位相空間問題集

琉球大学

2016 年 4 月 11 日

凡例

- $\mathbb{N}$: 自然数全体
  $\mathbb{Z}$: 整数全体
  $\mathbb{Q}$: 有理数全体
  $\mathbb{R}$: 実数全体
  $\mathbb{C}$: 複素数全体
  これらには, 必要ならば, 特にことわらないかぎり, 通常の加法, 乗法, 距離および（$\mathbb{C}$ を除いては）順序を与えるものとする.
- $\mathbb{R}^n$ の距離あるいは位相は, 特にことわらないかぎり, ユークリッド距離により定まるものとする.
- $A \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B$ は, 左辺 A を右辺 B で定義することを意味する.

目次

第 1 章

集合と写像

1.1 集合

【定義 **1.1.1**】 数や物の集まりを集合といい, 集合を構成している各々の数や物を要素または元(げん)という.

a が集合 A の要素であることを記号で $a \in A$（または $A \ni a$）と表し, a は A に属する という. a が A の要素でないときは $a \notin A$ （または $A \not\ni a$）と表す.

【定義 **1.1.2**】 A, B を集合とする. B の要素がすべて A の要素であるとき B は A に含まれる , あるいは A は B を含む といって, $A \supset B$ または $B \subset A$ と表す. このとき B は A の部分集合であるという.

つまり

$$B \subset A \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x (x \in B \Rightarrow x \in A).$$

【定義 **1.1.3**】 $A \supset B$ かつ $B \supset A$ のとき $A = B$ と定める.

【定義 **1.1.4**】 要素をひとつも持たない集合を空集合といって, 記号 $\emptyset$ で表す.

【定義 **1.1.5**】 集合を要素とする集合を集合族とよぶ.

I を集合とし, I の各要素 i に対して, ひとつの集合 A_i が対応しているとする. このとき全ての A_i からなる集合族 $\{A_i \mid i \in I\}$ を I で添字付けられた集合族 といい[*1], I をこの集合族の添字集合という. この集合族を $\{A_i\}_{i \in I}$ などと表す.

[*1] この定義は正確でない. 正確な定義には写像の概念が必要であるので, 写像の概念を導入したあとに与える（定義 1.3.10）.

1.2　集合の演算

【定義 **1.2.1**】 1. A, B を集合としたとき, A, B の少なくとも一方に属する要素を全部集めたものを A と B の合併集合（または和, 結び）といって, $A \cup B$ で表す.
つまり
$$A \cup B = \left\{ x \mid x \in A \text{ または } x \in B \right\}.$$

2. A と B の両方に属する要素を全部集めたものを A と B の共通集合（または積, 交わり）といって, $A \cap B$ で表す.
つまり
$$A \cap B = \left\{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B \right\}.$$
$A \cap B = \emptyset$ のとき, A と B は互いに素という.
3. A に属して, B に属さない要素の全体を A から B を引いた差集合といって, $A - B$ または $A \setminus B$ で表す.
つまり
$$A - B = \left\{ x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B \right\}.$$

4. ある集合 X を固定して, X の部分集合についてのみ考えるとき, $X - A$ を A の（X に関する）補集合といって A^c であらわす. このとき X を全体集合という.
5. $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ を集合 I で添字付けられた集合族とする. このとき少なくともどれかひとつの A_i に属する要素全部を集めたものを $\mathcal{A}$ の合併集合（または和集合）といって $\underset{i \in I}{\cup} A_i$ または $\cup\{A_i \mid i \in I\}$ あるいは $\cup\mathcal{A}$ 等と表す.
つまり
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \exists i \in I (x \in A_i)\}.$$
また, 全ての A_i に属する要素を全部集めたものを $\{A_i \mid i \in I\}$ の共通集合といって $\underset{i \in I}{\cap} A_i$ または $\cap\{A_i \mid i \in I\}$ あるいは $\cap\mathcal{A}$ 等と表す.
つまり
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \forall i \in I (x \in A_i)\}.$$
特に $I = \mathbb{N}$ のとき, $\underset{i \in \mathbb{N}}{\cup} A_i$ を $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} A_i$, $\underset{i \in \mathbb{N}}{\cap} A_i$ を $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cap}} A_i$ とも書く.
6. X を集合としたとき, X の部分集合の全てを要素として持つ集合を X の巾(べき）集合といって $\mathcal{P}(X)$ で表す.
つまり
$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

7. X, Y を空でない集合とするとき, 集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ かつ } y \in Y\}$$

を X と Y の<u>直積</u>という.

問題

1. 任意の集合 A について, $\emptyset \subset A$ および $A \subset A$ が成り立つことを説明せよ.
2. A, B, C を集合とする. $A \supset B$ かつ $B \supset C$ ならば $A \supset C$ を示せ.
3. 集合 A, B, C に対し次を示せ.
   (1) $A \subset C$ かつ $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$
   (2) $A \supset C$ かつ $B \supset C \Rightarrow A \cap B \supset C$
4. X を全体集合, A, B をその部分集合とする. 次を示せ.
   (1) $A - B = A \cap B^c$
   (2) $(A^c)^c = A$
5. X を全体集合, A, B をその部分集合とする. 次を示せ.
   (1) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   (2) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
6. A, B, C, D を集合とする. 次の等式を示せ.

$$(A \cap B) \cup (C \cap D) = (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup C) \cap (B \cup D)$$

7. X を集合とする. X の部分集合 A, B に対して演算 $\cdot$ と $\oplus$ を次のように定義する.

$$A \cdot B = A \cap B, \quad A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

   このとき,
   (1) 演算 $\cdot$ および $\oplus$ は交換法則, 結合法則をみたすことを示せ.
   (2) 演算 $\cdot$ に関する単位元は存在するかどうか調べよ. 存在するときは, 各元の逆元があるかどうか調べよ.
   (3) 演算 $\oplus$ についても (2) と同じことを調べよ.
   (4) 分配法則 $(A \oplus B) \cdot C = A \cdot C \oplus B \cdot C$ が成り立つかどうか調べよ.
8. 次のことを示せ. ただし各 A_i はある全体集合 X の部分集合.
   (1)

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$$

(2)

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

9. 次のことを示せ.

(1)

$$A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} (A \cup B_i)$$

(2)

$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} (A \cap B_i)$$

10. $\mathbb{R}$ の部分集合 A_n $(n \in \mathbb{N})$ が次で与えられるとき, それぞれについて $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ と $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ を求めよ.

(1) $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$

(2) $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$

(3) $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$

(4) $A_n = \left(\frac{1}{n}, 1\right]$

(5) $A_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$

(6) $A_n = (-n, n)$

(7) $A_n = [n, \infty)$

11. $x \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathbb{R}$ の部分集合 A_x を $A_x = [0, x)$ により定める. このとき $\bigcap_{x>1} A_x$ を求めよ.

12. 集合 $A_1, A_2, \ldots$ に対して

$$\overline{\lim_{n}}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

$$\underline{\lim_{n}}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\right)$$

とするとき, 次の問に答えよ.

(1) $\underline{\lim}\, A_n \subset \overline{\lim}\, A_n$ を示せ.

(2) $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ のとき $\underline{\lim}\, A_n = \overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ であることを示せ.

(3) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ のとき (2) のようなことがいえるかどうか調べよ.

(4)

$$A_n = \begin{cases} \{n, n+1, n+2, \ldots\} & n: 偶数 \\ \{1, 2, \ldots, n\} & n: 奇数 \end{cases}$$

であるとき $\overline{\lim} A_n$, $\underline{\lim} A_n$ を求めよ.

13. $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ を示せ.
14. X, Y を集合, $A \subset X$, $B \subset Y$ を部分集合とする．このとき $X \times Y$ において $(A \times B)^c = (A^c \times Y) \cup (X \times B^c)$ であることを示せ.

1.3　写像

【定義 **1.3.1**】 X, Y を集合とする．X の各要素 $x \in X$ に対して Y の要素 y がただひとつ対応するような対応を X から Y への写像という．対応 f が X から Y への写像であるとき $f\colon X \to Y$ と表す.

