で A と B の<u>対称差</u>と呼ばれる．
23. $n \in \mathbb{N}$ とする．$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ のとき次のものを求めよ．
    (1) X から X への写像の個数
    (2) X から X への単射の個数
    (3) X から X への全射の個数
24. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とするとき, 次のものの個数を求めよ．
    (1) X から Y への写像
    (2) X から Y への全射
    (3) X から Y への単射
    (4) Y から X への写像
    (5) Y から X への全射
    (6) Y から X への単射
25. 写像 $\pi \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\pi(x, y) = x$ により定める．このとき $\pi^{-1}([0, 1])$ を図示せよ．
26. 関数 $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin x$ により定める．このとき $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ を求めよ．
27. $\mathbb{N}$ から集合 $\{0, 1\}$ への写像全体 $F = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ を考える．各 $n \in \mathbb{N}$ と $i \in \{0, 1\}$ に対し, F の部分集合 $C(n, i)$ を $C(n, i) = \{f \in F \mid f(n) = i\}$ により定める．また F の部分集合からなる集合 $\mathcal{E}$ を
    $$\mathcal{E} = \left\{A \;\middle|\; A \subset F,\ A \text{ は, 有限個の } C(n_1, i_i), \ldots, C(n_k, i_k) \text{ の積集合として表せる.}\right\}$$
    により定める．このとき次のことは成り立つか．
    (1) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{E}$
    (2) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c \in \mathcal{E}$
    (3) $A, B \in \mathcal{E} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{E}$

(4) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$

1.4　直積, 直和

【定義 1.4.1】 $\{X_i \mid i \in I\}$ を I で添字付けられた集合族とする. I から $\cup\{X_i \mid i \in I\}$ への写像 f であって $\forall i \in I(f(i) \in X_i)$ となるものの全体を $\{X_i \mid i \in I\}$ の直積といい, $\prod_{i \in I} X_i$ と書く. 直積の元 f を $(x_i : i \in I)$ という記号で表す. ただし $x_i = f(i)$ である.

$$\begin{aligned}\prod_{i \in I} X_i &= \left\{ f \,\middle|\, f \in (\cup_{i \in I} X_i)^I, \forall i \in I(f(i) \in X_i) \right\} \\ &= \{(x_i : i \in I) \mid \forall i \in I,\ x_i \in X_i\}\end{aligned}$$

特に $I = \{1, 2, \dots, n\}$ や $I = \mathbb{N}$ のとき, $\prod_{i \in I} X_i$ を $\prod_{i=1}^{n} X_i$ や $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ とも書く.

【定義 1.4.2】 集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ に対し, 直積 $I \times \bigcup_i X_i$ の部分集合 $\coprod_{i \in I} X_i$ を以下で定め, 集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ の直和または非交和という.

$$\coprod_{i \in I} X_i = \{(i, x) \mid i \in I,\ x \in X_i\} \subset I \times \bigcup_{i \in I} X_i$$

特にふたつの集合 A, B の非交和を $A \coprod B$ とかく. (形式的には, A, B ふたつの集合からなる集合 (族) を $I = \{A, B\}$ とし, $\{A, B\}$ を I (つまりそれ自身) で添字付けられた集合族と考える.)

問題

28. 直積 $\prod_{i=1}^{2} X_i$ から $X_1 \times X_2$(定義 1.2.1 8) への写像 $\varphi\colon \prod_{i=1}^{2} X_i \to X_1 \times X_2$ を $\varphi(f) = (f(1), f(2))$ で定める. f は全単射であることを示せ.
29. 集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ に対し, 直和 $\coprod_{i \in I} X_i$ から和集合 $\bigcup_{i \in I} X_i$ への写像 $\pi\colon \coprod_{i \in I} X_i \to \bigcup_{i \in I} X_i$ を $\pi(i, x) = x$ で定める. π は全射であることを示せ.
さらに, 任意の $i, j \in I$ $(i \neq j)$ に対し $X_i \cap X_j = \emptyset$ であれば, π は全単射であることを示せ.

1.5　関係

【定義 1.5.1】 X, Y を集合とする. 直積集合 $X \times Y$ の部分集合を X と Y の間の関係または X から Y への対応という.

特に $X = Y$ であるとき X 上の関係 という.

R を X と Y の間の関係, すなわち $R \subset X \times Y$ とする. X の要素 $x \in X$ と Y の要素 $y \in Y$ について, $(x, y) \in R$ であるとき xRy と書く.

見直し

何か問題を加える

1.6　同値関係

【定義 1.6.1】　集合 X 上の関係 $\sim$（つまり $\sim \subset X \times X$）が次の 3 つの条件:

(i)（反射律）　$x \sim x$

(ii)（対称律）　$x \sim y \Rightarrow y \sim x$

(iii)（推移律）　$x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

を満たすとき, 関係 $\sim$ は集合 X 上の同値関係 であるという.

【定義 1.6.2】　関係 $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする. X の要素 $a \in X$ に対し, a と同値な要素全体のなす X の部分集合

$$C_a = \{x \mid x \in X,\ x \sim a\} \subset X$$

を a の同値類という. 同値類は次の性質をもつ（問題 30 参照）:

(i) $a \in C_a$

(ii) $a \sim b \Rightarrow C_a = C_b$

(iii) $a \not\sim b \Rightarrow C_a \cap C_b = \emptyset$

したがって, 同値類の全体のなす集合 $\{C_a \mid a \in X\}$ は X を互いに素な部分集合に, 余すところなく分割する. この分割を同値関係 $\sim$ による X の類別という.

同値類の全体 $\{C_a \mid a \in X\}$ を $X/\sim$ と書き, 同値関係 $\sim$ による X の商集合という.

また $a \in X$ を $C_a \in X/\sim$ にうつす写像

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X/\sim \\ \cup & & \cup \\ a & \longmapsto & C_a \end{array}$$

を自然な写像 あるいは商写像, 自然な射影などという.

問題

30. 集合 X 上の同値関係 $\sim$ による $a \in X$ の同値類を C_a で表すとき, 次のことが成り立つことを示せ.
    (1) $a \in C_a$
    (2) $a \sim b \Rightarrow C_a = C_b$
    (3) $a \not\sim b \Rightarrow C_a \cap C_b = \emptyset$
31. $n \in \mathbb{N}$ とする. $a, b \in \mathbb{Z}$ に対し, $a - b$ が n で割り切れるとき $a \equiv b \pmod n$ と記す. この関係 $\equiv$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ. また, この関係による $\mathbb{Z}$ の商集合はどのような集合か.
32. 平面上の図形に関する次の各関係は同値関係であることを示せ.
    (1) ふたつの三角形が合同（$\equiv$）である.
    (2) ふたつの三角形が相似（$\propto$）である.
    (3) ふたつの三角形の面積が等しい（$=$）.
    (4) ふたつの直線が平行（$/\!/$）である（ただし二直線が一致する場合も平行であるとみなす）.
33. $\mathbb{R}$ において, $x \sim y \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}$ により関係 $\sim$ を定めると, これは同値関係であることを示せ.
34. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ において, $(l, m) \sim (p, q) \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} l + q = m + p$ により関係 $\sim$ を定めると, これは同値関係であることを示せ. また, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ はどのような集合か.
35. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする. X における関係 $\sim$ を $x \sim y \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} f(x) = f(y)$ により定めると, これは同値関係であることを示せ.
    X のこの関係 $\sim$ による商集合を $\overline{X}$ とする： $\overline{X} = X/\sim$. $\pi\colon X \to \overline{X}$ を自然な写像, すなわち $x \in X$ に, x を含む同値類 $C_x \in \overline{X}$ を対応させる写像とする. このとき, π は全射であることを示せ. また, 単射 $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ が存在して, $f = \overline{f} \circ \pi$ と表されることを示せ.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\
\overline{X} \arrow[ur, dotted, "\exists \overline{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

見直し

ちょっと難しいか

36. X を平面上の三角形全体の集合とする．問題 32 (1) の記号で，$X/\equiv$ はどのような集合か．
37. X を平面上の三角形全体の集合とする．問題 32 (2) の記号で，$X/\propto$ はどのような集合か．

38. X を平面上の三角形全体の集合とする．問題 32 (3) の記号で，$X/=$ はどのような集合か．
39. Y を平面上の直線全体の集合とする．問題 32 (4) の記号で，$Y/\mathbin{/\!/}$ はどのような集合か．
40. 問題 33 で定めた $\mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を考えると，各実数 x は区間 $[0,1)$ 内のひとつの実数と同値であり，また，$[0,1)$ 内の相異なるふたつの実数は同値でない．さらに $0 \sim 1$ であるから，$\mathbb{R}/\sim$ は，周の長さが 1 の円周とみなすことができる．
このことにならって，$\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ における次の同値関係による商集合はどう考えればよいかを調べよ．
(1) $(x,y) \sim (z,w) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x-y \in \mathbb{Z}$ かつ $y=w$
(2) $(x,y) \simeq (z,w) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x-y \in \mathbb{Z}$ かつ $y-w \in \mathbb{Z}$
41. E を集合とする．E の巾集合 $\mathcal{P}(E)$ における関係 $\sim$ を，$A \sim B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \triangle B$ が有限集合，により定める．ここで $A \triangle B$ は A と B の対称差（問題 22 (4) 参照）である．また，空集合 $\emptyset$ は有限集合である（定義 1.8.2 参照）．このとき，次の問に答えよ．
(1) $\sim$ は同値関係であることを示せ．
(2) 空集合 $\emptyset$ と同値な集合は何か．
42. $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ において，関係 $\sim$ を $(m,n) \sim (p,q) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} mq = np$ により定める．このとき，次の問に答えよ．
(1) 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ．
(2) この関係 $\sim$ による商集合を $E = \mathbb{N}^2/\sim$ とし，$\pi\colon \mathbb{N}^2 \to E$ を商写像とするとき，$\pi(m,n) \ominus \pi(p,q) = \pi(mp,nq)$ によって，E における演算（すなわち，写像 $E\times E \to E$）が定められることを示せ．
注．このためには，$\ominus$ が welldefined であることを示す必要がある．すなわち，$\pi(m,n) = \pi(m',n')$，$\pi(p,q) = \pi(p',q')$ のとき $\pi(m,n) \ominus \pi(p,q) = \pi(m',n') \ominus \pi(p',q')$ であることを示さなくてはならない．
(3) 写像 $f\colon \mathbb{N} \to E$ を，$f(n) = \pi(n,1)$ によって定めると，f は単射であり，$f(mn) = f(m) \ominus f(n)$ であることを示せ．
(4) $(m,n),(p,q) \in \mathbb{N}^2$ とする．等式 $\pi(m,n) \ominus x = \pi(p,q)$ をみたすような元

$x \in E$ を求めよ.

43. X を集合とし, S を X 上の関係, すなわち部分集合 $S \subset X \times X$ とする.
    (1) $R_0 = X \times X$ を X 上の関係とみると, これは同値関係であることを示せ. また, $x, y \in X$ が xR_0y であるのはどのようなときか.
    (2) X 上の関係 R_S を
    $$R_S = \bigcap_{\substack{S \subset R \subset X \times X \\ R\ \text{は同値関係}}} R$$
    により定める. このとき R_S は X 上の同値関係であることを示せ. この同値関係をS の生成する同値関係という.
    (3) 関係 $\sim$ を X 上の同値関係で, 任意の $x, y \in X$ について $xSy \Rightarrow x \sim y$ であるものとする. このとき, $x \in X$ の $\sim$ による同値類を $C_x^{\sim}$, R_S による同値類を C_x^S とすると, $C_x^S \subset C_x^{\sim}$ であることを示せ.

1.7　順序関係

【定義 1.7.1】　集合 X 上の関係 $\leq$ が次の 3 つの条件:

(i)（反射律）　$x \leq x$
(ii)（反対称律）　$x \leq y$ かつ $y \leq x \Rightarrow x = y$
(iii)（推移律）　$x \leq y$ かつ $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

を満たすとき, 関係 $\leq$ は集合 X 上の順序関係 または半順序関係
　であるという. またこのとき X を順序集合または半順序集合という.
　順序集合 X のふたつの要素 x, y が $x \leq y$ か $y \leq x$ の少なくとも一方をみたしているとき, x と y は比較可能であるという. X の任意のふたつの要素が比較可能であるとき, この順序を全順序 または線形順序
　といい, X を全順序集合という.

【定義 1.7.2】　X を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. X の要素 $x \in X$ が A の上界である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対し $a \leq x$ である.
2. X の要素 $x \in X$ が A の下界である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対し $x \leq a$ である.
3. A が上界をもつとき, A は上に有界 であるという.
   A が下界をもつとき, A は下に有界 であるという.
4. A の要素 M で, A の上界であるものが存在するとき, M を A の最大元という. 最大元は存在すればただひとつであるので, それを $\max A$ と書く.

5. A の要素 m で, A の下界であるものが存在するとき, m を A の<u>最小元</u>という．最小元は存在すればただひとつであるので, それを $\min A$ と書く.
6. A の上界全体のなす集合に最小元が存在するとき, それを A の<u>上限</u>または<u>最小上界</u>といって $\sup A$ で表す.
7. A の下界全体のなす集合に最大元が存在するとき, それを A の<u>下限</u>または<u>最大下界</u>といって $\inf A$ で表す.
8. $M \in A$ とする．$M \leq a$ かつ $M \neq a$ となる A の要素 $a \in A$ が存在しないとき,（つまり, M より大きい要素が A の中にないとき）M を A の<u>極大元</u>という.
9. $m \in A$ とする．$a \leq m$ かつ $m \neq a$ となる A の要素 $a \in A$ が存在しないとき,（つまり, m より小さい要素が A の中にないとき）m を A の<u>極小元</u>という.

問題

44. $\mathbb{N}$ において, m が n の約数であることを $m|n$ で表すとき, この関係 $|$ は順序であることを示せ.
45. X を集合とする．巾集合 $\mathcal{P}(X)$ において, 包含関係 $\subset$ は順序であるが, 線形順序ではないことを示せ.
46. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ とする．$a, b \in X$ に対し, $a \leq b \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a$ が b の約数と定義したとき, この順序に関して, 次のものを求めよ.
    (1) X の最大元と最小元
    (2) X の極大元と極小元
    (3) $\sup X$ と $\inf X$
    (4) $A = \{1, 2, 3\} \subset X$ のとき, $\sup A$ と $\inf A$
    (5) $A = \{6, 7, 8\} \subset X$ のとき, $\sup A$ と $\inf A$
47. X を空でない集合とする．$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ が次の 3 つの条件をみたしているとする.
    (i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$
    (ii) $A \in \mathcal{F}$ かつ $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$
    (iii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
    (このとき $\mathcal{F}$ は X 上の<u>フィルター</u>であるという.)
    X から $\mathbb{R}$ への写像全体のなす集合 $\mathbb{R}^X$ における関係 $\underset{\mathcal{F}}{\sim}$ を以下のように定める.

$$f \underset{\mathcal{F}}{\sim} g \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}$$

    (1) $\underset{\mathcal{F}}{\sim}$ は同値関係であることを示せ.
    $\mathbb{R}^X$ を同値関係 $\underset{\mathcal{F}}{\sim}$ で類別し, $f \in \mathbb{R}^X$ の同値類を C_f で表す．C_f, C_g の間に関係 $\leq$

を以下のように定める．

$$C_f \leq C_g \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{F}$$

(2) この関係 $\leq$ が welldefined であることを示せ．

(3) この関係 $\leq$ は $\mathbb{R}^X/\underset{\mathcal{F}}{\sim}$ 上の順序関係であることを示せ．

(4) この順序 $\leq$ が線形順序かどうかを調べよ．

1.8　集合の濃度

【定義 1.8.1】 ふたつの集合 A と B の間に全単射が存在するとき，A と B は<u>対等</u>であるといい，$A \sim B$ で表す．このとき A と B は同じ<u>濃度</u>あるいは同じ<u>基数</u>をもつという．A の濃度を $\sharp A$ や $|A|$ で表す．

【定義 1.8.2】 n を自然数とする．集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ と対等な集合の濃度は n と定義する．また空集合 $\emptyset$ の濃度は 0 と定める．濃度が n または 0 である集合を<u>有限集合</u>という．有限集合でない集合を<u>無限集合</u>という．

【定義 1.8.3】 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と対等な集合を<u>可算集合</u>という．可算集合の濃度を<u>$\aleph_0$（アレフゼロ）</u>で表す．有限集合と可算集合を総称して<u>たかだか可算</u>な集合という．

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は可算ではない．$\mathbb{R}$ の濃度を<u>連続体の濃度</u> という．

【定義 1.8.4】 α と β を与えられた濃度とする．A, B を $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$ であるような集合とすると，集合 $A \coprod B$, $A \times B$, A^B の濃度は A, B の選び方によらず α, β のみにより定まる．そこで α と β の和 $\alpha + \beta$，積 $\alpha\beta$，巾 α^β を次のように定義する．

1. $\alpha + \beta = |A \coprod B|$
2. $\alpha\beta = |A \times B|$
3. $\alpha^\beta = |A^B|$

【定義 1.8.5】 A, B を集合とする．A が B のある部分集合と対等であるとき，$|A| \leq |B|$ とかく．$|A| \leq |B|$ かつ $|A| \neq |B|$ であるとき，$|A| < |B|$ とかいて，$|A|$ は $|B|$ より<u>小さい</u>あるいは $|B|$ は $|A|$ より<u>大きい</u>という．

【Cantor の定理】 $|X| < \mathcal{P}(X)$（あるいは $|X| < 2^{|X|}$）

【Bernstein の定理】 $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ ならば $|X| = |Y|$

【濃度比較可能定理】 任意の濃度 α, β に対して，$\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ のいずれかひとつが成立する．

問題

48. Cantor の定理を以下のように証明せよ.
 X を与えられた集合とする.
 (1) $|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$ を示せ.
 次に, $|X| = |\mathcal{P}(X)|$ と仮定すると, 定義から, 全単射 $f\colon X \to \mathcal{P}(X)$ が存在する. この f を用いて
 $$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$$
 とおく.
 (2) 集合 A を用いて矛盾を導け.
49. 次を示せ.
 (1) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
 (2) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
 (3) $\aleph_0^n = \aleph_0$
 (4) $\aleph_0^{\aleph_0} \neq \aleph_0$
50. 集合の濃度に関しての不等式 $|A| \leq |B|$ は順序関係の条件をみたすことを示せ.
51. 可算個の可算集合 $A_1, A_2, \ldots,$ の和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は可算であることを示せ.
52. (1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ と $\mathbb{N}$ の濃度は等しいことを示せ.
 (2) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}$ の濃度は等しいことを示せ.
 (3) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の濃度は等しいことを示せ.
53. (1) $\mathbb{R}$ から $\{0, 1\}$ への写像全体の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度より大きいことを示せ.
 (2) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数全体の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度より大きいことを示せ.
54. $\mathbb{R}$ 上の互いに交わらない区間（ただし 1 点でも空でもないとする）は, どううまくとっても高々可算個しかとれないことを示せ.
55. X を平面上の円盤全体の集合とする.
 (1) X の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度と等しいことを示せ.
 (2) Y を X の部分集合で, 任意の $D_1, D_2 \in Y$ に対し, $D_1 \neq D_2 \Rightarrow D_1 \cap D_2 = \emptyset$ となっているものとする. このとき, Y の濃度は高々可算であることを示せ.
56. $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数全体の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度と等しいことを示せ.
57. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数全体の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度と等しいことを示せ.

1.9　選択公理, Zorn の補題, 整列可能定理

【選択公理】 $\{X_i\}_{i\in I}$ を集合 I で添字付けられた集合族で, 任意の $i \in I$ について $X_i \neq \emptyset$ とする. このとき, 各 $i \in I$ に対し X_i の要素を選んで対応させる写像が存在する. つまり, 写像 $\varphi\colon I \to \bigcup\limits_{i\in I} X_i$ で, 任意の $i \in I$ に対し $\varphi(i) \in X_i$ となるものが存在する. このことは $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ とも表せる.

【定義 **1.9.1**】 X を順序集合とする. X の任意の全順序部分集合（すなわち X の部分集合で全順序部分集合になっているもの）が上界をもつとき, X を帰納的順序集合という

【**Zorn** の補題】 帰納的順序集合は少なくともひとつの極大元をもつ.

【定義 **1.9.2**】 集合 X が整列集合であるとは, X が全順序集合であり, X の空でない任意の部分集合が最小限をもつことである.

【整列可能定理】 任意の集合は, うまく順序を定義してやることで整列集合にすることができる.

【定理 **1.9.3**】 選択公理, Zorn の補題および整列可能定理は互いに同値である.

問題

58. X を無限集合とする. このとき次のことを示せ.
    (1) $a \in X$ を固定する. $\mathcal{F}_a = \{A \mid A \subset X,\ a \in X\}$ とおくと, $\mathcal{F}_a$ は X 上の極大なフィルターであることを示せ. ただしフィルターの間の順序は, $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ により定める. また, フィルターの定義は問 47 参照.
    (2) $\mathcal{F}_0 = \left\{A \,\middle|\, A \subset X,\ A^c\text{は有限集合}\right\}$ とおくと, $\mathcal{F}_0$ はフィルターであることを示せ. また, 極大フィルターではないことを示せ.
    (ヒント：B も B^c も $\mathcal{F}_0$ に属さない集合を考えて, $\mathcal{G} = \{A \mid A \subset X,\ B \cup A \in \mathcal{F}_0\}$ を考える.)
    (3) $\mathcal{F}_0$ を含む極大フィルターが存在することを Zorn の補題により証明せよ.
59. $\mathbb{R}$ の部分集合 H で, 次の条件をみたすものが存在することを示せ.
    条件： 任意の $r \in \mathbb{R}$ は, 有限個の $h_1, \ldots h_n \in H$ と, 有限個の $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ を用いて,
    $$r = q_1 h_1 + \cdots + q_n h_n$$
    とただひととおりに表せる.
    (ヒント：$\mathbb{R}$ の部分集合で, $\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合の全体を考え, Zorn の補題を使う. ここに, $A \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立とは, 有限個の $a_1, \ldots, a_n \in A$ を任意にとるとこれ

らが $\mathbb{Q}$ 上一次独立である, すなわち, $q_1 a_1 + \cdots + q_n a_n = 0$ となる $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ は $q_1 = \cdots = q_n = 0$ しかないことをいう.)

1.10　実数の上限, 下限, 上極限, 下極限

【Weierstrass の定理】　実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に数の大小関係による順序を与えて順序集合とみる. このとき, $\mathbb{R}$ の空でない任意の部分集合は, 上に（下に）有界ならば, その上限（下限）が存在する.

【定理 1.10.1】　集合 $\overline{\mathbb{R}}$ を, $\mathbb{R}$ に 2 点 $\{+\infty, -\infty\}$ をつけ加えた集合とする. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $-\infty < x < +\infty$ と定めると, $\mathbb{R}$ の順序とあわせて, $\overline{\mathbb{R}}$ は順序集合になる.

$\overline{\mathbb{R}}$ においては, Weierstrass の定理が, 空集合や有界でない集合に対しても成り立つ. つまり, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ が上に有界でなければ $\sup A = +\infty$ といった具合である.

【定義 1.10.2】　$\{a_n\}$ を実数列とする.

数列 $\{\overline{a}_n\}$ を $\overline{a}_n = \sup\{a_i \mid i \geq n\}$ により定める. この数列の下限 $\inf\{\overline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を, もとの数列 $\{a_n\}$ の<u>上極限</u> といい, $\limsup a_n$ で表す.

つまり,

$$\limsup a_n = \inf\{\overline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf_n \left(\sup_{i \geq n} a_i \right)$$

同様に数列 $\{\underline{a}_n\}$ を $\underline{a}_n = \inf\{a_i \mid i \geq n\}$ により定める. この数列の上限 $\sup\{\underline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を, もとの数列 $\{a_n\}$ の<u>下極限</u> といい, $\liminf a_n$ で表す.

つまり,

$$\liminf a_n = \sup\{\underline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup_n \left(\inf_{i \geq n} a_i \right)$$

問題

60. $A \subset \mathbb{R}$ が次の集合のとき, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$ を求めよ.
    (1) $A = (0, 1)$
    (2) $A = [0, 1)$
    (3) $A = \left\{ \frac{n+1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots \right\}$
    (4) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \ldots \right\} \cup \{n \mid n = 1, 2, \ldots\}$
    (5) $A = \{\sin n \mid n = 1, 2, \ldots\}$
61. $A \subset \mathbb{R}$ とする. 次を示せ.
    (1) $\sup A \leq b \Leftrightarrow \forall a \in A,\ b \geq a$
    (2) $\sup A \geq b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ b - \varepsilon < a$

(3) $\inf A \geq b \Leftrightarrow \forall a \in A,\ b \leq a$

(4) $\inf A \leq b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ b + \varepsilon > a$

62. A, B を上に有界な実数の集合とし, $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$ とする. このとき次のことを示せ.

(1) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$

(2) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

63. 有界な実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\overline{a}_n = \sup\{a_i \mid i \geq n\}$, $\underline{a}_n = \inf\{a_i \mid i \geq n\}$ とおくと, 数列 $\{\overline{a}_n\}$ は単調増加, $\{\underline{a}_n\}$ は単調減少となることを示せ.

64. 実数列 $\{a_n\}$ について次の問に答えよ. ただし $b \in \mathbb{R}$ とする.

(1) 次を示せ.

$\limsup a_n = b$

$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次の i, ii が成り立つ.

i. ある番号 n_0 から先の i では $a_i < b + \varepsilon$ である

ii. 無限個の番号 i に対して $a_i > b - \varepsilon$ である

(2) 次の□の中を埋めて正しい命題にせよ.

$\liminf a_n = b$

$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次の i, ii が成り立つ.

i. ある番号 n_0 から先の i では $\boxed{}$ である

ii. 無限個の番号 i に対して $\boxed{}$ である

65. 実数列 $\{a_n\}$ について, $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ を示せ.

66. 実数列 $\{a_n\}$ について,

$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する $\Leftrightarrow \liminf a_n = \limsup a_n$

であることを示せ. またこのとき,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$

であることを示せ.

67. 次で与えられる数列 $\{a_n\}$ の上極限と下極限を求めよ.

(1) $a_n = (-1)^n$

(2) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot (-1)^n$

(3) $a_n = \sin \frac{n}{3}\pi$

(4) $a_n = \left(\frac{1}{2} + (-1)^n\right)^n$

(5) $a_n = \sin n$

68. 実数列 $\{a_n\}$ について, $\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n$, $\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$ を示せ. ただし $\underline{a}_n, \overline{a}_n$ は問 63 で定めたものである.

69. 実数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ および $p \in \mathbb{R}$ について以下のことを示せ.

(1) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$

(2) $\forall n,\ a_n \leq b_n \Rightarrow \limsup a_n \leq \limsup b_n$ かつ $\liminf a_n \leq \liminf b_n$

(3) $p > 0$ ならば, $\limsup pa_n = p \limsup a_n$ かつ $\liminf pa_n = p \liminf a_n$

(4) $p < 0$ ならば, $\limsup pa_n = p \liminf a_n$ かつ $\liminf pa_n = p \limsup a_n$

70. 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について以下の不等式を示せ．また, 等号が成立しない例を挙げよ．

(1) $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$

(2) $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$

以下 $a_n > 0$, $b_n > 0$ とする．

(3) $\limsup(a_n b_n) \leq (\limsup a_n)(\limsup b_n)$

(4) $\liminf(a_n b_n) \geq (\liminf a_n)(\liminf b_n)$

71. 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について, $\{a_n\}$ が収束列であるとき次の等式を示せ．

(1) $\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + \limsup b_n$

(2) $a_n > 0$, $b_n > 0$ のとき,
$\limsup(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \limsup b_n$

72. $a_n > 0$ である実数列 $\{a_n\}$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ について, 次を示せ．

(1) $\limsup \frac{a_n}{a_{n-1}} < \alpha$ とすると, ある番号 n_0 があって, $n > n_0$ に対し $a_n < \alpha^{n-n_0} a_{n_0}$ となる．

(2) $\limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_n}{a_{n-1}}$

(3) $\liminf \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n}$

1.11　追加

問題

73. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする．

(1) f は全単射 $\Leftrightarrow \exists g\colon Y \to X,\ g \circ f = 1_X,\ f \circ g = 1_Y$

(2) f は単射

$\Leftrightarrow$

$f \circ u = f \circ v \Rightarrow u = v \quad (\forall Z, \forall u, v\colon Z \to X)$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

(3) f は全射

$\Leftrightarrow$

$u \circ f = v \circ f \Rightarrow u = v \ \ (\forall Z, \forall u, v \colon Y \to Z)$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & Z \end{tikzcd}$$

74. $\{X_i \mid i \in I\}$ を集合 I で添字付けられた集合族とする.
   (1) 各 $j \in I$ に対し, 写像 $p_j \colon \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ を $p((x_i)) = x_j$ により定める.（これを標準的射影という.）A を集合とし, 各 $i \in I$ に対し写像 $f_i \colon A \to X_i$ が与えられているとする. このとき, 写像 $f \colon A \to \prod_{i \in I} X_i$ で, 全ての $i \in I$ に対し $p_i \circ f = f_i$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.
   (2) 各 $j \in I$ に対し, 写像 $\iota_j \colon X_j \to \coprod_{i \in I} X_i$ を $\iota_j(x) = (j, x)$ により定める.（これを標準的包含という.）A を集合とし, 各 $i \in I$ に対し写像 $f_i \colon X_i \to A$ が与えられているとする. このとき, 写像 $f \colon \coprod_{i \in I} X_i \to A$ で, 全ての $i \in I$ に対し $\iota_i \circ f = f_i$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \prod_{i \in I} X_i \arrow[dl, "p_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & & \coprod_{i \in I} X_i \arrow[ll, dotted, "f"'] \\ & X_i \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "\iota_i"'] & \end{tikzcd}$$

75. X, Y, Z を集合, $f \colon X \to Z$, $g \colon Y \to Z$ を写像とする. 以下で定義される $X \times Y$ の部分集合
$$X \times_Z Y = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \subset X \times Y$$
を X と Y の Z 上のファイバー積という. 写像 $g' \colon X \times_Z Y \to X$, $f' \colon X \times_Z Y \to Y$ をそれぞれ $g'(x, y) = x$, $f'(x, y) = y$ により定める. 次の問に答えよ.
   (1) $f \circ g' = g \circ f'$ を示せ.
   (2) A を集合, $u \colon A \to X$, $v \colon A \to Y$ を写像で $f \circ u = g \circ v$ をみたすものとする. このとき, 写像 $h \colon A \to X \times_Z Y$ で $u = g' \circ h$, $v = f' \circ h$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.
   (3) f が単射ならば, f' も単射であることを示せ.
   (4) f が上への写像ならば, f' もそうであることを示せ.
   (5) Y が Z の部分集合で, $g \colon Y \hookrightarrow Z$ が包含写像であるとする. このとき, 全単射 $h \colon f^{-1}(Y) \to X \times_Z Y$ で $g' \circ h \colon f^{-1}(Y) \to X$ が包含写像, $f' \circ h \colon f^{-1}(Y) \to Y$ が f の $f^{-1}(Y)$ への制限となっているものがただひとつ存在することを示せ.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

76. X, Y, Z を集合, $f\colon Z \to X$, $g\colon Z \to Y$ を写像とする. 標準的包含により X, Y を $X \coprod Y$ の部分集合とみなす. $X \coprod Y$ における関係

$$R = \{(f(z), g(z)) \mid z \in Z\}$$

の生成する同値関係を考え, これによる $X \coprod Y$ の商集合を $X \coprod_Z Y$ で表し, X と Y の Z による<u>融合和</u>という. 写像 $g'\colon X \to X \coprod_Z Y$, $f'\colon Y \to X \coprod_Z Y$ を標準的包含と自然な射影の合成とする. 次の問に答えよ.