より形式的には, X から Y への写像 f とは, 直積 $X \times Y$ の部分集合であって, 任意の $x \in X$ に対し $(x, y) \in f$ となる $y \in Y$ がただひとつ存在するものである．(1.5 節参照)

【定義 **1.3.2**】 $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. f により $x \in X$ が $y \in Y$ に対応しているとき y を $f(x)$ で表し, x の f による像という.
2. X の部分集合 A に対して, Y の部分集合

$$\{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$$

を, 集合 A の f による像 といって $f(A)$ で表す.

3. X を f の定義域, $f(X)$ を f の値域あるいは像という.
4. Y の部分集合 B に対して, $f(x) \in B$ となる $x \in X$ の全体を, f による B の逆像といい, $f^{-1}(B)$ で表す.
つまり

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \subset X.$$

【定義 **1.3.3**】 $f\colon X \to Y$ を写像とする.

1. $f(X) = Y$ であるとき, f は X から Y への上への写像または全射であるという.
つまり

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X,\ f(x) = y.$$

2. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つとき, f は 1 対 1 または単射であるという.
3. 1 対 1 かつ上への写像であるとき, 全単射であるという.

【定義 **1.3.4**】 写像 $f\colon X \to Y$ が単射のとき, 各 $y \in f(X)$ に対して $f(x) = y$ となる $x \in X$ がただひとつ存在する. この x を $f^{-1}(y)$ と書くと f^{-1} は $f(X)$ から X への写像となる. これを f の逆写像という. 特に f が全単射であれば, f^{-1} は Y から X への写像になる.

【定義 **1.3.5**】 $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする. このとき $x \in X$ に対して $g(f(x)) \in Z$ を対応させる写像を f と g の合成 といって, $g \circ f$ で表す.

つまり

$$\begin{gathered} g \circ f\colon X \to Z, \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{gathered}$$

【定義 **1.3.6**】 集合 X の各要素をそれ自身にうつす X から X への写像を X の恒等写像という. 恒等写像を id_X や 1_X といった記号で表すことが多い.

つまり

$$\begin{gathered} \mathrm{id}_X\colon X \to X, \\ \mathrm{id}_X(x) = x. \end{gathered}$$

【定義 **1.3.7**】 X を集合, $A \subset X$ を部分集合とする. A の要素 $a \in A$ を X の要素 $a \in X$ と見ることにより得られる A から X への写像を包含写像という.

つまり $i\colon A \to X$ を包含写像とすると $i(a) = a$.

また, $i\colon A \to X$ が包含写像であるとき, $i\colon A \hookrightarrow X$ と書くこともある.

【定義 **1.3.8**】 集合 X, Y に対し, X から Y への写像全体のなす集合を Y^X と表す.

つまり

$$Y^X = \left\{ f \;\middle|\; f \text{ は } X \text{ から } Y \text{ への写像 } f\colon X \to Y \right\}.$$

【定義 **1.3.9**】 X を集合とする.

1. $A \subset X$ を X の部分集合とする. 次で定義される写像 $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ を A の（X 上の）特性関数という.
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & (x \in A) \\ 0 & (x \notin A). \end{cases}$$
2. X から $\{0,1\}$ への写像全体のなす集合を 2^X で表す ($\{0,1\}$ という集合を 2 と書いている).

【定義 **1.3.10**】 I を集合とする. I からある集合族への写像のことを I で添字付けられた集合族 といい[*2], I をこの集合族の添字集合, I の元を添字という.

[*2] 定義 1.1.5 参照.

A を I で添字づけられた集合族とする．普通, 集合 $A(i)$ を A_i 等と書いて, この集合族を $\{A_i\}_{i\in I}$ などと表す．

問題

15. $n \in \mathbb{N}$ に対して n の正の約数の個数 $d(n)$ を対応させる写像 $d\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ について次の問に答えよ．

    (1) $d^{-1}(\{2\})$ はどんな集合か．

    (2) $d^{-1}(\{3\})$ はどんな集合か．

    (3) $d^{-1}(\{4\})$ はどんな集合か．

    (4) d は 1 対 1 か．また上への写像か．

16. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする．A_1, A_2 を X の, B_1, B_2 を Y の部分集合とするとき次を示せ．

    (1) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$.

    (2) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

    また次の等式が成り立つかどうかを調べ, 成り立つときには証明し, 成り立たないときには反例を挙げよ．

    (3) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

    (4) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.

    (5) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

    (6) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

    (7) f が単射のときの (3)〜(6).

    (8) f が全射のときの (3)〜(6).

17. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像, A を X の, B を Y の部分集合とするとき次の等式が成り立つかどうか調べよ．等式が成り立たない場合, いずれかの包含関係が成り立つならばそれを示せ．

    (1) $A = f^{-1}(f(A))$.

    (2) $B = f(f^{-1}(B))$.

18. X, Y, Z を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする．このとき次を示せ．

    (1) f, g がともに全単射ならば $g \circ f$ も全単射であり, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ である．

    (2) $g \circ f$ が全射ならば g も全射である．
    このときさらに g が単射であれば f は全射である．

    (3) $g \circ f$ が単射ならば f も単射である．
    このときさらに f が全射であれば g は単射である．

19. $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{\leq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ とする．$x \in \mathbb{R}$ に対して $f(x) = x^2$ という対応を考える．f を以下のような写像と考えたとき, それぞれ（イ）単射かどうか,（ロ）全射かどうか, を答えよ．また単射の場合は逆写像を求めよ．
   (1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   (2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
   (3) $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$.
   (4) $f\colon \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$.
20. $n \in \mathbb{N}$ とする．$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ のとき $\mathcal{P}(X)$ の個数および 2^X の個数を求めよ．
21. X を集合とする．写像 $\chi\colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ を $\chi(A) = \chi_A$ で定める．χ は全単射であることを示せ．また, χ の逆写像はどのようなものか．
22. X を全体集合とする．部分集合 $A, B \subset X$ の特性関数を a, b とするとき, 次のことを示せ．
   (1) $A \subset B \Leftrightarrow a(x) \leq b(x)\ \forall x \in X$.
   (2) $A \cap B$ の特性関数を c とすると, $c(x) = \min\{a(x), b(x)\} = a(x)b(x)$.
   (3) $A \cup B$ および A^c の特性関数を a, b で表せ．
   (4) $A \triangle B$ の特性関数を a, b で表せ．
   ただし $A \triangle B$ は
$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$
   により与えられる集合で A と B の対称差と呼ばれる．
23. $n \in \mathbb{N}$ とする．$X = \{1, 2, \ldots, n\}$ のとき次のものを求めよ．
   (1) X から X への写像の個数．
   (2) X から X への単射の個数．
   (3) X から X への全射の個数．
24. $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とするとき, 次のものの個数を求めよ．
   (1) X から Y への写像．
   (2) X から Y への全射．
   (3) X から Y への単射．
   (4) Y から X への写像．
   (5) Y から X への全射．
   (6) Y から X への単射．
25. 写像 $\pi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\pi(x, y) = x$ により定める．このとき $\pi^{-1}([0, 1])$ を図示せよ．
26. 関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin x$ により定める．このとき $f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right)$ を求めよ．
27. $\mathbb{N}$ から集合 $\{0, 1\}$ への写像全体 $F = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ を考える．各 $n \in \mathbb{N}$ と $i \in \{0, 1\}$ に

対し, F の部分集合 $C(n,i)$ を $C(n,i)=\{f\in F\mid f(n)=i\}$ により定める．また F の部分集合からなる集合 $\mathcal{E}$ を

$$\mathcal{E}=\left\{A\subset F\;\middle|\;A \text{ は有限個の } C(n_1,i_i),\dots,C(n_k,i_k) \text{ の積集合として表せる.}\right\}$$

により定める．このとき次のことは成り立つか.

(1) $A,B\in\mathcal{E}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{E}$.

(2) $A\in\mathcal{E}\Rightarrow A^c\in\mathcal{E}$.

(3) $A,B\in\mathcal{E}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{E}$.

(4) $A_1,A_2,\dots\in\mathcal{E}\Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{E}$.

(5) $A_1,A_2,\dots\in\mathcal{E}\Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{E}$.