(1) $g' \circ f = f' \circ g$ を示せ.

(2) A を集合, $u\colon X \to A$, $v\colon Y \to A$ を写像で $u \circ f = v \circ g$ をみたすものとする. このとき, 写像 $h\colon X \coprod_Z Y \to A$ で, $u = h \circ g'$, $v = h \circ f'$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.

(3) E を集合とする. $X, Y \subset E$, $Z = X \cap Y$ で, $f\colon Z \to X$, $g\colon Z \to Y$ が包含写像であるとき, $X \coprod_Z Y$ は自然に $X \cup Y$ と同一視できることを示せ.
「自然に」とはどういうことだろうか.

$$\begin{tikzcd}
A & & \\
& X \coprod_Z Y \arrow[ul, dotted, "h"'] & X \arrow[l, "g'"] \arrow[ull, bend right, "u"'] \\
& Y \arrow[u, "f'"'] \arrow[uul, bend left, "v"] & Z \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

77. X, Y を集合, $f, g\colon X \to Y$ を写像とする.

(1) X の部分集合 K を

$$K = \{x \mid f(x) = g(x)\} \subset X$$

により定め, $k\colon K \hookrightarrow X$ を包含写像とする.
A を集合, $u\colon A \to X$ を写像で, $f \circ u = g \circ u$ をみたすものとする. このとき, 写像 $h\colon A \to K$ で $u = k \circ h$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.

(2) $Y \times Y$ の部分集合

$$\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\} \subset Y \times Y$$

の生成する同値関係による Y の商集合を C とし, $q\colon Y \to C$ を商写像とする. A を集合, $u\colon Y \to A$ を写像で, $u \circ f = u \circ g$ をみたすものとする. このとき, 写像 $h\colon C \to A$ で $u = h \circ q$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ & A \arrow[u, "u"'] \arrow[ul, dotted, "h"] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

第 2 章

距離空間

2.1 距離空間

【定義 **2.1.1**】 X を集合とする．$X \times X$ 上定義された実数値関数

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

が次の 3 つの条件をみたすとき X 上の距離関数という．

(i) (1) 任意の $x, y \in X$ について $d(x, y) \geq 0$
(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(ii) 任意の $x, y \in X$ について $d(x, y) = d(y, x)$
(iii) (三角不等式) 任意の $x, y, z \in X$ について $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

集合 X とその上の距離関数 d が与えられたとき，組 (X, d) を距離空間という．また $x, y \in X$ に対し実数 $d(x, y)$ を x と y の距離という．

【定義 **2.1.2**】 (X, d) を距離空間とする．

1. 点 $x \in X$ と $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対し，集合 $U(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \subset X$ を点 x のε 近傍 という．
2. $O \subset X$ が X の開集合 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in O$ に対し $\exists \varepsilon > 0, U(x, \varepsilon) \subset O$
3. $F \subset X$ が X の閉集合 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} F^c$ が X の開集合.
4. $U \subset X$ が点 x の近傍 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in O \subset U$ となる開集合 O が存在する．
5. 点 $x \in X$ の近傍全体のなす集合を x の近傍系といい $\mathcal{U}(x)$ とかく．
$\mathcal{U}(x)$ の部分集合 $\mathcal{U}^*(x)$ が x の基本近傍系である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U \in \mathcal{U}(x), \exists V \in \mathcal{U}^*(x), V \subset U$
6. $A \subset X$ に対し，A に含まれる X の開集合全体の和集合を A^o で表し，A の内部または開核という．

A^o の点を A の内点という.

7. $A \subset X$ に対し, $(A^c)^o$ を A の外部といい, A^e で表す.
   A^e の点を A の外点という.
8. $A \subset X$ に対し, A の内部および外部を除く X の点全体を A の境界といい, A^f で表す.
9. $A \subset X$ に対し, A を含む X の閉集合全体の共通集合を $\overline{A}$ で表し, A の閉包という.
   $\overline{A}$ の点を A の触点という.

【定義 2.1.3】 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $a \in X$ に収束する $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ a の任意の近傍 U に対し, ある番号 n_0 が存在して, $n \geq n_0$ ならば $x_n \in U$ となる.
このとき a を点列 $\{x_n\}$ の極限点といい, $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ あるいは $x_n \to a \ (n \to \infty)$ と表す.

【定義 2.1.4】 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. $x \in X$ が A の集積点である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x の任意の近傍 U に対し, $(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset$
2. A の集積点全体を A の導集合といい, A' で表す.
3. A の点 $a \in A$ が A の孤立点である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ a が A の集積点でない.

【定義 2.1.5】 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. A が X で稠密（dense）である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\overline{A} = X$
2. (X, d) が可分 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある可算部分集合が存在して, これが X で稠密である.
3. A が全疎である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\left(\overline{A}\right)^o = \emptyset$

【定義 2.1.6】
1. 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が基本列である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対し, ある番号 n_0 が存在して, $m, n \geq n_0$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ となる.
2. 距離空間 (X, d) が完備 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X の任意の基本列が収束する.

【定義 2.1.7】 距離空間 (X, d) がコンパクト $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X の任意の無限部分集合は少なくともひとつ集積点をもつ.

【定義 2.1.8】 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. $\delta(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ を A の直径という.

【定義 2.1.9】 距離空間 (X, d) が全有界である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 n と, X の部分集合 U_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ で $\delta(U_i) < \varepsilon$ であるものが存在して, $X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ となる.

【定義 2.1.10】 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f \colon X \to Y$ を写像とする.

1. f が点 $a \in X$ で<u>連続</u>である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a のある近傍 U が存在して, $f(U) \subset V$ となる.
   $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x,a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる.
2. f が X の各点で連続であるとき f を<u>連続写像</u> という.

【定義 **2.1.11**】 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.
写像 $f\colon X \to Y$ が<u>一様連続</u> である
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ となる.

問題

78. 次の関数は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.
    (1) $f(x,y) = ||x| - |y||$
    (2) $f(x,y) = |x^3 - y^3|$
79. d を X 上の距離関数としたとき, 次の関数は X 上の距離関数になることを示せ.
    (1) $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$
    (ヒント：$a \geq 0, b \geq 0$ であるとき $\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ を示せ.)
    (2) $d'(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$
80. A が以下で与えられるとき, $A^o, A^e, A^f, \overline{A}, A'$ を求めよ.
    (1) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$
    (2) $A = \left\{ m + \dfrac{1}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$
    (3) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > x^2 \right\} \subset \mathbb{R}^2$
    (4) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \text{ についての方程式 } t^2 + xt + y = 0 \text{ が実根をもつ} \right\} \subset \mathbb{R}^2$
    (5) $A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}^2$
81. 集合 X において
    $$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$
    と定義する.
    (1) d は X 上の距離関数になることを示せ.
    (2) 距離空間 (X, d) の開集合はどのようなものか.
82. 距離空間 (X, d) において, 基本列の集積点は高々一点であり, 存在すればそれに収束することを示せ.

83. (X,d) を距離空間とする．X の部分集合 A,B に対し，$d(A,B) = \inf_{a\in A, b\in B} d(a,b)$ とおく．

(1) $d(A,B) > 0$ ならば $A \cap B = \emptyset$ であることを示せ．

(2) A が一点からなる集合 $A = \{a\}$, B が閉集合であるとき，$A \cap B = \emptyset$ ならば $d(A,B) > 0$ であることを示せ．

(3) 任意の部分集合 B について，$\rho_B(x) = d(x,B)$ で与えられる関数は X 上の連続関数であることを示せ．

(4) A がコンパクト，B が閉集合であるとき，$A \cap B = \emptyset$ ならば $d(A,B) > 0$ であることを示せ．

84. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A,B を

$$A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \{(x,y) \mid y = e^x\}$$

により定める．

(1) A も B も閉集合であることを示せ．

(2) $d(A,B)$ を求めよ．

85. 次の命題は一般には成立しない．反例を挙げよ．

(1) $\mathbb{R}$ の開集合の可算無限族 $\{O_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ に対して $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ も開集合である．

(2) $F \subset \mathbb{R}$ が閉集合，$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続ならば $f(F)$ は閉集合である．

86. X を集合，$F(X)$ を X 上の実数値有界関数全体のなす集合とする．$f,g \in F(X)$ に対し

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d\left(f(x), g(x)\right)$$

と定めると，d は $F(X)$ 上の距離関数になることを示せ．

見直し

87. X を集合, (Y, d_Y) を距離空間, $F(X, Y)$ を X から Y への写像全体のなす集合とする.

(1) $B(X, Y) \subset F(X, Y)$ を有界な写像（すなわち $\delta_Y(f(X)) < \infty$ であるような写像）全体のなす部分集合とする. $f, g \in B(X, Y)$ に対し

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} d_Y\left(f(x), g(x)\right)$$

と定めると, d は $B(X, Y)$ 上の距離関数になることを示せ.

(2) $f_0 \in F(X, Y)$ をひとつ固定し,

$$F_{f_0}(X, Y) = \left\{ f \;\middle|\; \sup_{x \in X} d_Y\left(f(x), f_0(x)\right) < \infty \right\}$$

とおく. このとき $f, g \in F_{f_0}(X, Y)$ に対し $d(f, g)$ を上と同様に定めると d は $F_{f_0}(X, Y)$ 上の距離関数になることを示せ.

(3) f_0 が有界ならば, $F_{f_0}(X, Y) = B(X, Y)$ であることを示せ.

88. 距離空間 (X_1, d_1), (X_2, d_2) に対し, 直積集合 $(X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2)$ 上の関数 d を

$$d\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}, \quad (x_1, y_1 \in X_1,\ x_2, y_2 \in X_2)$$

により定める.

(1) d は $X_1 \times X_2$ 上の距離関数であることを示せ.

(2) (X_1, d_1), (X_2, d_2) がともにコンパクトであるならば, $(X_1 \times X_2, d)$ もコンパクトであることを示せ.

89. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とするとき, $\delta(A) = \delta(\overline{A})$ であることを示せ.

90. (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. $x \in X$ について次の 4 条件は同値であることを示せ.

(i) $x \in \overline{A}$

(ii) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $U(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

(iii) $d(x, A) = 0$

(iv) A の点からなる点列 $\{a_n\}$ で x に収束するものが存在する.

91. (X, d) を距離空間とする. 次を示せ.

(1) $x, y, z \in X$ のとき,

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

(2) $w, x, y, z \in X$ のとき,

$$|d(w,x) - d(y,z)| \leq d(w,y) + d(x,z)$$

92. $\mathbb{R}^2$ において, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ に対し,

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$
$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

とおく.

(1) d_1, d_2 は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数であることを示せ.

(2) これらにより定まる開集合族は一致することを示せ.

93. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{R}^2$ とする. $\overline{A} = \mathbb{R}^2$ を示せ.

94. 開区間 $(0,1) \subset \mathbb{R}$ はコンパクトではないことを示せ.

95. A を距離空間 (X,d) の稠密な部分集合とする. A の点からなる任意のコーシー列が X の点に収束すれば, X は完備であることを示せ.

96. (X,d) を距離空間, $\{x_n\}$ を X の互いに相異なる点からなる点列で, ただひとつの集積点をもつものとする. このとき $\{x_n\}$ は収束するか?

97. 半開区間 $(0,1]$ 上の関数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ は, 連続であるが一様連続ではないことを示せ.

98. 距離空間 (X,d) のふたつの部分集合 A, B がともにコンパクトならば $A \cup B$ もコンパクトであることを示せ.

99. $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

で定めると, f は原点以外では連続であり, 原点では連続ではないことを示せ.

100. $C[0,1]$ を閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体のなす集合とする.

(1) $f, g \in C[0,1]$ に対し

$$d(f,g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

と定めると, d は $C[0,1]$ 上の距離関数になることを示せ.

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対し, $[0,1]$ 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (n+2)x - \dfrac{n+2}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

により定めると, $f_n \in C[0,1]$ であり, 点列 $\{f_n\}$ は上で定めた距離に関してコーシー列であることを示せ.

(3) $C[0,1]$ はこの距離に関して完備か?

101. $C[0,1]$ を問 100 で定めた集合とする.

(1) $f, g \in C[0,1]$ に対し,

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$$

と定めると, d_∞ は $C[0,1]$ 上の距離関数になることを示せ.

(2) 問 100 (2) の $\{f_n\}$ は d_∞ でコーシー列になるか?

(3) $C[0,1]$ はこの距離に関して完備か?

102. 可分な距離空間 (X,d) において, 離散集合は可算であることを示せ. ただし離散集合とは孤立点ばかりからなる集合をいう.

103. (1) $f(x) = \sin x$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ.

(2) $g(x) = x\sin x$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続か?

104. 実数列からなる集合 S を

$$S = \Big\{\{x_n\} \;\Big|\; x_n \in \mathbb{R},\ \text{有限個の } n \text{ を除いて } x_n = 0\Big\}$$

で定める. $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in S$ に対し

$$d(x,y) = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

とおく.

(1) d は S 上の距離関数になることを示せ.

(2) $m \in \mathbb{N}$ とする. 実数列 $a^{(m)} = \{a_n^{(m)}\}_n \in S$ を

$$a_n^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \le m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

により定める. このとき S の点列 $\{a^{(m)}\}_m$ はコーシー列であることを示せ.

(3) 距離空間 (S,d) は完備か?

105. A を, 閉区間 $[0,1]$ の稠密な部分集合とする. A 上で一様連続な関数は, $[0,1]$ 上の連続関数に一意的に拡張できることを示せ.

106. 距離空間 (X,d) から $\mathbb{R}$ への写像 f が, 点 $x_0 \in X$ で連続であるとする. f が x_0 の任意の ε-近傍で定符号でないならば, $f(x_0) = 0$ となることを示せ.

107. (X,d) を距離空間, $E \subset X$ を空でない部分集合とする. $x \in X$ に対し, 実数 $\rho_E(x)$ を

$$\rho_E(x) = \inf_{y\in E} d(x,y)$$

により定める.

(1) $\rho_E(x) = 0$ であるための必要十分条件は $x \in \overline{E}$ であることを示せ.

(2) $\rho_E \colon X \to \mathbb{R}$ は一様連続であることを示せ.

(3) A, B を X の部分集合で $A \cap B = \emptyset$ とする. A がコンパクトで, B が閉集合ならば, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $a \in A$ と $b \in B$ に対し $d(x, y) > \delta$ となることを示せ.

108. $\Sigma_2 = \{(s_0, s_1, \dots) \mid s_i \in \{0, 1\}, \forall i\}$ とする. $S = (s_0, s_1, \dots), T = (t_0, t_1, \dots) \in \Sigma_2$ に対し

$$d(S, T) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

とおく.

(1) d は Σ_2 上の距離関数になることを示せ.

(2) 写像 $\sigma \colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ を

$$\sigma(s_0, s_1, \dots) = (s_1, s_2, \dots)$$

で定義する. σ は連続写像であることを示せ.