1.4　直積, 直和

【定義 **1.4.1**】 $\{X_i\mid i\in I\}$ を I で添字付けられた集合族とする．I から $\bigcup_{i\in I}X_i$ への写像 f であって $\forall i\in I(f(i)\in X_i)$ となるものの全体を $\{X_i\mid i\in I\}$ の直積といい, $\prod_{i\in I}X_i$ と書く．直積の元 f を $(x_i:i\in I)$ という記号で表す．ただし $x_i=f(i)$ である.

つまり

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}X_i&=\left\{f\in\left(\bigcup_{i\in I}X_i\right)^I\;\middle|\;\forall i\in I(f(i)\in X_i)\right\}\\&=\{(x_i:i\in I)\mid\forall i\in I(x_i\in X_i)\}.\end{aligned}$$

特に $I=\{1,2,\dots,n\}$ や $I=\mathbb{N}$ のとき, $\prod_{i\in I}X_i$ を $\prod_{i=1}^{n}X_i$ や $\prod_{i=1}^{\infty}X_i$ とも書く.

【定義 **1.4.2**】 集合族 $\{X_i\mid i\in I\}$ に対し, 直積 $I\times\bigcup_{i\in I}X_i$ の部分集合 $\coprod_{i\in I}X_i$ を以下で定め, 集合族 $\{X_i\mid i\in I\}$ の直和または非交和という.

つまり

$$\coprod_{i\in I}X_i=\{(i,x)\mid i\in I,\ x\in X_i\}\subset I\times\bigcup_{i\in I}X_i.$$

特にふたつの集合 A, B の非交和を $A\coprod B$ と書く．(形式的には, A, B ふたつの集合からなる集合 (族) を $I=\{A,B\}$ とし, $\{A,B\}$ を I (つまりそれ自身) で添字付けられた集合族と考える.)

見直し

$A=B$ のときこれではよろしくない

問題

28. 直積 $\prod_{i=1}^{2} X_i$ から $X_1 \times X_2$(定義 1.2.1 7) への写像 $\varphi\colon \prod_{i=1}^{2} X_i \to X_1 \times X_2$ を $\varphi(f) = (f(1), f(2))$ で定める．φ は全単射であることを示せ．
29. 集合族 $\{X_i \mid i \in I\}$ に対し，直和 $\coprod_{i \in I} X_i$ から和集合 $\bigcup_{i \in I} X_i$ への写像 $\pi\colon \coprod_{i \in I} X_i \to \bigcup_{i \in I} X_i$ を $\pi(i, x) = x$ で定める．π は全射であることを示せ．
    さらに, 任意の $i, j \in I$ $(i \neq j)$ に対し $X_i \cap X_j = \emptyset$ であれば, π は全単射であることを示せ．

1.5　関係

【定義 **1.5.1**】 X, Y を集合とする．直積集合 $X \times Y$ の部分集合を X と Y の間の関係または X から Y への対応という．

特に $X = Y$ であるとき X 上の関係 という．

R を X と Y の間の関係, すなわち $R \subset X \times Y$ とする．X の要素 $x \in X$ と Y の要素 $y \in Y$ について, $(x, y) \in R$ であるとき xRy と書く．

見直し

何か問題を加える

1.6　同値関係

【定義 **1.6.1**】 集合 X 上の関係 $\sim$（つまり $\sim \subset X \times X$）が次の 3 つの条件:

(i)（反射律） $x \sim x$,
(ii)（対称律） $x \sim y \Rightarrow y \sim x$,
(iii)（推移律） $x \sim y$ かつ $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

を満たすとき, 関係 $\sim$ は集合 X 上の同値関係 であるという．

【定義 **1.6.2**】 関係 $\sim$ を集合 X 上の同値関係とする．X の要素 $a \in X$ に対し, a と同値な要素全体のなす X の部分集合

$$C_a = \{x \mid x \in X,\ x \sim a\} \subset X$$

を a の同値類という．同値類は次の性質を持つ（問題 30 参照）:

(i) $a \in C_a$,

(ii) $a \sim b \Rightarrow C_a = C_b$,

(iii) $a \not\sim b \Rightarrow C_a \cap C_b = \emptyset$.

したがって, 同値類の全体のなす集合 $\{C_a \mid a \in X\}$ は X を互いに素な部分集合に, 余すところなく分割する．この分割を同値関係 $\sim$ による X の類別という.

同値類の全体 $\{C_a \mid a \in X\}$ を $X/\sim$ と書き, 同値関係 $\sim$ による X の商集合という.

また $a \in X$ を $C_a \in X/\sim$ にうつす写像

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X/\sim \\ \cup & & \cup \\ a & \longmapsto & C_a \end{array}$$

を自然な写像 あるいは商写像, 自然な射影などという.

問題

30. 集合 X 上の同値関係 $\sim$ による $a \in X$ の同値類を C_a で表すとき, 次のことが成り立つことを示せ.
    (1) $a \in C_a$
    (2) $a \sim b \Rightarrow C_a = C_b$
    (3) $a \not\sim b \Rightarrow C_a \cap C_b = \emptyset$
31. $n \in \mathbb{N}$ とする．$a, b \in \mathbb{Z}$ に対し, $a - b$ が n で割り切れるとき $a \equiv b \pmod{n}$ と記す．この関係 $\equiv$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係であることを示せ．また, この関係による $\mathbb{Z}$ の商集合はどのような集合か.
32. 平面上の図形に関する次の各関係は同値関係であることを示せ.
    (1) ふたつの三角形が合同（$\equiv$）である.
    (2) ふたつの三角形が相似（$\propto$）である.
    (3) ふたつの三角形の面積が等しい（$=$）.
    (4) ふたつの直線が平行（$/\!/$）である（ただし二直線が一致する場合も平行であるとみなす）.
33. $\mathbb{R}$ において, $x \sim y \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}$ により関係 $\sim$ を定めると, これは同値関係であることを示せ.
34. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ において, $(l, m) \sim (p, q) \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} l + q = m + p$ により関係 $\sim$ を定めると, これは同値関係であることを示せ．また, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ はどのような集合か.
35. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする．X における関係 $\sim$ を $x \sim y \underset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} f(x) = f(y)$ により定めると, これは同値関係であることを示せ.

X のこの関係 $\sim$ による商集合を $\overline{X}$ とする： $\overline{X} = X/\sim$. $\pi\colon X \to \overline{X}$ を自然な写像, すなわち $x \in X$ に, x を含む同値類 $C_x \in \overline{X}$ を対応させる写像とする．このとき, π は全射であることを示せ．また, 単射 $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ が存在して, $f = \overline{f} \circ \pi$ と表されることを示せ．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ \overline{X} \arrow[ur, dotted, "\exists \overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

36. X を平面上の三角形全体の集合とする．問題 32 (1) の記号で, $X/\equiv$ はどのような集合か.
37. X を平面上の三角形全体の集合とする．問題 32 (2) の記号で, $X/\propto$ はどのような集合か.
38. X を平面上の三角形全体の集合とする．問題 32 (3) の記号で, $X/=$ はどのような集合か.
39. Y を平面上の直線全体の集合とする．問題 32 (4) の記号で, $Y/\mathbin{/\!/}$ はどのような集合か.
40. 問題 33 で定めた $\mathbb{R}$ 上の同値関係 $\sim$ を考えると, 各実数 x は区間 $[0,1)$ 内のひとつの実数と同値であり, また, $[0,1)$ 内の相異なるふたつの実数は同値でない．さらに $0 \sim 1$ であるから, $\mathbb{R}/\sim$ は, 周の長さが 1 の円周とみなすことができる.
このことにならって, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ における次の同値関係による商集合はどう考えればよいかを調べよ.
(1) $(x,y) \sim (z,w) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - z \in \mathbb{Z}$ かつ $y = w$
(2) $(x,y) \simeq (z,w) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - z \in \mathbb{Z}$ かつ $y - w \in \mathbb{Z}$
41. E を集合とする．E の巾集合 $\mathcal{P}(E)$ における関係 $\sim$ を, $A \sim B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \triangle B$ が有限集合, により定める．ここで $A \triangle B$ は A と B の対称差（問題 22 (4) 参照）である. また, 空集合 $\emptyset$ は有限集合である（定義 1.8.2 参照）．このとき, 次の問に答えよ.
(1) $\sim$ は同値関係であることを示せ.
(2) 空集合 $\emptyset$ と同値な集合は何か.
42. $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ において, 関係 $\sim$ を $(m,n) \sim (p,q) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} mq = np$ により定める．このとき, 次の問に答えよ.
(1) 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.
(2) この関係 $\sim$ による商集合を $E = \mathbb{N}^2/\sim$ とし, $\pi\colon \mathbb{N}^2 \to E$ を商写像とするとき, $\pi(m,n) \ominus \pi(p,q) = \pi(mp, nq)$ によって, E における演算（すなわち, 写像 $E \times E \to E$）が定められることを示せ.