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathrm{Per}_n(\sigma) = \{S \in \Sigma_2 \mid \sigma^n(S) = S\}$$

とおく. $\mathrm{Per}_n(\sigma)$ の元の個数は 2^n であることを示せ.

(4) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(\sigma)$ は Σ_2 で稠密であることを示せ.

(5) $\{\sigma^n(S_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ が Σ_2 で稠密になるような元 $S_0 \in \Sigma_2$ が存在することを示せ.

109. $A = \left\{m + n\sqrt{5} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密であることを示せ.

110. $\mathbb{R}$ の開集合 A, B で,

$$A \cap \overline{B},\ \overline{A} \cap B,\ \overline{A \cap B},\ \overline{A} \cap \overline{B}$$

がすべて異なるようなものを挙げよ.

111. (X, d) を完備な距離空間とする.

(1) $\{F_n\}$ を, X の空でない閉集合の減少列

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \dots$$

で, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ であるようなものとする. このとき $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ はちょうど一点であることを示せ.

(2) (1) で「F_n が閉集合」という条件がないとき, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ となる例を挙げよ.

(3) (1) で「$\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$」という条件がないとき, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ となる例を挙げよ.

112. (X, d) を完備な距離空間, $f\colon X \to X$ を縮小写像とする. ただし, 縮小写像とは, ある実数 $0 \leq r < 1$ が存在して, すべての $x, y \in X$ に対し $d\left(f(x), f(y)\right) \leq rd(x, y)$ をみたすものである.

(1) $x_0 \in X$ とする. $x_n = f^n(x_0)$ により与えられる X の点列 $\{x_n\}$ はコーシー列であることを示せ.

(2) f は不動点, すなわち $f(x) = x$ となる点, をもつことを示せ.

113. p を素数, C を $0 < C < 1$ なる実数とする. $r \in \mathbb{Q}$ に対し

$$|r|_p = \begin{cases} C^k & \left(r = p^k \dfrac{m}{l} \neq 0,\ k, l, m \in \mathbb{Z},\ l, m \text{ は } p \text{ と互いに素}\right) \\ 0 & (r = 0) \end{cases}$$

とおく (p 進付値).

(1) $q, r \in \mathbb{Q}$ に対し

$$|qr|_p = |q|_p |r|_p$$
$$|q + r|_p \leq \max\left(|q|_p, |r|_p\right)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $q, r \in \mathbb{Q}$ に対し

$$d(q, r) = |q - r|_p$$

とおくと, d は $\mathbb{Q}$ 上の距離関数であることを示せ.

114. (X, d) を距離空間, $E \subset X$ を閉集合とする.

(1)

$$G_n = \left\{ x \in X \;\middle|\; \rho_E(x) < \frac{1}{n} \right\}$$

は開集合であることを示せ. (ρ_E については問 107 を見よ.)

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = E$ であることを示せ.

115. コンパクト距離空間は可分であることを示せ.

見直し

E がコンパクトという仮定は不要では? 距離空間の問題?

116. E を $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合, $f\colon E \to \mathbb{R}$ を写像とする. 集合

$$\Gamma_f = \{(x, y) \mid x \in E,\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

がコンパクトならば, f は連続であることを示せ.

117. $\mathbb{R}$ の部分集合 E_n および C を以下のように定める.

$$E_0 = [0,1]$$
$$E_1 = E_0 - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$E_2 = E_1 - \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

以下帰納的に, E_{n-1} の各閉区間を 3 等分し中央 1/3 の長さの開区間を取り除いてえられる長さ $1/3^n$ の閉区間の和集合を E_n とし,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subset \mathbb{R}$$

とする. C はカントール集合とよばれる.

(1) C は閉集合であることを示せ.

(2) C は全疎であることを示せ.

(3) C は完全集合, すなわち $C' = C$ であることを示せ.

見直し

(4) 半開区間 $[0,1)$ の点 x に対し, その 2 進展開を $0, t_1, t_2, \ldots$ とし, $b_i = 2t_i$ とおく.

$$f(x) = 0, b_1, b_2, \ldots$$

とすると f は $[0,1)$ から C への単射写像であることを示せ.

118. 距離空間において次を示せ.

(1) 収束する点列はコーシー列である.

(2) コーシー列は有界である.

(3) コーシー列が集積点をもてば, その集積点に収束する.

119. $\mathbb{R}$ は完備であることを示せ.

第 3 章

位相空間

3.1　位相空間の定義

【定義 3.1.1】　集合 X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ が次の 3 つの条件をみたすとき, $\mathcal{O}$ は X に位相を定めるといい, 組 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という．また, しばしば, $\mathcal{O}$ のことを X の位相とよぶ.

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.

(ii) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(iii) $O_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ の元を X の開集合という.

【定義 3.1.2】　X を集合とし, X の部分集合族 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ がそれぞれ位相 T_1, T_2 を定めるとする．$\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ であるとき, 位相 T_2 は位相 T_1 より強い, または, 位相 T_1 は位相 T_2 より弱いといって, $T_1 \leq T_2$ とあらわす.

問題

120. 定義 3.1.1 の (ii) は次の (ii') と同値であることを示せ.

    (ii')　有限個（1 個以上）の開集合の共通部分は開集合である.

121. (X, d) を距離空間とする．X の（定義 2.1.22 の意味の）開集合全体 $\mathcal{O}$, すなわち,

$$\mathcal{O} = \left\{ O \subset X \;\middle|\; \text{任意の } x \in O \text{ に対して, ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して, } U(x, \varepsilon) \subset O \text{ となる} \right\}$$

は X に位相を定めることを示せ.

この位相を距離の定める位相という．特にことわらないかぎり, 距離空間を位相空間とみるときは距離の定める位相を考える.

見直し

位相?

122. $\mathbb{R}$ にユークリッド距離から定まる位相を与える．$A_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ とするとき, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, 1]$ となることを示せ.

123. X を集合とする．巾集合 $\mathcal{P}(X)$ は X に位相を定めることを示せ.
この位相を X の離散位相という.
124. X を集合とする．$\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ は X に位相を定めることを示せ.
この位相を密着位相という.
125. 離散距離空間（問 81 で与えられた距離空間）においては, 距離の定める位相は離散位相と一致することを示せ.
126. $\mathbb{R}$ において $\mathcal{O} = \left\{A \subset \mathbb{R} \,\middle|\, A^c \text{ は有限集合}\right\} \cup \{\emptyset\}$ とすると, $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}$ に位相を定めることを示せ.
この位相を $\mathbb{R}$ のザリスキー位相という.
127. 集合 $\{0, 1\}$ のすべての位相を挙げよ.
128. 位相の強弱 $\leq$ は順序の公理（定義 1.7.1）をみたすことを示せ.
129. 集合 X の任意の位相は, 密着位相より強く, 離散位相より弱いことを示せ.
130. $\mathbb{R}$ の以下の位相の強弱を調べよ．密着位相, ザリスキー位相, ユークリッド距離の定める位相, 離散位相.

3.2　閉集合

【定義 3.2.1】　X を位相空間とする.
$F \subset X$ が X の閉集合 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ F^c が X の開集合.

問題

131. X を位相空間とする.
$$\mathcal{F} = \left\{F \,\middle|\, F \text{ は } X \text{ の閉集合}\right\}$$
とするとき, 次が成り立つことを示せ.
(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$.
(2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.
(3) $F_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{O}$.
132. 集合 X に密着位相および離散位相を与えたとき, 閉集合はそれぞれどのようなも

のか.

133. $\mathbb{R}$ にザリスキー位相を与えたとき, 閉集合はどのようなものか.
134. $\mathbb{R}$ にユークリッド距離の定める位相を与えたとき, $[a,b]$, $[a,\infty)$ は閉集合であることを示せ.
135. F_n $(n \in \mathbb{N})$ は閉集合であるが, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ は閉集合ではない例を挙げよ.
136. 距離空間においては, 一点からなる集合は閉集合であることを示せ.

3.3 近傍系

【定義 3.3.1】 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

1. 部分集合 $U \subset X$ が点 $x \in X$ の<u>近傍</u>である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x \in O \subset U$ となる X の開集合 O が存在する.
2. 集合族 $\mathcal{U}_x(\mathcal{O}) = \{U \mid U \text{ は } x \text{ の近傍}\}$ を x の<u>近傍系</u>という.
3. という.
   $\mathcal{U}(\mathcal{O}) = \{\mathcal{U}_x(\mathcal{O})\}_{x \in X}$ を X の<u>近傍系</u>という.

【定義 3.3.2】 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $\mathcal{U}(\mathcal{O}) = \{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ を X の近傍系とする. 各点 $x \in X$ に対し, X の部分集合の族 $\mathcal{V}_x$ が与えられ以下の条件をみたすとき, 族 $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$ を X の<u>基本近傍系</u>という.

(i) $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$ $(\forall x \in X)$.
(ii) $\forall U \in \mathcal{U}_x$ に対し, $V \subset U$ となる $V \in \mathcal{V}_x$ が存在する.

【定義 3.3.3】 X を集合とする. 各点 $x \in X$ に対し, X の部分集合の族 $\mathcal{U}_x$ が与えられ以下の条件 (これを<u>近傍系の公理</u>という) をみたすとき, 族 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ は集合 X の<u>近傍系</u>であるという.

(i) $U \in \mathcal{U}_x$ ならば $x \in U$.
(ii) $U, V \in \mathcal{U}_x$ ならば $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.
(iii) $U \in \mathcal{U}_x$, $U \subset V$ ならば $V \in \mathcal{U}_x$
(iv) $\forall U \in \mathcal{U}_x$ に対し, $x \in V \subset U$ となる V であって, $\forall y \in V$ について $V \in \mathcal{U}_y$ となるようなものが存在する.

見直し

$\mathcal{V}_x \neq \emptyset$?

【定義 3.3.4】　X を集合とする．各点 $x \in X$ に対し，X の部分集合の族 $\mathcal{V}_x$ が与えられ以下の条件 (これを基本近傍系の公理という) をみたすとき，族 $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ は集合 X の基本近傍系であるという．

(i) $U \in \mathcal{V}_x$ ならば $x \in U$.
(ii) $U, V \in \mathcal{V}_x$ ならば $W \subset U \cap V$ となるような $W \in \mathcal{V}_x$ が存在する．
(iii) $\forall U \in \mathcal{V}_x$ に対し，$x \in V \subset U$ となる V であって，$\forall y \in V$ について $V \in \mathcal{V}_y$ となるようなものが存在する．

問題

137. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の近傍系 $\mathcal{U}(\mathcal{O})$ は近傍系の公理 (定義 3.3.3) をみたすことを示せ．
138. X を位相空間，O を X の開集合とする．このとき，任意の $x \in O$ に対して，O は x の近傍であることを示せ．
139. $\mathcal{V}$ が位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の基本近傍系であれば，$\mathcal{V}$ は基本近傍系の公理 (定義 3.3.4) をみたすことを示せ．
140. X を集合とし，$\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ は X の基本近傍系 (定義 3.3.4) であるとする．X の部分集合の族 $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ を
$$\mathcal{O}(\mathcal{V}) = \{O \mid O \subset X,\ \forall x \in O, \exists U \in \mathcal{V}_x\ s.t.\ U \subset O\}$$
と定める．ことのき $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ は X の位相であることを示せ．
141. X を集合とし，$\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$, $\mathcal{V}' = \{\mathcal{V}'_x\}_{x\in X}$ は X の基本近傍系であるとする．任意の $x \in X$ について $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{V}'_x$ であれば，$\mathcal{O}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{O}(\mathcal{V}')$，すなわち位相 $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ の方が位相 $\mathcal{O}(\mathcal{V}')$ より弱いことを示せ．
142. X を集合とし，$\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ は X の基本近傍系であるとする．このとき $\mathcal{V}$ は位相空間 $(X, \mathcal{O}(\mathcal{V}))$ の基本近傍系であることを示せ．
143. $\mathcal{V}$ が位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の基本近傍系であれば，問題 140 で定まる位相 $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ はもとの位相 $\mathcal{O}$ と等しい，すなわち $\mathcal{O}(\mathcal{V}) = \mathcal{O}$ であることを示せ．
とくに $\mathcal{O}(\mathcal{U}(\mathcal{O})) = \mathcal{O}$ である．
144. 上の問 142 において，等号 $\mathcal{V} = \mathcal{U}(\mathcal{O}(\mathcal{V}))$ は必ずしも成立しない，すなわち $\mathcal{V}$ は必ずしも $(X, \mathcal{O}(\mathcal{V}))$ の近傍系とはならない．$\mathcal{V}$ と $\mathcal{U}(\mathcal{O}(\mathcal{V}))$ との関係について考察せよ．

145. X を距離空間とする．$x \in X$ の ε 近傍全体を $\mathcal{U}_x$，$\frac{1}{n}$ 近傍全体を $\mathcal{U}'_x$ とする．すなわち

$$\mathcal{U}_x = \{U(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, \quad \mathcal{U}'_x = \{U(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

このとき $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ および $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}'_x\}_{x \in X}$ は基本近傍系の公理をみたすことを示せ．またこれらの定める位相は等しいことを示せ．

146. $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し実数 $d(x, y), d'(x, y)$ を

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$
$$d'(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2\}$$

で定める．

(1) d, d' は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数となることを示し，それぞれに対する ε 近傍を図示せよ．

(2) このふたつの距離の定める位相は等しいことを示せ．

147. $\mathbb{R}$ に密着, 離散, ザリスキー位相をいれたとき, それぞれに対する $\mathcal{U}_x(\mathcal{O})$ を求めよ．

148. X を集合とし, $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$ は X の基本近傍系であるとする．$\mathcal{V}$ が条件「$\forall U \in \mathcal{V}_x$ と $\forall y \in U$ について $U \in \mathcal{V}_y$ である」をみたすとき, 任意の $U \in \mathcal{V}_x$ は位相空間 $(X, \mathcal{O}(\mathcal{V}))$ の開集合であること，すなわち $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{O}(\mathcal{V})$ $(\forall x \in X)$ であることを示せ．

149. 実数 $a \in \mathbb{R}$ に対し実数の部分集合の族 $\mathcal{U}_a$ を $\mathcal{U}_a = \{[a, b) \mid b > a\}$ で定めると, $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ は集合 $\mathbb{R}$ の基本近傍系であることを示せ．$\mathbb{R}$ にこの基本近傍系から定まる位相をいれた位相空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathcal{U}))$ を<u>ソルゲンフリー直線</u>という．ソルゲンフリー直線においては任意の閉区間 $[a, b]$ は開集合かつ閉集合であることを示せ．

150. ソルゲンフリー直線の位相とユークリッド距離から定まる位相はどちらが強いか．

3.4　内部, 外部, 閉包

X を位相空間, A を X の部分集合とする．

【**定義 3.4.1**】 A に含まれる X の開集合全体のなす族を $\mathfrak{U}$ とする．

$$\mathfrak{U} = \{O \mid O \subset A,\ O \text{ は } X \text{ の開集合}\}$$

このとき $A^o = \cup\mathfrak{U}$ を A の<u>内部</u>あるいは<u>内核</u>という．

【**定義 3.4.2**】 A の補集合 A^c の内部を A の<u>外部</u>といい A^e と書く．すなわち $A^e = (A^c)^o$.

【**定義 3.4.3**】 A の内部にも外部にもはいらない点を A の<u>境界点</u>という．境界点の全体を A の<u>境界</u>といい, A^f と書く．すなわち $A^f = (A^o \cup A^e)^c$.

【定義 3.4.4】 $x \in A$ とする. $x \in U \subset A$ となるような x の近傍 U が存在するとき, x は A の内点であるという. A の補集合 A^c の内点を A の外点という.