注．このためには, $\ominus$ が welldefined であることを示す必要がある．すなわち, $\pi(m,n)=\pi(m',n')$, $\pi(p,q)=\pi(p',q')$ のとき $\pi(mp,nq)=\pi(m'p',n'q')$ であることを示さなくてはならない.

(3) 写像 $f\colon \mathbb{N}\to E$ を, $f(n)=\pi(n,1)$ によって定めると, f は単射であり, $f(mn)=f(m)\ominus f(n)$ であることを示せ.

(4) $(m,n),(p,q)\in\mathbb{N}^2$ とする．等式 $\pi(m,n)\ominus x=\pi(p,q)$ をみたすような元 $x\in E$ を求めよ.

43. X を集合とし, S を X 上の関係, すなわち部分集合 $S\subset X\times X$ とする.

(1) $R_0=X\times X$ を X 上の関係とみると, これは同値関係であることを示せ．また, $x,y\in X$ が xR_0y であるのはどのようなときか.

(2) X 上の関係 R_S を

$$R_S=\bigcap_{\substack{S\subset R\subset X\times X\\ R\text{ は同値関係}}} R$$

により定める．このとき R_S は X 上の同値関係であることを示せ．この同値関係を S の生成する同値関係という.

(3) 関係 $\sim$ を X 上の同値関係で, 任意の $x,y\in X$ について $xSy\Rightarrow x\sim y$ であるものとする．このとき, $x\in X$ の $\sim$ による同値類を $C_x^{\sim}$, R_S による同値類を C_x^S とすると, $C_x^S\subset C_x^{\sim}$ であることを示せ.

見直し

(同値) 関係の直積を加える?

1.7 順序関係

【定義 **1.7.1**】 集合 X 上の関係 $\leq$ が次の 3 つの条件:

(i)（反射律） $x\leq x$,

(ii)（反対称律） $x\leq y$ かつ $y\leq x\Rightarrow x=y$,

(iii)（推移律） $x\leq y$ かつ $y\leq z\Rightarrow x\leq z$

を満たすとき, 関係 $\leq$ は集合 X 上の順序関係 または半順序関係であるという．またこのとき X を順序集合または半順序集合という.

順序集合 X のふたつの要素 x,y が $x\leq y$ か $y\leq x$ の少なくとも一方をみたしているとき, x と y は比較可能であるという．X の任意のふたつの要素が比較可能であるとき, こ

の順序を全順序 または線形順序 といい, X を全順序集合という.

【定義 **1.7.2**】 X を順序集合, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. X の要素 $x \in X$ が A の上界である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対し $a \leq x$ である.
2. X の要素 $x \in X$ が A の下界である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $a \in A$ に対し $x \leq a$ である.
3. A が上界を持つとき, A は上に有界 であるという.
   A が下界を持つとき, A は下に有界 であるという.
4. A の要素 M で, A の上界であるものが存在するとき, M を A の最大元という. 最大元は存在すればただひとつであるので, それを $\max A$ と書く.
5. A の要素 m で, A の下界であるものが存在するとき, m を A の最小元という. 最小元は存在すればただひとつであるので, それを $\min A$ と書く.
6. A の上界全体のなす集合に最小元が存在するとき, それを A の上限または最小上界といって $\sup A$ で表す.
7. A の下界全体のなす集合に最大元が存在するとき, それを A の下限または最大下界といって $\inf A$ で表す.
8. $M \in A$ とする. $M \leq a$ かつ $M \neq a$ となる A の要素 $a \in A$ が存在しないとき, (つまり, M より大きい要素が A の中にないとき) M を A の極大元という.
9. $m \in A$ とする. $a \leq m$ かつ $m \neq a$ となる A の要素 $a \in A$ が存在しないとき, (つまり, m より小さい要素が A の中にないとき) m を A の極小元という.

【定義 **1.7.3**】 X, Y を順序集合とする. 写像 $f\colon X \to Y$ は, 任意の $x, x' \in X$ に対し, $x \leq x'$ ならば $f(x) \leq f(x')$ となるとき, 順序を保つという.

問題

44. $\mathbb{N}$ において, m が n の約数であることを $m|n$ で表すとき, この関係 $|$ は順序であることを示せ.
45. X を集合とする. 巾集合 $\mathcal{P}(X)$ において, 包含関係 $\subset$ は順序であるが, 線形順序ではないことを示せ.
46. $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ とする. $a, b \in X$ に対し, $a \leq b \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a$ が b の約数と定義したとき, この順序に関して, 次のものを求めよ.
    (1) X の最大元と最小元
    (2) X の極大元と極小元
    (3) $\sup X$ と $\inf X$
    (4) $A = \{1, 2, 3\} \subset X$ のとき, $\sup A$ と $\inf A$

(5) $A = \{6,7,8\} \subset X$ のとき, $\sup A$ と $\inf A$

47. X を空でない集合とする. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ が次の 3 つの条件をみたしているとする.

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F}$ かつ $A \subset B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

(iii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

（このとき $\mathcal{F}$ は X 上のフィルターであるという.）

X から $\mathbb{R}$ への写像全体のなす集合 $\mathbb{R}^X$ における関係 $\underset{\mathcal{F}}{\sim}$ を以下のように定める.

$$f \underset{\mathcal{F}}{\sim} g \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \in \mathcal{F}$$

(1) $\underset{\mathcal{F}}{\sim}$ は同値関係であることを示せ.

$\mathbb{R}^X$ を同値関係 $\underset{\mathcal{F}}{\sim}$ で類別し, $f \in \mathbb{R}^X$ の同値類を C_f で表す. C_f, C_g の間に関係 $\leq$ を以下のように定める.

$$C_f \leq C_g \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\} \in \mathcal{F}$$

(2) この関係 $\leq$ が welldefined であることを示せ.

(3) この関係 $\leq$ は $\mathbb{R}^X/\underset{\mathcal{F}}{\sim}$ 上の順序関係であることを示せ.

(4) この順序 $\leq$ が線形順序かどうかを調べよ.

1.8　集合の濃度

【定義 **1.8.1**】 ふたつの集合 A と B の間に全単射が存在するとき, A と B は対等であるといい, $A \sim B$ で表す. このとき A と B は同じ濃度あるいは同じ基数を持つという. A の濃度[*3]を $\sharp A$ や $|A|$ で表す.

【定義 **1.8.2**】 n を自然数とする. 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ と対等な集合の濃度は n と定義する. また空集合 $\emptyset$ の濃度は 0 と定める. 濃度が n または 0 である集合を有限集合という. 有限集合でない集合を無限集合という.

【定義 **1.8.3**】 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と対等な集合を可算集合という. 可算集合の濃度を $\aleph_0$（アレフゼロ）で表す. 有限集合と可算集合を総称してたかだか可算な集合という.

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は可算ではない. $\mathbb{R}$ の濃度を連続体の濃度 という.

【定義 **1.8.4**】 α と β を与えられた濃度とする. A, B を $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$ であるような集合とすると, 集合 $A \coprod B$, $A \times B$, A^B の濃度は A, B の選び方によらず α, β のみにより定まる. そこで α と β の和 $\alpha + \beta$, 積 $\alpha\beta$, 巾 α^β を次のように定義する.

[*3] ここでは, 「同じ濃度を持つ」ことは定義したが, 「濃度」は定義していない. 濃度の定義には少し準備が必要なので集合論の本を参照せよ.