【定義 3.4.5】 A を含む X の閉集合全体のなす族を $\mathcal{F}$ とする.

$$\mathcal{F} = \left\{ F \;\middle|\; F \subset A,\ F \text{ は } X \text{ の閉集合} \right\}$$

このとき $\overline{A} = \cap\mathcal{F}$ を A の閉包という. A の閉包を A^a と書くこともある.

【定義 3.4.6】 B を X の部分集合とする. $\overline{A} \supset B$ であるとき A は B で稠密であるという. とくに $\overline{A} = X$ となるとき A は稠密であるという.

【定義 3.4.7】 $(A^a)^o = \emptyset$ であるとき A は全疎であるという.

問題

151. A の内部は A の内点全体の集合であること, A の外部は A の外点全体の集合であることを示せ.
152. A の内部は A に含まれる開集合のうち, 包含関係に関して最大のものであることを示せ.
153. A の閉包は A を含む閉集合のうち, 包含関係に関して最小のものであることを示せ.
154. $x \in X$ が A の外点 $\Leftrightarrow$ $U \cap A = \emptyset$ となる x の近傍 U が存在する.
155. $x \in X$ が A の境界点 $\Leftrightarrow$ x の任意の近傍 U について, $U \cap A \neq \emptyset$ かつ $U \cap A^c \neq \emptyset$.
156. $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x$ は A の内点または境界点 $\Leftrightarrow x$ の任意の近傍 U について $U \cap A \neq \emptyset$.
157. $\mathbb{R}$ に, 密着, ザリスキー, ユークリッド, ソルゲンフリー直線, 離散位相をいれるとき, それぞれについて以下の部分集合の内部および閉包を求めよ.

$$\{0\}, \qquad (0,1), \qquad (0,1], \qquad [0,1), \qquad [0,1], \qquad \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{R}$$

158. 次が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.
    (1) $A \subset B \Rightarrow A^o \subset B^o$
    (2) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$
    (3) $(\cup A_\lambda)^o = \cup A_\lambda^o$
    (4) $(A^o)^o = A^o$
159. $(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^o = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^o$ は正しいか?
160. 次が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.
    (1) $A \subset B \Rightarrow A^a \subset B^a$
    (2) $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$
    (3) $(\cap A_\lambda)^a = \cap A_\lambda^a$

(4) $(A^a)^a = A^a$

161. $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^a = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^a$ は正しいか?

162. A, B, C を位相空間 X の部分集合とする. $A \subset B \subset C$ であって, A は B で, B は C で稠密であるならば, A は C で稠密であることを示せ.

163. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において, 以下の各部分集合の内部および閉包を求めよ.

(1) $\{(x_1, x_2) \mid t$ の二次方程式 $t^2 + x_1 t + x_2 = 0$ が実根をもつ$\}$

(2) $\{(x_1, x_2) \mid t$ の二次方程式 $t^2 + x_1 t + x_2 = 0$ が虚根をもつ$\}$

(3) $\{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\}$

(4) $\{(x_1, x_2) \mid 0 \leq x_1 = x_2 < 1\}$

(5) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = a + b, x_2 = a^2 + b^2 \ (\exists a > 0, \exists b > 0)\}$

164. S を非可算集合とする. S の部分集合 A に対し A の閉包を

$$\overline{A} = \begin{cases} A & A \text{ が高々可算集合} \\ S & A \text{ が非可算集合} \end{cases}$$

と定めることで S に位相をいれることができる.

見直し

準備なしではちょっと難しいか これを示せ.

また, この位相空間 S においては, 可算個の開集合の共通部分は開集合であることを示せ.

165. $\mathbb{N}$ の部分集合 A に対し A の閉包を

$$\overline{A} = \begin{cases} \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq \max A\} & A \text{ が有限集合} \\ \mathbb{N} & A \text{ が無限集合} \end{cases}$$

と定めることで $\mathbb{N}$ に位相をいれることができる. この空間の開集合および閉集合を全て求めよ.

166. $\mathbb{N}$ に上の問 165 の位相をいれる. $\mathbb{N}$ の閉集合の列 $A_1, A_2, \ldots$ が減少列, すなわち $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ をみたしていれば, ある番号 n があって $A_n = A_{n+1} = \ldots$ となっていることを示せ. 増加列 $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ の場合はどうか?

167. 上の問 166 と同様なことを問 164 の空間および $\mathbb{R}$ にザリスキー位相をいれた空間について考えよ.

見直し

ネーターの定義とかいれる?

3.5　点列の収束

【定義 **3.5.1**】　X を位相空間とする．X の点列 $\{x_n\}$ が点 $x \in X$ に収束する $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ x の任意の近傍 U に対し, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる．

このとき点 x を点列 $\{x_n\}$ の極限点といい $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ あるいは $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ とかく．

問題

168. $\mathcal{V}$ を位相空間 X の基本近傍系とする．このとき次は同値であることを示せ．
   (1) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$
   (2) $\forall V \in \mathcal{V}_x$ に対し, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ ならば $x_n \in V$ となる．
169. 密着位相の場合, どのような点列が収束するか．離散位相の場合はどうか．
170. (1) $\mathbb{R}$ の部分集合 A が高々可算個の有理数からなる集合であるときに A は閉集合であるとすることで $\mathbb{R}$ に位相を定めることが出来ることを示せ．
   (2) $\mathbb{R}$ に上の位相をいれたとき, 次の点列の極限点を求めよ．
      i. $x_n = \frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2},\ x_1 = 0,\ x_2 = a \in \mathbb{R}$
      ii. $x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}},\ x_1 = 1$

3.6　フィルターの収束

3.7　連続写像と相対位相

【定義 **3.7.1**】　$(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする．A の部分集合族 $\mathcal{O}_A$ を

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

と定めると, $\mathcal{O}_A$ は A の位相となる．この位相を X による A の相対位相という．
位相空間の部分集合に相対位相をいれて位相空間とみたとき, 部分空間という．

【定義 **3.7.2**】　X, Y を位相空間とする．
写像 $f\colon X \to Y$ が点 $x \in X$ で連続である $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $f(x) \in Y$ の任意の近傍 V に対して, x の近傍 U が存在して $f(U) \subset V$ となる．
X の全ての点で連続であるとき f は連続である, あるいは f は連続写像 であるという．

【定義 **3.7.3**】　位相空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ は次の 2 つの条件をみたすとき同相写像または同位相写像であるという．

(i) f は全単射

(ii) f, f^{-1} はともに連続

位相空間 X, Y の間に同相写像が存在するとき X と Y は<u>同相</u>である, または<u>同位相</u>であるという.

問題

171. 定義 3.7.1 の $\mathcal{O}_A$ が位相であることを示せ.
172. X, Y を位相空間, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ をそれぞれ X, Y の基本近傍系とし, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 次の 2 条件は同値であることを示せ.
    (1) f が点 $x \in X$ で連続
    (2) $\forall V \in \mathcal{V}_{f(x)}$ に対し, ある $U \in \mathcal{U}_x$ が存在して $f(U) \subset V$ となる
173. 集合 X に位相 T_1, T_2 をいれた位相空間をそれぞれ X_1, X_2 とする. このとき恒等写像 $\mathrm{Id}\colon X_1 \to X_2$ が連続となる条件を考察せよ.
174. X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A の相対位相は, 包含写像 $i\colon A \to X$ が連続となるような最弱位相であることを示せ.
175. $f\colon X \to Y$ を連続写像とする. 次が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.
    (1) $O \subset X$ が開集合ならば $f(O) \subset Y$ も開集合である.
    (2) $F \subset X$ が閉集合ならば $f(F) \subset Y$ も閉集合である.
176. X に密着位相がはいっているとき, 写像 $f\colon X \to \mathbb{R}$ が連続になるための条件を求めよ. X に離散位相をいれるとどうか.
177. $\mathbb{R}$ にザリスキー位相をいれる. 次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の連続性を調べよ.
    (1) f が多項式のとき
    (2) $f(x) = e^x$
    (3) $f(x) = \cos x$
178. X を位相空間, $A \subset B \subset X$ を部分集合とする. 次を示せ.
    (1) B が閉集合かつ B の相対位相で A が B の閉集合ならば, A は X の閉集合である.
    (2) B が開集合かつ B の相対位相で A が B の開集合ならば, A は X の開集合である.
179. $\mathbb{R}$ の部分集合 $(1, 2]$ は $\mathbb{R}$ の開集合ではないが, 部分空間 $(0, 2]$ の開集合である.

見直し

どこかに定義をまとめる?

180. $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を実 $n\times n$ 行列全体のなす集合とする．$A=(a_{ij})\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ のノルム $||A||$ を $||A||=\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}$ により定める．

(1) $A,B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対し，$d(A,B)=||A-B||$ と定めると，d は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上の距離関数であることを示せ．

(2) この距離で位相をいれたとき $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^{n^2}$ は同相であることを示せ．

181. $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に上の問 180 の位相をいれる．

(1) 行列に対しその行列式を対応させる関数 $\det\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ は連続であることを示せ．

(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})=\{A\mid \det(A)\neq 0\}$ は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ の稠密な開集合であることを示せ．

(3) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に相対位相をいれる．$\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ は連続であることを示せ．

(4) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})=\{A\mid \det(A)=1\}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉集合であることを示せ．

182. 開区間 $(0,1)$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれると，$(0,1)$ と $\mathbb{R}$ は同相であることを示せ．

183. 半直線 $\mathbb{R}^+=\{x\mid x\geq 0\}\subset\mathbb{R}$ および円 $S^1=\bigl\{(x,y)\bigm| x^2+y^2=1\bigr\}\subset\mathbb{R}^2$ にそれぞれ相対位相をいれる．写像 $f\colon\mathbb{R}^+\to S^1$ を $f(x)=\Bigl(\cos\frac{2\pi x}{1+x},\sin\frac{2\pi x}{1+x}\Bigr)$ で定めると，f は連続な全単射であるが同相写像ではないことを示せ．

184. 連続な単射 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ であって，f が $\mathbb{R}$ から $f(\mathbb{R})$ への同相写像にならないような例を挙げよ．ただし $f(\mathbb{R})$ には $\mathbb{R}^2$ からの相対位相をいれる．

185. 楕円と円は同相である．

3.8 位相の生成

3.8.1 位相の基と準基

【定義 **3.8.1**】 X を集合とする．$\mathcal{B}\subset\mathcal{P}(X)$ に対し，$\mathcal{B}$ を含む位相全ての共通部分，すなわち $\mathcal{B}$ の元が開集合となるような最弱の位相を $\mathcal{B}$ が生成する位相といい $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ で表す．

【定義 **3.8.2**】 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B}\subset\mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の基あるいは開基である $\underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の開集合 O が $\mathcal{B}$ に属する開集合の和集合 $O=\bigcup\limits_{\lambda}O_\lambda$ $(O_\lambda\in\mathcal{B})$ として表せる．
(0 個の集合の和集合は空集合である，あるいはそう約束する.)

【定義 **3.8.3**】 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の準基である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{B}$ の有限個の元の共通部分として表される集合全体が $\mathcal{O}$ の基となる．
(0 個の集合の共通部分は全体 X と約束する.)

問題

186. X を集合とし, $\mathcal{O}_\lambda$ を X の位相とする．このとき $\bigcap\limits_{\lambda} \mathcal{O}_\lambda$ も X の位相となることを示せ.
187. $\mathcal{B}$ を集合 X の部分集合の族とする．このとき $\mathcal{B}$ は, $\mathcal{B}$ の生成する位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の準基であることを示せ.
188. $\mathcal{B}$ を集合 X の部分集合の族とする．$\mathcal{B}$ を開基とする位相は, 存在すれば, 一意的である.
189. $\mathcal{B}$ を集合 X の部分集合の族とする. 次の 3 条件は同値であることを示せ.
    (1) $\mathcal{B}$ は, $\mathcal{B}$ の生成する位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の開基である
    (2) $\mathcal{B}$ を開基とする X の位相が存在する
    (3) $\mathcal{B}$ は次の 3 条件をみたす
        i. 任意の $x \in X$ に対し, $x \in O$ となる $O \in \mathcal{B}$ が存在する
        ii. $O_1, O_2 \in \mathcal{B}$ ならば, 任意の $x \in O_1 \cap O_2$ に対し, $x \in O \subset O_1 \cap O_2$ となる $O \in \mathcal{B}$ が存在する.
190. 位相空間の基本開近傍系は開基となることを示せ.

3.8.2　積位相と直和

【定義 **3.8.4**】 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．直積集合 $X \times Y$ に, 部分集合の族 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ を開基とする位相をいれた位相空間を X と Y の直積空間という.

【定義 **3.8.5**】 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする．直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に, 部分集合の族

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある有限集合 } L \subset \Lambda \text{ が存在して, } \lambda \in L \text{ ならば } A_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda, \\ \lambda \notin L \text{ ならば } A_\lambda = X_\lambda \end{array} \right\}$$

を開基とする位相 (この位相を直積位相という) をいれた位相空間を, 族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間または弱位相による直積空間という.

【定義 3.8.6】 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする．非交和 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に，位相

$$\mathcal{O} = \left\{ O = \coprod_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \;\middle|\; O_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \right\}$$

をあたえた位相空間を族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の位相和という．

問題

191. 定義 3.8.4 および 3.8.5 の $\mathcal{B}$ は問 189 の条件をみたすことを示せ．
192. 定義 3.8.5 において $\Lambda = \{1,2\}$ であるとき，この意味での直積空間 $\prod_{\lambda\in\{1,2\}} X_\lambda$ と，定義 3.8.4 の意味での直積空間 $X_1 \times X_2$ は同相であることを示せ．
193. $\pi_\lambda\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ を標準的な射影とする．
    (1) 直積空間の位相は，全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し π_λ が連続となるような，最弱の位相であることを示せ．
    (2) π_λ は開写像であることを示せ．
    (3) π_λ が閉写像とはならないような例を挙げよ．
194. $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ は同相である．
195. X, Y を位相空間とする．
    (1) $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ がそれぞれ X, Y の基本近傍系であるとき，$\{U \times V \mid U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$ は直積空間 $X \times Y$ の基本近傍系となることを示せ．
    (2) $A \subset X$, $B \subset Y$ を部分集合とする．直積空間 $X \times Y$ の部分集合として $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ であることを示せ．ただし右辺は A の X における閉包 $\overline{A}$ と B の Y における閉包 $\overline{B}$ の直積である．
196. X, Y, Z を位相空間とする．直積空間 $X \times Y$ から Z への写像 $f\colon X \times Y \to Z$ が点 $(x, y) \in X \times Y$ で連続であるための必要十分条件は $f(x, y) \in Z$ の任意の近傍 W に対して，x の近傍 U と y の近傍 V が存在して $f(U \times V) \subset W$ となることである．
197. X, Y, Z を位相空間，$f\colon X \times Y \to Z$ を直積空間 $X \times Y$ から Z への連続写像とする．点 $a \in X$ に対し，写像 $f_a\colon Y \to Z$ を $f_a(y) = f(a, y)$ により定義すると，f_a は連続写像であることを示せ．

198. 次の写像はいずれも連続であることを示せ．ただし $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ である．

(1) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\ +\ } & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$　(2) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\ -\ } & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & -a \end{array}$

(3) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times & \xrightarrow{\ \times\ } & \mathbb{R}^\times \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$　(4) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$

見直し

位相群の定義をどこかにまとめる?