1. $\alpha+\beta=|A\coprod B|$
2. $\alpha\beta=|A\times B|$
3. $\alpha^{\beta}=|A^{B}|$

【定義 **1.8.5**】 A, B を集合とする．A が B のある部分集合と対等であるとき，$|A|\leq|B|$ と書く．$|A|\leq|B|$ かつ $|A|\neq|B|$ であるとき，$|A|<|B|$ とかいて，$|A|$ は $|B|$ より小さいあるいは $|B|$ は $|A|$ より大きいという．

【**Cantor** の定理】 $|X|<\mathcal{P}(X)$（あるいは $|X|<2^{|X|}$）

【**Bernstein** の定理】 $|X|\leq|Y|$ かつ $|Y|\leq|X|$ ならば $|X|=|Y|$

【濃度比較可能定理】 任意の濃度 α, β に対して，$\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$ のいずれかひとつが成立する．

問題

48. Cantor の定理を以下のように証明せよ．
    X を与えられた集合とする．
    (1) $|X|\leq|\mathcal{P}(X)|$ を示せ．
    次に，$|X|=|\mathcal{P}(X)|$ と仮定すると，定義から，全単射 $f\colon X\to\mathcal{P}(X)$ が存在する．この f を用いて
    $$A=\{x\in X\mid x\notin f(x)\}$$
    とおく．
    (2) 集合 A を用いて矛盾を導け．
49. 次を示せ．
    (1) $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$
    (2) $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$
    (3) $\aleph_0^n=\aleph_0$
    (4) $\aleph_0^{\aleph_0}\neq\aleph_0$
50. 集合の濃度に関しての不等式 $|A|\leq|B|$ は順序関係の条件をみたすことを示せ．
51. 可算個の可算集合 $A_1, A_2, \ldots,$ の和 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は可算であることを示せ．
52. (1) $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}$ の濃度は等しいことを示せ．
    (2) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ と $\mathbb{Q}$ の濃度は等しいことを示せ．
    (3) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の濃度は等しいことを示せ．
53. (1) $\mathbb{R}$ から $\{0,1\}$ への写像全体の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度より大きいことを示せ．
    (2) $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数全体の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度より大きいことを示せ．
54. $\mathbb{R}$ 上の互いに交わらない区間（ただし 1 点でも空でもないとする）は，どううまく

とっても高々可算個しかとれないことを示せ.

55. X を平面上の円盤全体の集合とする.
    (1) X の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度と等しいことを示せ.
    (2) Y を X の部分集合で, 任意の $D_1, D_2 \in Y$ に対し, $D_1 \neq D_2 \Rightarrow D_1 \cap D_2 = \emptyset$ となっているものとする. このとき, Y の濃度は高々可算であることを示せ.
56. $\mathbb{N}$ から $\mathbb{R}$ への関数全体の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度と等しいことを示せ.
57. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数全体の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度と等しいことを示せ.

1.9 選択公理, Zorn の補題, 整列可能定理

【選択公理】 $\{X_i\}_{i \in I}$ を集合 I で添字付けられた集合族で, 任意の $i \in I$ について $X_i \neq \emptyset$ とする. このとき, 各 $i \in I$ に対し X_i の要素を選んで対応させる写像が存在する. つまり, 写像 $\varphi\colon I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ で, 任意の $i \in I$ に対し $\varphi(i) \in X_i$ となるものが存在する. このことは $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ とも表せる.

【定義 **1.9.1**】 X を順序集合とする. X の任意の全順序部分集合（すなわち X の部分集合で全順序部分集合になっているもの）が上界を持つとき, X を<u>帰納的順序集合</u>という

【**Zorn** の補題】 帰納的順序集合は少なくともひとつの極大元を持つ.

【定義 **1.9.2**】 集合 X が<u>整列集合</u>であるとは, X が全順序集合であり, X の空でない任意の部分集合が最小限を持つことである.

【整列可能定理】 任意の集合は, うまく順序を定義してやることで整列集合にすることができる.

【定理 **1.9.3**】 選択公理, Zorn の補題および整列可能定理は互いに同値である.

問題

58. X を無限集合とする. このとき次のことを示せ.
    (1) $a \in X$ を固定する. $\mathcal{F}_a = \{A \mid A \subset X,\ a \in X\}$ とおくと, $\mathcal{F}_a$ は X 上の極大なフィルターであることを示せ. ただしフィルターの間の順序は, $\mathcal{F}_1 \leq \mathcal{F}_2 \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ により定める. また, フィルターの定義は問題 47 参照.
    (2) $\mathcal{F}_0 = \{A \mid A \subset X,\ A^c\text{は有限集合}\}$ とおくと, $\mathcal{F}_0$ はフィルターであることを示せ. また, 極大フィルターではないことを示せ. （ヒント： B も B^c も $\mathcal{F}_0$ に属さない集合を考えて, $\mathcal{G} = \{A \mid A \subset X,\ B \cup A \in \mathcal{F}_0\}$ を考える.）
    (3) $\mathcal{F}_0$ を含む極大フィルターが存在することを Zorn の補題により証明せよ.

59. $\mathbb{R}$ の部分集合 H で, 次の条件をみたすものが存在することを示せ.
条件： 任意の $r \in \mathbb{R}$ は, 有限個の $h_1, \ldots h_n \in H$ と, 有限個の $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ を用いて,

$$r = q_1 h_1 + \cdots + q_n h_n$$

とただひととおりに表せる.
（ヒント：$\mathbb{R}$ の部分集合で, $\mathbb{Q}$ 上一次独立な集合の全体を考え, Zorn の補題を使う. ここに, $A \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立とは, 有限個の $a_1, \ldots, a_n \in A$ を任意にとるとこれらが $\mathbb{Q}$ 上一次独立である, すなわち, $q_1 a_1 + \cdots + q_n a_n = 0$ となる $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Q}$ は $q_1 = \cdots = q_n = 0$ しかないことをいう.）

1.10　実数の上限, 下限, 上極限, 下極限

【**Weierstrass** の定理】 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に数の大小関係による順序を与えて順序集合とみる. このとき, $\mathbb{R}$ の空でない任意の部分集合は, 上に（下に）有界ならば, その上限（下限）が存在する.

【定理 **1.10.1**】 集合 $\overline{\mathbb{R}}$ を, $\mathbb{R}$ に 2 点 $\{+\infty, -\infty\}$ をつけ加えた集合とする. 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $-\infty < x < +\infty$ と定めると, $\mathbb{R}$ の順序とあわせて, $\overline{\mathbb{R}}$ は順序集合になる.

$\overline{\mathbb{R}}$ においては, Weierstrass の定理が, 空集合や有界でない集合に対しても成り立つ. つまり, $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ が上に有界でなければ $\sup A = +\infty$ といった具合である.

【定義 **1.10.2**】 $\{a_n\}$ を実数列とする.

数列 $\{\overline{a}_n\}$ を $\overline{a}_n = \sup\{a_i \mid i \geq n\}$ により定める. この数列の下限 $\inf\{\overline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を, もとの数列 $\{a_n\}$ の<u>上極限</u> といい, $\limsup a_n$ で表す.

つまり,

$$\limsup a_n = \inf\{\overline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf_n \left(\sup_{i \geq n} a_i\right)$$

同様に数列 $\{\underline{a}_n\}$ を $\underline{a}_n = \inf\{a_i \mid i \geq n\}$ により定める. この数列の上限 $\sup\{\underline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を, もとの数列 $\{a_n\}$ の<u>下極限</u> といい, $\liminf a_n$ で表す.

つまり,

$$\liminf a_n = \sup\{\underline{a}_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup_n \left(\inf_{i \geq n} a_i\right)$$

問題

60. $A \subset \mathbb{R}$ が次の集合のとき, $\sup A$, $\inf A$, $\max A$, $\min A$ を求めよ.
(1) $A = (0, 1)$

(2) $A=[0,1)$

(3) $A=\left\{\frac{n+1}{n} \mid n=1,2,\ldots\right\}$

(4) $A=\left\{\frac{1}{n} \mid n=1,2,\ldots\right\} \cup \{n \mid n=1,2,\ldots\}$

(5) $A=\{\sin n \mid n=1,2,\ldots\}$

61. $A \subset \mathbb{R}$ とする. 次を示せ.