199. 次の写像はいずれも連続であることを示せ．

(1) $\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\times\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\ +\ } & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$

(2) $\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\ -\ } & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$

一般に, 群 G が位相空間であり, 積および逆元をとる写像が連続であるとき, G を<u>位相群</u>という．

200. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉集合であることおよび, 部分群であることを示せ．このようなものを<u>閉部分群</u>という．

201. $I=[0,1]$, $X_i=\mathbb{R}$, $(\forall i\in I)$ により与えられる位相空間の族 $\{X_i\}_{i\in I}$ の直積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ を，（集合として）$\mathbb{R}^I=\{f\colon I\to\mathbb{R}\}$ と同一視する．このとき次は同値であることを示せ．

(1) $\prod_i X_i$ の点列 $\{f_n\}$ が $f\in\prod_i X_i$ に収束する

(2) 各 $x\in I$ において $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ である

見直し

202. X を $\mathbb{R}$ 上のノルム空間, X^* をその共役空間とし, Λ を X の基底とする.

(1) ベクトル空間として $\mathrm{Hom}(X,\mathbb{R}) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathrm{Hom}(\mathbb{R}\lambda,\mathbb{R}) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{R}$ と自然に同一視されることを示せ.

(2) 上の同一視により $X^* \subset \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{R}$ とみて, X^* に直積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{R}$ からの相対位相をいれたとき, 任意の $f_0 \in X^*$ に対し

$$\{f \in X^* \mid |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon\}$$

は基本近傍系であることを示せ.

この位相を汎弱位相という.

3.8.3 商空間

3.8.4 誘導位相

見直し

終位相, 始位相

第 4 章

位相空間の性質

第 5 章

試験問題

99/1

1 i) $f(A \cap B) \subsetneqq f(A) \cap f(B)$ となる例を述べよ.

ii) A を X の真の部分集合 $(A \subsetneqq X)$ とする．このとき $f\colon X \to A$ で単射となる例を作れ.

2 i) A を可算集合, B を有限集合とする．このとき $A \cup B$ は可算集合になることを示せ．ただし $A \cap B = \emptyset$ とする.

ii) A, B を可算集合とする．このとき $A \cup B$ は可算集合になることを示せ．ただし $A \cap B = \emptyset$ とする.

3 A の巾集合 $P(A)$ と $2^A = \{f \mid f\colon A \to \{0,1\}\}$ は 1 対 1 に対応することを示せ.

4 $\mathbb{R} \supset A, B$ であり $\max A, \min A, \max B, \min B$ が存在するとする.

i) $A \subset B$ ならば $\max A \le \max B$ かつ $\min A \ge \min B$ となることを示せ.

ii) 逆は成り立つか．すなわち $\max A \le \max B$ かつ $\min A \ge \min B$ ならば $A \subset B$ となるか.

5 $\mathbb{R} \supset A$ が次の集合のとき $\max A, \min A, \sup A, \inf A$ を求めよ.

i) $A = (0, 1]$.

ii) $A = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

99/2

6 次の関数は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

i) $f(x, y) = |x^2 - y^2|$

ii) $f(x,y) = (x-y)^2$

iii) $f(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ X を集合とし,d_1, d_2 を X 上の距離関数とする.

i) $x, y \in X$ に対し $d(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ で与えられる関数は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $X \supset A$ を部分集合とし,$\delta(A), \delta_1(A), \delta_2(A)$ をそれぞれ d, d_1, d_2 で計った A の直径とする. すなわち

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$$

$$\delta_1(A) = \sup\{d_1(x,y) \mid x, y \in A\}$$

$$\delta_2(A) = \sup\{d_2(x,y) \mid x, y \in A\}$$

このとき $\delta(A) = \max\{\delta_1(A), \delta_2(A)\}$ であることを示せ.

iii) $d'(x,y) = \min\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ で与えられる関数 d' は必ずしも X 上の距離関数になるとは限らない. 距離関数になる例と, ならない例を一つずつ挙げよ.

99/3

$\boxed{\mathbf{8}}$ $\mathbb{R} \supset A = [0,1) \cup (1,2]$ とする.

i) $\mathbb{R}$ を普通の距離で距離空間とみたとき,A の内部, 外部, 境界, 閉包, 導集合を求めよ.

ii) $\mathbb{R}$ に離散位相をいれたとき,A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

iii) $\mathbb{R}$ に密着位相をいれたとき,A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

(解答のみでよい. 証明は不要.)

$\boxed{\mathbf{9}}$ $\mathbb{R}$ に離散位相, 密着位相をいれたとき,$\mathbb{R}$ の点列 $x_n = \frac{1}{n}$ の極限値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{10}}$ (X, d) を距離空間,$\{x_n\}$ を X の点列,a を X の点とする.

i) 点列 $\{x_n\}$ が点 a に収束することの定義を述べよ.

ii) $\mathfrak{u}^*(a)$ を a の基本近傍系とする. このときつぎの 2 条件は同値であることを示せ.

a) $x_n \to a \quad (n \to \infty)$

b) 任意の $U \in \mathfrak{u}^*(a)$ に対しある番号 $N \in \mathbb{N}$ が存在して,$n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる.

11 i) $A \subset X$,A に相対位相をいれると, 包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X$ は連続であることを示せ.

ii) 連続写像 $f\colon X \to Y$ で開写像とならない例を述べよ.

99/4

12 $\mathbb{R} \supset A$ が次の集合のとき $\max A, \min A, \sup A, \inf A$ を求めよ. (解答のみでよい. 証明は不要.)

i) $A = (0, 1]$

ii) $A = \{\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

13 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をともに連続写像とする. このとき $F(x) = (f(x), g(x))$ で定義される写像 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は連続であることを示せ.

14 $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ に $\mathbb{R}$ の部分空間として距離をいれる.

i) $x_n = \frac{1}{n}$ で定まる $(0, 1]$ の点列 $\{x_n\}_{n \in N}$ は基本列であることを示せ.

ii) $(0, 1]$ は完備ではないことを示せ.

15 X を Hausdorff 空間とする.

i) X の部分集合 A, B がともにコンパクトならば $A \cup B$ もコンパクトであることを示せ.

ii) X の部分集合 A がコンパクトならば A は X の閉集合であることを示せ.

16 i) $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ はコンパクトではないことを示せ.

ii) $\mathbb{R}$ はコンパクトではないことを示せ.

00/1

17 $f\colon X \to X$ で f は全射であるが, 単射とならない例を作れ.

18 i) X を可算集合, A を X の部分集合とする. このとき A が可算集合で $X - A$ が可算集合となる例を作れ.

ii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合になることを示せ.

19 $2^{\mathbb{N}}$ は可算でないことを示せ.

20

$$A = \left\{ \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \quad \middle| \quad m, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

とする.

i) $\sup A$ を求めよ. (求める過程も書け.)

ii) $\max A, \min A, \inf A$ を求めよ. (答だけでよい.)

21 実数列 $\{a_n\}$ が収束列で $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ であるとすると, ある番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ ならば $a_n > 0$ となることを示せ.

00/2

22 $\overline{\mathbb{N}} = \{n \mid n$ は $n \geq 2$ となる自然数 $\}$ とする. $\overline{\mathbb{N}}$ の元 a, b について, $b \leq a$ を $b = ax,\ x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ と定義する. このとき $\overline{\mathbb{N}}$ の最大, 最小, 極大, 極小元を求めよ.

23 i) A を集合とし, $B \subsetneqq A$ で, B は可算集合とする. このとき $A - B$ と A が対等になる A, B の例を作れ.

ii) A を集合とする. $P(A)$ と 2^A は対等になることを示せ.

24 i) 帰納的順序集合の定義を述べ, Zorn の Lemma を書け.

ii) Λ を全順序集合とし, $\{G_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考える. ただし各 G_λ は群であり, $\lambda \leq \mu$ のとき $G_\lambda \subseteq G_\mu$ とする. ここで G_λ は G_μ の部分群とする. このとき

$$G = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$$

は群になることを示せ.

25 次の関数は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

i) $f(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

ii) $f(x, y) = (x - y)^4$

26 X を集合とし,d_1, d_2 を X 上の距離関数とする.

i) $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$ で与えられる関数 d は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $X \supset A, B$ を部分集合とする. d, d_1, d_2 で計った A と B の距離について次の不等式が成り立つことを示せ.

$$d(A, B) \geq d_1(A, B) + d_2(A, B)$$

iii) 上の不等式で等号が成り立たない例を挙げよ.

00/3

27 X を位相空間とする.

i) O_i が X の開集合であるが, $\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$ は開集合とならない例を挙げよ.

ii) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を X の閉集合とするとき, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ は閉集合になることを示せ.

28 X を位相空間とする.

i) $x \in X$ とする. x の近傍の定義及び x の基本近傍系の定義を述べよ.

ii)『$X \supset O$ が開集合である $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ について, $x \in U \subset O$ となる近傍 U が存在する.』を示せ.

29 (X, d) を距離空間とする.

i) $\mathcal{U}^*(x) = \{U_{\frac{1}{n}}(x) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ は x の基本近傍系であることを示せ.

ii) $X \supset A$ を部分集合とする. $x \in X$ が A の集積点であることの定義を述べよ.

iii)『$x \in X$ が A の集積点である $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $0 < d(x, a_n) < \frac{1}{n}$ となる A の点 $a_n \in A$ が存在する.』を示せ.

30 X を距離空間, $X \supset A, B$ を部分集合とする. $A \subset B$ ならば $A^a \subset B^a$ を示せ. (ただし A^a は A の閉包.)

02/1

31 次を示せ.

i) A, B を可算集合, $A \cap B = \emptyset$ とする. このとき $A \cup B$ も可算.

ii) X を非可算集合, A を可算集合, $A \subset X$ とする. このとき $X - A$ も非可算集合となる.

iii) X を非可算集合, A を可算集合, $A \subset X$ とする. このとき X と $X - A$ の濃度は等しい.

32

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

とする.

i) $\max A$ が存在しないことを示せ.

ii) $\min A, \inf A, \sup A$ を求めよ. (答だけでよい.)

$\boxed{\textbf{33}}$ i) $A \subset B \subset \mathbb{R}$ とし,

$$U_A = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A \text{ に対し } x \geq a\}$$

$$U_B = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall b \in B \text{ に対し } x \geq b\}$$

をそれぞれ A, B の上界全体とする．このとき $U_A \supset U_B$ を示し，$\sup A \leq \sup B$ を示せ.

ii) $A_n \subset \mathbb{R}$, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ は有界であるとする.
$B = \{\sup A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ とする．このとき $\sup A$ は B の上界であること及び $\sup B$ は A の上界であることを示し，$\sup A = \sup B$ を示せ.

$\boxed{\textbf{34}}$ 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束列で $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $a > b$ であるとすると, ある番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ ならば $a_n > b_n$ となることを示せ.

02/2

$\boxed{\textbf{35}}$ p を素数とする．$0 \neq x \in \mathbb{Z}$ について, $p^{\alpha}|x$ だが $p^{\alpha+1} \not| x$ となる 0 以上の整数 α を $v_p(x)$ とする．$v_p(0) = \infty$ とする.
$x, y \in \mathbb{Z}$ について, $x \leq y$ を $v_p(x) \geq v_p(y)$ と定義する ($*$).
このとき ($*$) の関係が, 順序関係のみたすべき 3 つの条件についてそれぞれ, みたす場合は証明し, みたさない場合は反例を挙げよ.

$\boxed{\textbf{36}}$ i) A, B を可算集合, $A \cap B = \emptyset$ とする．このとき $A \cup B$ も可算.

ii) $\mathbb{R}$ 上の互いに交わらない空でない開区間は, どううまくとっても高々可算個しかとれないことを示せ.

$\boxed{\textbf{37}}$ i) n を自然数とする．$\sup\{\frac{(-1)^k}{k} \mid k \geq n\}$ を求めよ.

ii) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について $\limsup a_n$ を求めよ.

(どちらも求める過程も書け.)

$\boxed{\textbf{38}}$ 次の関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

i) $f(x, y) = x^2 + y^2$

ii) $f(x, y) = (x - y)^{100}$

iii) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を単射とするとき $f(x, y) = |g(x) - g(y)|$

02/3

$\boxed{\textbf{39}}$ i) X を位相空間とする．U が x の近傍である定義を述べよ．又, 基本近傍系 $\mathcal{U}'(x)$ の定義を述べよ.

ii) X を位相空間, $X \supset A$ を部分集合, $\mathcal{U}(x)$ を $x \in X$ の近傍系とする. このとき次を示せ.

(1) ある $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して $U \subset A$ となる. $\Leftrightarrow$ x を含む開集合 O が存在して $O \subset A$ となる.

(2) $X \supset O$ が開集合. $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in O$ について, ある $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して $U \subset O$ となる.

$\boxed{\textbf{40}}$ X を距離空間とする. このとき次の問に答よ.

i) $X \supset O$ が開集合の定義を書け. 又, O_1, O_2 が開集合であるとき, $O_1 \cap O_2$ も開集合になることを示せ.

ii) $\varepsilon > 0$ とする. $x \in X$ の ε-近傍 $U_\varepsilon(x)$ は開集合になることを示せ.

$\boxed{\textbf{41}}$ X, Y を距離空間, $f\colon X \to Y$ を写像とするとき次を示せ.
『Y の任意の開集合 O について, $f^{-1}(O)$ は X の開集合. $\Leftrightarrow$ 任意の $y \in Y$ と任意の $\varepsilon > 0$ について, $f^{-1}(U_\varepsilon(y))$ は X の開集合.』

02/4

$\boxed{\textbf{42}}$ i) X を位相空間, $X \supset A$ を部分集合とする. A の相対位相の定義を述べよ.

ii) X, Y を位相空間, $X \supset A$, $Y \supset B$ をそれぞれ部分集合とする. 写像 $f\colon X \to Y$ が連続で $f(A) \subset B$ とすると, A, B に相対位相をいれたとき, $f\colon A \to B$ は連続であることを示せ.

$\boxed{\textbf{43}}$ i) 位相空間における点列の収束の定義を述べよ.

ii) (X, d) を距離空間, $X \supset F$ を閉集合とする. X の点列 $\{x_n\}$ が, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $x_n \in F$ であるとする. このとき $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束すれば, $x \in F$ であることを示せ.

iii) $\mathbb{R} \supset A$ は有界閉集合であるとする. このとき $\max A$ が存在することを示せ. (Hint. $\sup A$ を考えよ.)

03/1

$\boxed{\textbf{44}}$ 次の命題が正しければ証明し, 間違っていたら反例を与えよ.

i) $f\colon X \to X$ が単射ならば全射である.

ii) $f\colon X \to Y$ を写像, $X = A \cup B$, $Y = C \cup D$ で $f(A) \subset C$, $f(B) \subset D$ とする. $f\colon A \to C$, $f\colon B \to D$ が単射ならば, $f\colon X \to Y$ は単射である.

$\boxed{\textbf{45}}$ i) X を可算集合, A を X の部分集合とする．このとき A が可算集合で $X - A$ が可算集合となる例を作れ.

ii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合になることを示せ.

$\boxed{\textbf{46}}$ 次を普通の文にせよ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \; \{x + y \geq 0\}$$

$\boxed{\textbf{47}}$

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

とする.

i) $\inf A$ を求めよ．(求める過程も書け.)

ii) $\min A, \max A, \sup A$ を求めよ．(答だけでよい.)

$\boxed{\textbf{48}}$ $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない, 上に有界な部分集合とし，$AB \subset \mathbb{R}$ を

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

により定める.

任意の $a \in A$ について $a \geq 0$, かつ任意の $b \in B$ について $b \geq 0$ であるとする.

i) $\sup AB \leq \sup A \cdot \sup B$ を示せ.

ii) $\sup AB = \sup A \cdot \sup B$ を示せ.

$\boxed{\textbf{49}}$ 実数列が収束列であれば, 有界であることを示せ.