(1) $\sup A \leq b \Leftrightarrow \forall a \in A,\ b \geq a$

(2) $\sup A \geq b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ b-\varepsilon < a$

(3) $\inf A \geq b \Leftrightarrow \forall a \in A,\ b \leq a$

(4) $\inf A \leq b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ b+\varepsilon > a$

62. A, B を上に有界な実数の集合とし, $A+B=\{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$ とする. このとき次のことを示せ.

(1) $\sup(A \cup B)=\max\{\sup A, \sup B\}$

(2) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

63. 有界な実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して, $\overline{a}_n=\sup\{a_i \mid i \geq n\}$, $\underline{a}_n=\inf\{a_i \mid i \geq n\}$ とおくと, 数列 $\{\overline{a}_n\}$ は単調増加, $\{\underline{a}_n\}$ は単調減少となることを示せ.

64. 実数列 $\{a_n\}$ について次の問に答えよ. ただし $b \in \mathbb{R}$ とする.

(1) 次を示せ.

$\limsup a_n = b$

$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次の i, ii が成り立つ.

i. ある番号 n_0 から先の i では $a_i < b+\varepsilon$ である

ii. 無限個の番号 i に対して $a_i > b-\varepsilon$ である

(2) 次の□の中を埋めて正しい命題にせよ.

$\liminf a_n = b$

$\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し次の i, ii が成り立つ.

i. ある番号 n_0 から先の i では $\boxed{}$ である

ii. 無限個の番号 i に対して $\boxed{}$ である

65. 実数列 $\{a_n\}$ について, $\liminf a_n \leq \limsup a_n$ を示せ.

66. 実数列 $\{a_n\}$ について,

$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する $\Leftrightarrow \liminf a_n = \limsup a_n$

であることを示せ. またこのとき,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf a_n = \limsup a_n$

であることを示せ.

67. 次で与えられる数列 $\{a_n\}$ の上極限と下極限を求めよ.

(1) $a_n=(-1)^n$

(2) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot(-1)^n$

(3) $a_n = \sin\frac{n}{3}\pi$

(4) $a_n = \left(\frac{1}{2}+(-1)^n\right)^n$

(5) $a_n = \sin n$

68. 実数列 $\{a_n\}$ について, $\liminf a_n = \lim_{n\to\infty} \underline{a}_n$, $\limsup a_n = \lim_{n\to\infty} \overline{a}_n$ を示せ. ただし $\underline{a}_n, \overline{a}_n$ は問題 63 で定めたものである.

69. 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ および $p\in\mathbb{R}$ について以下のことを示せ.

(1) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$

(2) $\forall n,\ a_n \le b_n \Rightarrow \limsup a_n \le \limsup b_n$ かつ $\liminf a_n \le \liminf b_n$

(3) $p>0$ ならば, $\limsup pa_n = p\limsup a_n$ かつ $\liminf pa_n = p\liminf a_n$

(4) $p<0$ ならば, $\limsup pa_n = p\liminf a_n$ かつ $\liminf pa_n = p\limsup a_n$

70. 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について以下の不等式を示せ. また, 等号が成立しない例を挙げよ.

(1) $\limsup(a_n+b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n$

(2) $\liminf(a_n+b_n) \ge \liminf a_n + \liminf b_n$

以下 $a_n>0$, $b_n>0$ とする.

(3) $\limsup(a_nb_n) \le (\limsup a_n)(\limsup b_n)$

(4) $\liminf(a_nb_n) \ge (\liminf a_n)(\liminf b_n)$

71. 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ について, $\{a_n\}$ が収束列であるとき次の等式を示せ.

(1) $\limsup(a_n+b_n) = \limsup a_n + \limsup b_n$

(2) $a_n>0$, $b_n>0$ のとき,
$\limsup(a_nb_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\limsup b_n$

72. $a_n>0$ である実数列 $\{a_n\}$ と $\alpha\in\mathbb{R}$ について, 次を示せ.

(1) $\limsup\frac{a_n}{a_{n-1}} < \alpha$ とすると, ある番号 n_0 があって, $n>n_0$ に対し $a_n < \alpha^{n-n_0}a_{n_0}$ となる.

(2) $\limsup\sqrt[n]{a_n} \le \limsup\frac{a_n}{a_{n-1}}$

(3) $\liminf\frac{a_n}{a_{n-1}} \le \liminf\sqrt[n]{a_n}$

1.11　追加

問題

73. X, Y を集合, $f\colon X\to Y$ を写像とする.

(1) f は全単射 $\Leftrightarrow \exists g\colon Y\to X,\ g\circ f = 1_X,\ f\circ g = 1_Y$.

(2) f は単射

$\Leftrightarrow$

$\forall Z, \forall u, v \colon Z \to X \ (f \circ u = f \circ v \Rightarrow u = v)$;

$$Z \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y\ .$$

(3) f は全射

$\Leftrightarrow$

$\forall Z, \forall u, v \colon Y \to Z \ (u \circ f = v \circ f \Rightarrow u = v)$;

$$X \xrightarrow{f} Y \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Z\,.$$

74. $\{X_i \mid i \in I\}$ を集合 I で添字付けられた集合族とする．

(1) 各 $j \in I$ に対し, 写像 $p_j \colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ を $p((x_i)) = x_j$ により定める．（これを標準的射影という.）A を集合とし, 各 $i \in I$ に対し写像 $f_i \colon A \to X_i$ が与えられているとする．このとき, 写像 $f \colon A \to \prod_{i\in I} X_i$ で, 全ての $i \in I$ に対し $p_i \circ f = f_i$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.

(2) 各 $j \in I$ に対し, 写像 $\iota_j \colon X_j \to \coprod_{i\in I} X_i$ を $\iota_j(x) = (j, x)$ により定める．（これを標準的包含という.）A を集合とし, 各 $i \in I$ に対し写像 $f_i \colon X_i \to A$ が与えられているとする．このとき, 写像 $f \colon \coprod_{i\in I} X_i \to A$ で, 全ての $i \in I$ に対し $\iota_i \circ f = f_i$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, dotted, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \prod\limits_{i\in I} X_i \arrow[dl, "p_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A & & \coprod\limits_{i\in I} X_i \arrow[ll, dotted, "f"'] \\ & X_i \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "\iota_i"'] & \end{tikzcd}$$

75. X, Y, Z を集合, $f \colon X \to Z$, $g \colon Y \to Z$ を写像とする．以下で定義される $X \times Y$ の部分集合

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \mid f(x) = g(y)\} \subset X \times Y$$

を X と Y の Z 上のファイバー積という．写像 $g' \colon X \times_Z Y \to X$, $f' \colon X \times_Z Y \to Y$ をそれぞれ $g'(x, y) = x$, $f'(x, y) = y$ により定める．次の問に答えよ．

(1) $f \circ g' = g \circ f'$ を示せ.

(2) A を集合, $u \colon A \to X$, $v \colon A \to Y$ を写像で $f \circ u = g \circ v$ をみたすものとする．このとき, 写像 $h \colon A \to X \times_Z Y$ で $u = g' \circ h$, $v = f' \circ h$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.

(3) f が単射ならば, f' も単射であることを示せ.

(4) f が上への写像ならば, f' もそうであることを示せ.

(5) Y が Z の部分集合で, $g\colon Y \hookrightarrow Z$ が包含写像であるとする. このとき, 全単射 $h\colon f^{-1}(Y) \to X \times_Z Y$ で $g' \circ h\colon f^{-1}(Y) \to X$ が包含写像, $f' \circ h\colon f^{-1}(Y) \to Y$ が f の $f^{-1}(Y)$ への制限となっているものがただひとつ存在することを示せ.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted, "h"] \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\
& X \times_Z Y \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & Z.
\end{tikzcd}$$

76. X, Y, Z を集合, $f\colon Z \to X$, $g\colon Z \to Y$ を写像とする. 標準的包含により X, Y を $X \coprod Y$ の部分集合とみなす. $X \coprod Y$ における関係

$$R = \{(f(z), g(z)) \mid z \in Z\}$$

の生成する同値関係を考え, これによる $X \coprod Y$ の商集合を $X \coprod_Z Y$ で表し, X と Y の Z による<u>融合和</u>という. 写像 $g'\colon X \to X \coprod_Z Y$, $f'\colon Y \to X \coprod_Z Y$ を標準的包含と自然な射影の合成とする. 次の問に答えよ.