03/2

$\boxed{\textbf{50}}$ i) $f\colon X \to Y$ を写像とする．$x, y \in X$ について, $x \sim y$ を $f(x) = f(y)$ と定義する．このとき関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ とし, 写像 $f\colon X \to Y$ を $f(1) = f(2) = f(3) = 1$, $f(4) = f(5) = 2$, $f(6) = 3$ で定義するとき, (i) の同値関係での同値類の集合 $X/{\sim} = \{X_x | x \in X\}$ 及びその代表元を書け.

$\boxed{\textbf{51}}$ i) 順序集合 X で, 最大元は存在しないが, 極大元が存在する例を挙げよ.

ii) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ とし, X, Y に自然数の大小で順序を入れる. 次の条件 $(\star)$ をみたすような写像 $f\colon X \to Y$ の例をひとつ挙げよ.

$(\star)$「 f は全射であり, $x \leq y$ である任意の $x, y \in X$ について $f(x) \leq f(y)$ となる.」

iii) 上の (ii) において, 条件 $(\star)$ をみたすような写像 f はいくつあるか.

$\boxed{\mathbf{52}}$ i) $f(x,y) = (x-y)^6$ で定義される関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

ii) X を集合, d_1, d_2 を X 上の距離関数, a_1, a_2 を正の実数とする. このとき $d(x,y) = a_1 d_1(x,y) + a_2 d_2(x,y)$ で定義される関数 d は X 上の距離関数になるか.

$\boxed{\mathbf{53}}$ (X,d) を距離空間, $X \supset A, B$ を空でない部分集合とする.

i) A, B ともに有界ならば $A \cup B$ も有界であることを示せ.

ii) $d(A,B) = 0$ かつ $A \cap B = \emptyset$ である例を挙げよ.

$\boxed{\mathbf{54}}$ (X,d) を距離空間とする. X から有限個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ を除いた集合

$$X - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

は X の開集合であることを示せ.

03/22

$\boxed{\mathbf{55}}$ i) $f\colon X \to Y$ を写像とする. $x, y \in X$ について, $x \sim y$ を $f(x) = f(y)$ と定義する. このとき関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Y = \{1,2,3\}$ とし, 写像 $f\colon X \to Y$ を $f(1) = f(2) = f(3) = 1$, $f(4) = f(5) = 2$, $f(6) = 3$ で定義するとき, (i) の同値関係での同値類の集合 $X/{\sim} = \{X_x | x \in X\}$ 及びその代表元を書け.

$\boxed{\mathbf{56}}$ i) 順序集合 X で, 最大元は存在しないが, 極大元が存在する例を挙げよ.

ii) $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{1,2,3\}$ とし, X, Y に自然数の大小で順序を入れる. 次の条件 $(\star)$ をみたすような写像 $f\colon X \to Y$ の例をひとつ挙げよ.

$(\star)$ 「f は全射である. また $x \leq y$ である任意の $x, y \in X$ について $f(x) \leq f(y)$ となる.」

iii) 上の (ii) において, 条件 $(\star)$ をみたすような写像 f はいくつあるか.

$\boxed{\mathbf{57}}$ 帰納的順序集合の定義を述べ, Zorn の Lemma を書け.

$\boxed{\mathbf{58}}$ i) $f(x,y) = (x-y)^6$ で定義される関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

ii) X を集合, d_1, d_2 を X 上の距離関数, a_1, a_2 を正の実数とする. このとき $d(x,y) = a_1 d_1(x,y) + a_2 d_2(x,y)$ で定義される関数 d は X 上の距離関数になるか.

$\boxed{\mathbf{59}}$ (X,d) を距離空間とする. X から有限個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ を除いた集合

$$X - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

は X の開集合であることを示せ.

04/2

$\boxed{\mathbf{60}}$ $\mathbb{R}$ における関係 $\sim$ を, $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$ により定める.

i) 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) 集合 $\mathbb{R}/\!\sim$ はどのような集合か.

$\boxed{\mathbf{61}}$

i) X を順序集合とする. $a \in X$ について $X(a) = \{x \mid a \leq x\}$ とする. $Y \subset X(a)$ をとり, $\alpha = \sup_X Y$ が存在したとすると, $\alpha = \sup_{X(a)} Y$ を示せ.

ii) 帰納集合でない集合の例を挙げよ (理由も示せ).

iii) $X \neq \emptyset$ を帰納集合とすると, 任意の $a \in X$ について, $a \leq x_0$ となる X の極大元 x_0 が存在することを Zorn の補題を使い示せ.

$\boxed{\mathbf{62}}$ 0 か 1 からなる数列で 1 は有限個しかないようなもの全体のなす集合

$$S = \big\{\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \mid a_i \text{ は } 0 \text{ か } 1,\ a_i \text{ のうち } 1 \text{ であるのは有限個}\big\}$$

を考える. S は可算集合であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{63}}$

i) $f(x,y) = (x-y)^{10}$ で定義される関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

ii) $f(x,y) = x^2 + y^2$ で定義される関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

iii) X を集合, (Y, d_Y) を距離空間, $g\colon X \to Y$ を単射とする. このとき $d(x,x') = d_Y(g(x), g(x'))$ で定義される関数 d は X 上の距離関数になるか.

04/3

$\boxed{\mathbf{64}}$ $\mathbb{R} \supset A = (0,1] \cup \{2\}$ とする.

i) $\mathbb{R}$ に離散位相をいれたとき, A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

ii) $\mathbb{R}$ に密着位相をいれたとき, A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

iii) $\mathbb{R}$ に Z-位相をいれたとき, A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

iv) $\mathbb{R}$ をユークリッド距離で距離空間とみたとき, A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

(解答のみでよい. 証明は不要.)

65 i) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $X \supset A$ を部分集合とする．A の相対位相の定義を書け．

ii) $\mathbb{R}$ にユークリッド位相をいれる．集合 $(0,1] \cup [2,3]$ が A の相対位相で開集合となるような, $\mathbb{R}$ の部分集合 A をひとつ挙げよ．

66 X を位相空間 $X \supset A$ を部分集合とする．A の閉包 A^a を

$$A^a = \{x \in X \mid U \cap A \neq \emptyset,\ \forall U \in \mathcal{U}(x)\}$$

で定義する．ここで $\mathcal{U}(x)$ は x の近傍系．

i) $\mathcal{U}'(x)$ を x の基本近傍系とする．このとき次の a,b が同値であることを示せ．

a) $x \in A^a$

b) $U \cap A \neq \emptyset,\ \forall U \in \mathcal{U}'(x)$

ii) (X, d) を距離空間とする．このとき次の a,b が同値であることを示せ．

a) A が X で稠密である．

b) 任意の $x \in X$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, (x と n に応じて) ある $a \in A$ が存在して $d(x,a) < 1/n$ となる．

04/4

67 X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする．

i) $f\colon X \to Y$ が連続の定義 (近傍による) を書け．

ii) $A \subset X$ を X の部分集合とする．$f\colon X \to Y$ が連続であるとき, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ を示せ．ただし $\overline{A}$ は A の閉包をあらわす．

iii) $f\colon X \to Y$ が連続で, $f(\overline{A}) \subsetneq \overline{f(A)}$ となる例を作れ．また, 作った A はコンパクトになるかどうかも述べよ．

68 i) X を位相空間, $X \supset A, B$ をコンパクトとするとき, $A \cup B$ もコンパクトになることを示せ．

ii) X を Hausdorff 空間, $X \supset A, B$ をコンパクトとするとき, $A \cap B$ もコンパクトになることを示せ．

69 i) X を連結な位相空間, $f\colon X \to \{0,1\}$ を連続写像とする．ただし $\{0,1\}$ には離散位相がはいっているものとする．このとき f は全射ではないことを示せ．

ii) 位相空間 X の各連結成分は閉集合であることを示せ．

iii) X を位相空間で, 任意の $x \in X$ が連結な近傍をもつものとする．このとき X の各連結成分は開集合であることを示せ．

70 i) X を距離空間, 写像 $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ は点 $a \in X$ で連続とする．$f(a) > g(a)$ ならば a の近傍 U で, $f(x) > g(x) \quad (\forall x \in U)$ となるものがとれることを示せ．

ii) 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ から 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ への写像 $p_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ を $p_i(x_1, x_2) = x_i$ により定める．距離空間 X からの写像 $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ について, $p_1 \circ f$, $p_2 \circ f$ がともに連続ならば, f も連続であることを示せ．

iii) 線型写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は連続であることを示せ．ただし $\mathbb{R}^2$ は自然に $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考える．

05/1

71 i) $f\colon X \to Y$ を写像, $A_n \subset Y$, $n = 1, 2, \ldots$ を部分集合とする．このとき次を示せ．

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

ii) 写像 $f\colon X \to \mathbb{R}$ と $a \in \mathbb{R}$ について次を示せ．

$$\{x \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \;\middle|\; f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}$$

72 A, B を集合, $i\colon A \to B$ を写像とする．次の 2 条件 (1), (2) が同値であることを示せ．

(1) $i\colon A \to B$ は単射

(2) 任意の集合 X と任意の写像 $f, g\colon X \to A$ について次をみたす．『$if = ig$ ならば $f = g$』

73 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ の間の全単射を具体的にひとつ作れ．

74 $A \subset \mathbb{R}$ が次の集合であるとき $\sup A, \max A, \inf A, \min A$ を求めよ．(答のみでよい.)

i) $A = \left\{1 + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

ii) $A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

iii) $A = \left\{\sin \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

75 $A_n \subset \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ を部分集合, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ は有界であるとする．$a_n = \inf A_n$ とおく．次の不等式が正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ．

i) $\inf A \leq \inf_n \{a_n\}$

ii) $\inf A \geq \inf_n \{a_n\}$

05/2

76 i) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は可算集合ではないことを示せ．ただし $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は $\mathbb{N}$ のべき集合をあらわす．

ii) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の部分集合 $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ を

$$\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \left\{A \mid A \subset \mathbb{N},\ A \text{ は有限集合}\right\}$$

で定める．このとき $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ は可算集合であることを示せ．

77 i) 帰納集合の定義を書け．

ii) 帰納集合でない順序集合の例をあげよ．

78 Zorn の補題を用いて, $\mathbb{R}$ の部分集合 H で, 次の条件をみたすものが存在することを示せ．

(条件) 任意の $r \in \mathbb{R}$ は有限個の $h_1, \ldots, h_n \in H$ と有限個の $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ を用いて,

$$r = q_1 h_1 + q_2 h_2 + \cdots + q_n h_n$$

とただひととおりに表せる．

79 (X, d) を距離空間, $x, y \in X$, r, s を正の実数とする．

i) $d\left(U_r(x), U_s(y)\right) \geq \max\{d(x,y) - r - s, 0\}$ を示せ．ただし $U_r(x)$ は x を中心とする半径 r の開球を表す．

ii) $d\left(U_r(x), U_s(y)\right) = d(x,y) - r - s$ となる例をあげよ．

iii) $d\left(U_r(x), U_s(y)\right) > \max\{d(x,y) - r - s, 0\}$ となる例をあげよ．

80 (X, d) を距離空間, A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, B を X の部分集合とし, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $r_n = d(A_n, B)$ とおく．このとき次の等式を示せ．

$$d(A, B) = \inf_n \{r_n\}$$

05/3

81 X を位相空間とする．

i) 任意の $x \in X$ について $\{x\}$ が開集合であるとする．このとき X は離散位相空間であることを示せ．

ii) 任意の $x \in X$ について $\{x\}$ が閉集合であるとき, X は離散位相空間であるか. (理由も述べよ.)

82 間違い

X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合, $U \subset X$ を $x \in X$ の近傍とする. このとき, $A \cap U = \emptyset$ ならば $\overline{A} \cap U = \emptyset$ であることを示せ.
ただし $\overline{A}$ は A の閉包を表す.

83 X を位相空間, A, B をともに X の稠密な部分集合とする.

i) $A \cup B$ も X で稠密であることを示せ.

ii) A が開集合であるとき, $A \cap B$ も X で稠密であることを示せ.

iii) $A \cap B$ が X で稠密とはならない例を挙げよ.

84 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれる.

i) $A \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ は, A の開かつ閉集合であることを示せ.

ii) B は離散位相空間であることを示せ.

05/4

85 X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

i) $f\colon X \to Y$ が連続の定義 (近傍による) を書け.

ii) $A \subset X$ を X の部分集合とする. $f\colon X \to Y$ が連続であるとき, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ を示せ. ただし $\overline{A}$ は A の閉包をあらわす.

iii) $f\colon X \to Y$ が連続で, $f(\overline{A}) \subsetneq \overline{f(A)}$ となる例を作れ. また, 作った A はコンパクトになるかどうかも述べよ.

86 次を示せ.

i) X が離散空間でコンパクトであるならば,X は有限集合である.

ii) $X = \mathbb{R}$ に Z 位相をいれると X はコンパクトである.

87 i) X を連結な位相空間, $f\colon X \to \{0, 1\}$ を連続写像とする. ただし $\{0, 1\}$ には離散位相がはいっているものとする. このとき f は全射ではないことを示せ.

ii) 位相空間 X の各連結成分は閉集合であることを示せ.

iii) X を位相空間で, 任意の $x \in X$ が連結な近傍をもつものとする. このとき X の各連結成分は開集合であることを示せ.

06/1

88 X, Y, Z を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする．次の命題が正しければ証明し, 間違っていたら反例を与えよ.

i) $g \circ f\colon X \to Z$ が単射ならば $f\colon X \to Y$ は単射である.

ii) $g \circ f\colon X \to Z$ が単射ならば $g\colon Y \to Z$ は単射である.

iii) $g \circ f\colon X \to Z$ が全射かつ $g\colon Y \to Z$ が単射ならば $f\colon X \to Y$ は全射である.

89 A, B を集合, $p\colon A \to B$ を写像とする．次の 2 条件 (1), (2) が同値であることを示せ.

(1) $p\colon A \to B$ は全射

(2) 任意の集合 X と任意の写像 $f, g\colon B \to X$ について次をみたす．『$f \circ p = g \circ p$ ならば $f = g$』

90 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R} - 2\mathbb{Z}$ の間の全単射を具体的にひとつ作れ, ただし $2\mathbb{Z} = \{2l \mid l \in \mathbb{Z}\}$ は偶数全体のなす集合とする.

91 $A \subset \mathbb{R}$ が次の集合であるとき $\sup A, \max A, \inf A, \min A$ を求めよ．(答のみでよい.)

i) $A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

ii) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$

iii) $A = \left\{\sin n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

92 $A, B \subset \mathbb{R}$ を有界な部分集合, $A \cap B \neq \emptyset$ とする．このとき次の不等式を示せ.

$$\sup A \cap B \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

また等号が成立しない例を挙げよ.

06/2

93 X を空でない集合とする．写像 $f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が次の条件 **f1** $\sim$ **f4** をみたすとする．以下の問に答えよ.

$$\begin{cases} \textbf{f1}. \quad f(x,y) \geq 0 & (\forall x, y \in X) \\ \textbf{f2}. \quad f(x,x) = 0 & (\forall x \in X) \\ \textbf{f3}. \quad f(x,y) = f(y,x) & (\forall x, y \in X) \\ \textbf{f4}. \quad f(x,z) \leq f(x,y) + f(y,z) & (\forall x, y, z \in X) \end{cases}$$

i) X における関係 $\sim$ を, $x \sim y \Leftrightarrow f(x,y) = 0$ により定めると, $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) $x, x', y, y' \in X$ について, $x \sim x'$ かつ $y \sim y'$ ならば $f(x,y) = f(x',y')$ であることを示せ.

iii) Y を, 同値関係 $\sim$ による, X の商集合 $Y = X/{\sim}$ とする. 写像 $d\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ を $d([x],[y]) = f(x,y)$ により定めると, d は Y 上の距離関数であることを示せ. ただし, $[x]$ は, x の同値類をあらわす.