(1) $g' \circ f = f' \circ g$ を示せ.

(2) A を集合, $u\colon X \to A$, $v\colon Y \to A$ を写像で $u \circ f = v \circ g$ をみたすものとする. このとき, 写像 $h\colon X \coprod_Z Y \to A$ で, $u = h \circ g'$, $v = h \circ f'$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.

(3) E を集合とする. $X, Y \subset E$, $Z = X \cap Y$ で, $f\colon Z \to X$, $g\colon Z \to Y$ が包含写像であるとき, $X \coprod_Z Y$ は自然に $X \cup Y$ と同一視できることを示せ.
「自然に」とはどういうことだろうか.

$$\begin{tikzcd}
A & & \\
& X \coprod_Z Y \arrow[ul, dotted, "h"'] & X \arrow[l, "g'"] \arrow[ull, bend right, "u"'] \\
& Y \arrow[u, "f'"'] \arrow[uul, bend left, "v"] & Z \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

77. X, Y を集合, $f, g\colon X \to Y$ を写像とする.

(1) X の部分集合 K を

$$K = \{x \mid f(x) = g(x)\} \subset X$$

により定め, $k\colon K \hookrightarrow X$ を包含写像とする.
A を集合, $u\colon A \to X$ を写像で, $f \circ u = g \circ u$ をみたすものとする．このとき,
写像 $h\colon A \to K$ で $u = k \circ h$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.

(2) $Y \times Y$ の部分集合

$$\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\} \subset Y \times Y$$

の生成する同値関係による Y の商集合を C とし, $q\colon Y \to C$ を商写像とする.
A を集合, $u\colon Y \to A$ を写像で, $u \circ f = u \circ g$ をみたすものとする．このとき,
写像 $h\colon C \to A$ で $u = h \circ q$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
& A \arrow[u, "u"'] \arrow[ul, dotted, "h"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"'] & C \arrow[dl, dotted, "h"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

第 2 章

距離空間

2.1 距離空間

【定義 **2.1.1**】 X を集合とする．$X \times X$ 上定義された実数値関数

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}$$

が次の 3 つの条件をみたすとき X 上の距離関数という．

(i) 1. 任意の $x, y \in X$ について $d(x,y) \geq 0$
 2. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) 任意の $x, y \in X$ について $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) (三角不等式) 任意の $x, y, z \in X$ について $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

集合 X とその上の距離関数 d が与えられたとき，組 (X, d) を距離空間という．また $x, y \in X$ に対し実数 $d(x,y)$ を x と y の距離という．

【定義 **2.1.2**】 (X, d) を距離空間とする．

1. 点 $x \in X$ と $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対し，集合 $U(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\} \subset X$ を点 x の ε 近傍 という．
2. $O \subset X$ が X の開集合 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in O$ に対し $\exists \varepsilon > 0, U(x,\varepsilon) \subset O$
3. $F \subset X$ が X の閉集合 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} F^c$ が X の開集合．
4. $U \subset X$ が点 x の近傍 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in O \subset U$ となる開集合 O が存在する．
5. 点 $x \in X$ の近傍全体のなす集合を x の近傍系といい $\mathcal{U}(x)$ と書く．
   $\mathcal{U}(x)$ の部分集合 $\mathcal{U}^*(x)$ が x の基本近傍系である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall U \in \mathcal{U}(x)$, $\exists V \in \mathcal{U}^*(x)$, $V \subset U$
6. $A \subset X$ に対し，A に含まれる X の開集合全体の和集合を A^o で表し，A の内部または開核という．

A^o の点を A の内点という.

7. $A \subset X$ に対し, $(A^c)^o$ を A の外部といい, A^e で表す.
   A^e の点を A の外点という.
8. $A \subset X$ に対し, A の内部および外部を除く X の点全体を A の境界といい, A^f で表す.
9. $A \subset X$ に対し, A を含む X の閉集合全体の共通集合を $\overline{A}$ で表し, A の閉包という.
   $\overline{A}$ の点を A の触点という.

【定義 **2.1.3**】 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が点 $a \in X$ に収束する $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ a の任意の近傍 U に対し, ある番号 n_0 が存在して, $n \geq n_0$ ならば $x_n \in U$ となる.
このとき a を点列 $\{x_n\}$ の極限点といい, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ あるいは $x_n \to a \ (n \to \infty)$ と表す.

【定義 **2.1.4**】 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. $x \in X$ が A の集積点である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x の任意の近傍 U に対し, $(A - \{x\}) \cap U \neq \emptyset$
2. A の集積点全体を A の導集合といい, A' で表す.
3. A の点 $a \in A$ が A の孤立点である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ a が A の集積点でない.

【定義 **2.1.5**】 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

1. A が X で稠密(dense)である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\overline{A} = X$
2. (X, d) が可分 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある可算部分集合が存在して, これが X で稠密である.
3. A が全疎である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\left(\overline{A}\right)^o = \emptyset$

【定義 **2.1.6**】

1. 距離空間 (X, d) の点列 $\{x_n\}$ が基本列である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$ に対し, ある番号 n_0 が存在して, $m, n \geq n_0$ ならば $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ となる.
2. 距離空間 (X, d) が完備 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X の任意の基本列が収束する.

【定義 **2.1.7**】 距離空間 (X, d) がコンパクト $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X の任意の無限部分集合は少なくともひとつ集積点を持つ.

【定義 **2.1.8**】 (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.
$\delta(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ を A の直径という.

【定義 **2.1.9**】 距離空間 (X, d) が全有界である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある自然数 n と, X の部分集合 U_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ で $\delta(U_i) < \varepsilon$ であるものが存在して, $X = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$ となる.

【定義 **2.1.10**】 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間, $f \colon X \to Y$ を写像とする.

1. f が点 $a \in X$ で<u>連続</u>である
   $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f(a)$ の任意の近傍 V に対し, a のある近傍 U が存在して, $f(U) \subset V$ となる.
   $\Leftrightarrow$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x, a) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$ となる.
2. f が X の各点で連続であるとき f を<u>連続写像</u> という.

【定義 **2.1.11**】 (X, d_X), (Y, d_Y) を距離空間とする.
写像 $f\colon X \to Y$ が<u>一様連続</u> である
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して, $d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ となる.

問題

78. 次の関数は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.
    (1) $f(x, y) = ||x| - |y||$
    (2) $f(x, y) = |x^3 - y^3|$
79. d を X 上の距離関数としたとき, 次の関数は X 上の距離関数になることを示せ.
    (1) $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$
    （ヒント：$a \geq 0, b \geq 0$ であるとき $\frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ を示せ.）
    (2) $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$
80. A が以下で与えられるとき, $A^o, A^e, A^f, \overline{A}, A'$ を求めよ.
    (1) $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$
    (2) $A = \left\{ m + \dfrac{1}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$
    (3) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y > x^2 \right\} \subset \mathbb{R}^2$
    (4) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t \text{ についての方程式 } t^2 + xt + y = 0 \text{ が実根を持つ} \right\} \subset \mathbb{R}^2$
    (5) $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \right\} \subset \mathbb{R}^2$
81. 集合 X において
    $$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$
    と定義する.
    (1) d は X 上の距離関数になることを示せ.
    (2) 距離空間 (X, d) の開集合はどのようなものか.
82. 距離空間 (X, d) において, 基本列の集積点は高々一点であり, 存在すればそれに収束することを示せ.