94 $\overline{\mathbb{N}} = \{n \mid n$ は $n \geq 2$ である自然数 $\}$ とする. $\overline{\mathbb{N}}$ の元 a, b について, $b \leq a$ を $b = ax$, $x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ と定義する. このとき $\overline{\mathbb{N}}$ の最大, 最小, 極大, 極小元を求めよ.

95 X を空でない順序集合とする.

i) $\mathcal{S} = \{A \mid \emptyset \neq A \subset X,\ A$ は全順序部分集合$\}$ とし, $\mathcal{S}$ に包含関係で順序をいれる. このとき $\mathcal{S}$ は帰納集合であることを示せ.

ii) X は, 包含関係に関して極大な, 全順序部分集合を持つことを示せ.

96 次の関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか, 理由をつけて答えよ.

i) $f(x,y) = (x-y)^2$

ii) $f(x,y) = |x^3 - y^3|$

06/22

97 X, Y を空でない集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 以下の問に答えよ.

i) X における関係 $\sim$ を, $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ により定めると, $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) $\overline{X}$ を, 同値関係 $\sim$ による, X の商集合 $\overline{X} = X/{\sim}$ とする. 写像 $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ を $\overline{f}([x]) = f(x)$ により定めると, f は単射であることを示せ. ただし, $[x]$ は, x の同値類をあらわす.

iii) $f\colon X \to Y$ が全射であれば, $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ は全単射であることを示せ.

98 $\overline{\mathbb{N}} = \{n \mid n$ は $n \geq 2$ である自然数 $\}$ とする. $\overline{\mathbb{N}}$ の元 a, b について, $b \leq a$ を $b = ax$, $x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ と定義する. このとき $\overline{\mathbb{N}}$ の最大, 最小, 極大, 極小元を求めよ.

99 X を空でない順序集合とする.

i) $\mathcal{S} = \{A \mid \emptyset \neq A \subset X,\ A$ は全順序部分集合$\}$ とし, $\mathcal{S}$ に包含関係で順序をいれる. このとき $\mathcal{S}$ は帰納集合であることを示せ.

ii) X は, 包含関係に関して極大な, 全順序部分集合を持つことを示せ.

$\boxed{\mathbf{100}}$ 次の関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか, 理由をつけて答えよ.

i) $f(x,y) = (x-y)^2$

ii) $f(x,y) = |x^3 - y^3|$

06/3

$\boxed{\mathbf{101}}$ $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A を $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ により定める.

i) $\mathbb{R}^2$ をユークリッド距離で距離空間とみたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ.

ii) $\mathbb{R}^2$ に離散位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ.

iii) $\mathbb{R}^2$ に密着位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ.

(解答のみでよい．証明は不要.)

$\boxed{\mathbf{102}}$ X を距離空間とする．O_1, O_2 が X の開集合であるならば $O_1 \cap O_2$ も開集合であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{103}}$ i) X を位相空間とする．U が x の近傍である定義を述べよ．又, 基本近傍系 $\mathcal{U}'(x)$ の定義を述べよ.

ii) X を位相空間, $\mathcal{U}'(x)$ を $x \in X$ の基本近傍系とする．このとき次を示せ.

$X \supset O$ が開集合. $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in O$ について, ある $U \in \mathcal{U}'(x)$ が存在して $U \subset O$ となる.

06/4

$\boxed{\mathbf{104}}$ X を位相空間, $X = A_1 \cup A_2$ として, A_1, A_2 には, X からの相対位相をいれる．また, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

i) $f|_{A_i}\colon A_i \to Y$ $(i=1,2)$ は連続であるが,

$f\colon X \to Y$ は連続ではない例をあげよ.

ii) A_1, A_2 が X の閉集合であるとき, 次を示せ.

$f|_{A_i}\colon A_i \to Y$ $(i=1,2)$ が連続 $\Rightarrow$ $f\colon X \to Y$ が連続.

$\boxed{\mathbf{105}}$ X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

i) X は Hausdorff 空間であることを示せ.

ii) A がコンパクトならば, A は X の閉集合であることを示せ.

iii) A がコンパクトならば, A は有界であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{106}}$ X をコンパクトな距離空間とする.

i) $\{a_n\}$ を X の点列とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，X の部分集合 A_n および F_n を $A_n = \{a_i\}_{i \geq n}$, $F_n = A_n^a$ により定める．ただし A_n^a は A_n の閉包をあらわす．このとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$$

であることを示せ．

ii) $\{a_n\}$ が基本列ならば，$\lim_{n\to\infty} \delta(A_n) = 0$ であることを示せ．ただし $\delta(A_n)$ は A_n の直径をあらわす．

iii) X は完備であることを示せ．

107 $\mathbb{R}$ は 1 次元ユークリッド空間をあらわすものとする．

i) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする．$f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ を連続関数とし，$f(a) < f(b)$ であるとする．このとき $f(a) < \alpha < f(b)$ である任意の実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$a < c < b$, $f(c) = \alpha$ となるような実数 $c \in \mathbb{R}$ が存在すること（中間値の定理）を示せ．ただし閉区間 $[a, b]$ が連結であることは認めてよい．

ii) 連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の像 $f(\mathbb{R})$ が高々可算な集合であるならば，f は定数関数であることを示せ．

iii) 連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で，有理数を無理数に，無理数を有理数に写すもの，すなわち $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^c$, $f(\mathbb{Q}^c) \subset \mathbb{Q}$ となるものはあるか．

07/1

108 i) X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．$A \subset X$, $B \subset Y$ について次を示せ．

$$f\left(f^{-1}(B) \cap A\right) = B \cap f(A)$$

ii) X を集合，$f\colon X \to \mathbb{R}$ を写像とする．$a \in \mathbb{R}$ について次を示せ．

$$\{x \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \;\middle|\; f(x) < a + \frac{1}{n} \right\}$$

109 i) $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の濃度が等しいことを示せ．

ii) 閉区間 $[0, 1]$ と $[0, 3]$ の濃度が等しいことを示せ．

110 $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な部分集合とする．このとき次を示せ．

$$\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}$$

111 $k \in \mathbb{N}$ とする.

$$a_n = \sin \frac{n\pi}{k}$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ の上極限 $\limsup a_n$ と下極限 $\liminf a_n$ を求めよ.

07/2

112 X を集合とし,d_1, d_2 を X 上の距離関数とする.

i) $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$ で与えられる関数 d は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $X \supset A, B$ を部分集合とする. d, d_1, d_2 で計った A と B の距離について次の不等式が成り立つことを示せ.

$$d(A, B) \geq d_1(A, B) + d_2(A, B)$$

iii) 上の不等式で等号が成り立たない例を挙げよ.

113 X, Y を空でない集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 以下の問に答えよ.

i) X における関係 $\sim$ を, $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ により定めると, $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) $\overline{X}$ を, 同値関係 $\sim$ による, X の商集合 $\overline{X} = X/{\sim}$ とする. 写像 $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ を $\overline{f}([x]) = f(x)$ により定めると, f は単射であることを示せ. ただし, $[x]$ は, x の同値類をあらわす.

iii) $f\colon X \to Y$ が全射であれば, $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ は全単射であることを示せ.

114 i) 帰納的順序集合の定義を述べよ.

ii) Zorn の Lemma を書け.

iii) 帰納的順序集合ではない順序集合の例を挙げよ.

07/3

115 X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. $x \in X$ に対し, $\mathcal{U}(x)$ を x の近傍系, $\mathcal{U}'(x)$ を x の基本近傍系とする.

i) $x \in A$ とする. このとき次の (a), (b) は同値であることを示せ.

a) ある $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して, $U \subset A$.

b) ある $V \in \mathcal{U}'(x)$ が存在して, $V \subset A$.

ii) 任意の $x \notin A$ に対してある近傍 $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して $U \cap A = \emptyset$ となるならば, A は閉集合であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{116}}$ $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とし, X の部分集合 A を $A = \{x \in X \mid x < 1\}$ により定める.

i) X に 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ.

ii) X に離散位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ.

iii) X に密着位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ.

(解答のみでよい．証明は不要.)

$\boxed{\mathbf{117}}$ X を距離空間とする．F_i $(i = 1, 2, \ldots)$ が X の閉集合であるならば $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} F_i$ も閉集合であることを示せ.

07/4

$\boxed{\mathbf{118}}$ $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$ および $A \cup \{0\}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれる.

i) A はコンパクトでない事を示せ.

ii) $A \cup \{0\}$ はコンパクトであることを示せ.

$\boxed{\mathbf{119}}$ X を距離空間, $A \subset X$ を閉集合, $x \in X$ とする.

i) $x \notin A$ ならば, $d(x, A) > 0$ であることを示せ.

ii) $B \subset X$ がコンパクトで $A \cap B = \emptyset$ ならば, $d(A, B) > 0$ であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{120}}$ X を位相空間とする．また集合 $\{0, 1\}$ に離散位相をいれる.

i) X が連結であることと, $A \subset X$ が開かつ閉集合ならば $A = \emptyset$ または $A = X$ であることが同値であることを示せ.

ii) X が連結で, $f\colon X \to \{0, 1\}$ が連続写像ならば, f は全射ではないことを示せ.

iii) X が連結でないならば, 連続写像 $f\colon X \to \{0, 1\}$ で, 全射であるものが存在することを示せ.

08/1

$\boxed{\mathbf{121}}$ i) $\Delta = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とする．このとき, 具体的に全単射を作ることにより, Δ と $\mathbb{N}$ の濃度が等しいことを示せ.

ii) $A = \{(i, n) \mid n \in \mathbb{N},\ i = 1, 2\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とする．このとき, 具体的に全単射を作ることにより, A と $\mathbb{N}$ の濃度が等しいことを示せ.

iii) $2^{\mathbb{N}}$ は可算集合ではないことを示せ.

$\boxed{\mathbf{122}}$ i) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を集合の族とする．下極限 $\varliminf\limits_{n \to \infty} A_n$ の定義を述べよ.

ii) X を集合, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ を写像とする. 正実数 $\varepsilon > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し集合 $A_{n,\varepsilon} \subset X$ を

$$A_{n,\varepsilon} = \{x \mid x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

により定める. このとき次の (a),(b) は同値であることを示せ.

a) $x \in X$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ をみたす.

b) $x \in \displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0}\left(\varliminf_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}\right)$

123 i) $\limsup\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$ を求めよ. (求める過程も書け.)

ii) $A_n = \left[(-1)^n + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とするとき, $\displaystyle\varliminf_{n\to\infty} A_n$ を求めよ.

iii) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を有界な実数列で, $a_n < b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ をみたすものとし, $\limsup a_n = \alpha$, $\liminf b_n = \beta$, $A_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき $(\alpha, \beta) \subset \displaystyle\varliminf_{n\to\infty} A_n \subset [\alpha, \beta]$ であることを示せ.

124 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対し, $\overline{z}$ で z の共役を表し, $\arg z$ で z の偏角を表す. ただし, 偏角は $-\pi < \arg z \leq \pi$ の範囲で考える. また $||z|| = \sqrt{z\overline{z}}$ と定める. $\mathbb{C}$ の部分集合 S^1 を

$$S^1 = \{z \mid z \in \mathbb{C},\ ||z|| = 1\}$$

で定める. 次の関数 f は S^1 上の距離関数になるか.

i) $f(z, w) = ||z - w||$

ii) $f(z, w) = |\arg(z\overline{w})|$

08/2

125 X を集合とし,d_1, d_2 を X 上の距離関数とする.

i) $x, y \in X$ に対し $d(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ で与えられる関数は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $X \supset A$ を部分集合とし,$\delta(A), \delta_1(A), \delta_2(A)$ をそれぞれ d, d_1, d_2 で計った A の直径とする. このとき $\delta(A) = \max\{\delta_1(A), \delta_2(A)\}$ であることを示せ.

iii) $d'(x, y) = \min\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$ で与えられる関数 d' は必ずしも X 上の距離関数になるとは限らない. 距離関数になる例と, ならない例を一つずつ挙げよ.

08/3

126 次の内, 正しいものには証明をつけ, 正しくないものには反例を挙げよ．ただし, X, Y は位相空間, A, B は X の部分集合とする．

i) $\mathbb{R}$ の位相は一意的に定まる．

ii) X の任意の部分集合は, 開集合か閉集合である．

iii) 開集合かつ閉集合であるような X の部分集合はない．

iv) A に X からの相対位相をいれると, A の開集合は X でも開集合である．

v) $f\colon X \to Y$ を連続写像とすると, O が X の開集合であれば, $f(O)$ は Y の開集合である．

vi) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$．ただし A° で A の内部を表す．

127 $(X, \mathcal{O}_1)$, $(X, \mathcal{O}_2)$ を位相空間とする．このとき次の (a),(b) は同値であることを示せ．

(a) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$

(b) $\forall O \in \mathcal{O}_1$ と $\forall x \in O$ に対し, $x \in O_x \subset O$ となるような $O_x \in \mathcal{O}_2$ が存在する．

128 $X = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ とし, X の部分集合 A を $A = \{0\}$ により定める．(ii, iii は解答のみでよい．証明は不要．)

i) X の 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ からの相対位相は離散位相であることを示せ．

ii) X に離散位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包, 導集合を求めよ．

iii) X に密着位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包, 導集合を求めよ．

iv) X には離散位相, 密着位相以外にどのような位相がはいるか．

08/4

129 $A \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合とし, $[1, 2] \cup [3, 4]$, $\mathbb{Q}$ および A に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれる．

i) $[1, 2] \cup [3, 4]$ は連結ではないことを示せ．

ii) $\mathbb{Q}$ は連結ではないことを示せ．

iii) A が連結で $a, b \in A$, $a \leq b$ ならば $[a, b] \subset A$ であることを示せ．

iv) A が高々可算かつ連結であるならば A は一点からなる集合であることを示せ．

130 コンパクトの定義に基づき以下を示せ．

i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像, $A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ としたとき, $f(A)$ はコンパクトであることを示せ．

ii) 実数列 $\{a_n\}$ が収束列で, $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ であるとする．このとき $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{a\} \cup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ はコンパクトであることを示せ．

iii) 距離空間 X の部分集合 K がコンパクト $\Leftrightarrow$ 無数の開円盤の一組が, 全体として K を覆うならば, K はすでに, それらの開円盤の中の有限個だけで覆われる.

131 (X,d) を距離空間, $A \subset X$ を空でない閉集合とする. 関数 $d_A\colon X \to \mathbb{R}$ を $d_A(x) = d(x,A)$ で定義する.

i) $x \notin A \Leftrightarrow d_A(x) > 0$ を示せ.

ii) 任意の $x, x' \in X$ に対し, 不等式 $d(x,A) \leq d(x,x') + d(x',A)$ が成立することを示せ.

iii) d_A は一様連続であることを示せ.

iv) Y を位相空間, $K \subset Y$ をコンパクト部分集合とし, $f\colon Y \to X$ を連続写像で $f(K) \cap A = \emptyset$ であるものとする. このとき次の性質をもつ正の数 ε が存在することを示せ.

「写像 $g\colon Y \to X$ が $\sup_{y \in Y} d(f(y), g(y)) < \varepsilon$ をみたせば, $g(K) \cap A = \emptyset$ となる.

」

ただし, コンパクト集合上の連続関数が最小値をとるということはみとめてよい.

参考文献

[1] ケリー, 児玉之宏訳, 『位相空間論』, 吉岡書店

[2] 静間良二, 『位相』, サイエンス社

[3] 森田紀一, 『位相空間論』, 岩波全書

[4] J.L.Kelley, General Topology, Springer Verlag

[5]『数学辞典第 4 版』, 岩波書店

索引