83. (X,d) を距離空間とする．X の部分集合 A,B に対し，$d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B} d(a,b)$ とおく．

(1) $d(A,B)>0$ ならば $A\cap B=\emptyset$ であることを示せ．

(2) A が一点からなる集合 $A=\{a\}$，B が閉集合であるとき，$A\cap B=\emptyset$ ならば $d(A,B)>0$ であることを示せ．

(3) 任意の部分集合 B について，$\rho_B(x)=d(x,B)$ で与えられる関数は X 上の連続関数であることを示せ．

(4) A がコンパクト，B が閉集合であるとき，$A\cap B=\emptyset$ ならば $d(A,B)>0$ であることを示せ．

84. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A,B を

$$A=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$$
$$B=\{(x,y)\mid y=e^x\}$$

により定める．

(1) A も B も閉集合であることを示せ．

(2) $d(A,B)$ を求めよ．

85. 次の命題は一般には成立しない．反例を挙げよ．

(1) $\mathbb{R}$ の開集合の可算無限族 $\{O_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ に対して $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ も開集合である．

(2) $F\subset\mathbb{R}$ が閉集合，$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が連続ならば $f(F)$ は閉集合である．

86. X を集合，$F(X)$ を X 上の実数値有界関数全体のなす集合とする．$f,g\in F(X)$ に対し

$$d(f,g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|$$

と定めると，d は $F(X)$ 上の距離関数になることを示せ．

87. X を集合，(Y,d_Y) を距離空間，$F(X,Y)$ を X から Y への写像全体のなす集合とする．

(1) $B(X,Y)\subset F(X,Y)$ を有界な写像（すなわち $\delta_Y(f(X))<\infty$ であるような写像）全体のなす部分集合とする．$f,g\in B(X,Y)$ に対し

$$d(f,g)=\sup_{x\in X} d_Y\left(f(x),g(x)\right)$$

と定めると，d は $B(X,Y)$ 上の距離関数になることを示せ．

(2) $f_0\in F(X,Y)$ をひとつ固定し，

$$F_{f_0}(X,Y)=\left\{f \;\middle|\; \sup_{x\in X} d_Y\left(f(x),f_0(x)\right)<\infty\right\}$$

とおく．このとき $f,g\in F_{f_0}(X,Y)$ に対し $d(f,g)$ を上と同様に定めると d は $F_{f_0}(X,Y)$ 上の距離関数になることを示せ．

(3) f_0 が有界ならば, $F_{f_0}(X,Y)=B(X,Y)$ であることを示せ.

88. 距離空間 (X_1,d_1), (X_2,d_2) に対し, 直積集合 $(X_1\times X_2)\times(X_1\times X_2)$ 上の関数 d を, $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in X_1\times X_2$ に対し

$$d\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right)=\sqrt{d_1(x_1,y_1)^2+d_2(x_2,y_2)^2}$$

により定める.

(1) d は $X_1\times X_2$ 上の距離関数であることを示せ.

(2) (X_1,d_1), (X_2,d_2) がともにコンパクトであるならば, $(X_1\times X_2,d)$ もコンパクトであることを示せ.

89. (X,d) を距離空間, $A\subset X$ を部分集合とするとき, $\delta(A)=\delta(\overline{A})$ であることを示せ.

90. (X,d) を距離空間, $A\subset X$ を部分集合とする. $x\in X$ について次の 4 条件は同値であることを示せ.

(i) $x\in\overline{A}$

(ii) 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $U(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$

(iii) $d(x,A)=0$

(iv) A の点からなる点列 $\{a_n\}$ で x に収束するものが存在する.

91. (X,d) を距離空間とする. 次を示せ.

(1) $x,y,z\in X$ のとき,

$$|d(x,y)-d(x,z)|\leq d(y,z)$$

(2) $w,x,y,z\in X$ のとき,

$$|d(w,x)-d(y,z)|\leq d(w,y)+d(x,z)$$

92. $\mathbb{R}^2$ において, $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ に対し,

$$d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$
$$d_2(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

とおく.

(1) d_1, d_2 は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数であることを示せ.

(2) これらにより定まる開集合族は一致することを示せ.

93. $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\in\mathbb{Q},y\in\mathbb{Q}\right\}\subset\mathbb{R}^2$ とする. $\overline{A}=\mathbb{R}^2$ を示せ.

94. 開区間 $(0,1)\subset\mathbb{R}$ はコンパクトではないことを示せ.

95. A を距離空間 (X,d) の稠密な部分集合とする. A の点からなる任意のコーシー列が X の点に収束すれば, X は完備であることを示せ.

96. (X,d) を距離空間, $\{x_n\}$ を X の互いに相異なる点からなる点列で, ただひとつの集積点を持つものとする. このとき $\{x_n\}$ は収束するか?

97. 半開区間 $(0,1]$ 上の関数 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ は, 連続であるが一様連続ではないことを示せ.

98. 距離空間 (X,d) のふたつの部分集合 A, B がともにコンパクトならば $A \cup B$ もコンパクトであることを示せ.

99. $\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

で定めると, f は原点以外では連続であり, 原点では連続ではないことを示せ.

100. $C[0,1]$ を閉区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体のなす集合とする.

(1) $f, g \in C[0,1]$ に対し

$$d(f,g) = \left(\int_0^1 |f(x) - g(x)| dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

と定めると, d は $C[0,1]$ 上の距離関数になることを示せ.

(2) $n \in \mathbb{N}$ に対し, $[0,1]$ 上の関数 f_n を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (n+2)x - \dfrac{n+2}{2}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \\ 1, & \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

により定めると, $f_n \in C[0,1]$ であり, 点列 $\{f_n\}$ は上で定めた距離に関してコーシー列であることを示せ.

(3) $C[0,1]$ はこの距離に関して完備か?

101. $C[0,1]$ を問題 100 で定めた集合とする.

(1) $f, g \in C[0,1]$ に対し,

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

と定めると, d_∞ は $C[0,1]$ 上の距離関数になることを示せ.

(2) 問題 100 (2) の $\{f_n\}$ は d_∞ でコーシー列になるか?

(3) $C[0,1]$ はこの距離に関して完備か?

102. 可分な距離空間 (X,d) において, 離散集合は可算であることを示せ. ただし離散集合とは孤立点ばかりからなる集合をいう.

103. (1) $f(x) = \sin x$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ.

(2) $g(x) = x \sin x$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続か?

104. 実数列からなる集合 S を

$$S = \big\{\{x_n\} \bigm| x_n \in \mathbb{R},\ \text{有限個の}\ n\ \text{を除いて}\ x_n = 0\big\}$$

で定める．$x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in S$ に対し

$$d(x,y) = \max_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

とおく．

(1) d は S 上の距離関数になることを示せ．

(2) $m \in \mathbb{N}$ とする．実数列 $a^{(m)} = \{a_n^{(m)}\}_n \in S$ を

$$a_n^{(m)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \leq m \\ 0, & n > m \end{cases}$$

により定める．このとき S の点列 $\{a^{(m)}\}_m$ はコーシー列であることを示せ．

(3) 距離空間 (S,d) は完備か?

105. A を, 閉区間 $[0,1]$ の稠密な部分集合とする．A 上で一様連続な関数は, $[0,1]$ 上の連続関数に一意的に拡張できることを示せ．

106. 距離空間 (X,d) から $\mathbb{R}$ への写像 f が, 点 $x_0 \in X$ で連続であるとする．f が x_0 の任意の ε-近傍で定符号でないならば, $f(x_0) = 0$ となることを示せ．

107. (X,d) を距離空間, $E \subset X$ を空でない部分集合とする．$x \in X$ に対し, 実数 $\rho_E(x)$ を

$$\rho_E(x) = \inf_{y\in E} d(x,y)$$

により定める．

(1) $\rho_E(x) = 0$ であるための必要十分条件は $x \in \overline{E}$ であることを示せ．

(2) $\rho_E \colon X \to \mathbb{R}$ は一様連続であることを示せ．

(3) A, B を X の部分集合で $A \cap B = \emptyset$ とする．A がコンパクトで, B が閉集合ならば, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $a \in A$ と $b \in B$ に対し $d(x,y) > \delta$ となることを示せ．

108. $\Sigma_2 = \{(s_0, s_1, \dots) \mid s_i \in \{0,1\}, \forall i\}$ とする．$S = (s_0, s_1, \dots), T = (t_0, t_1, \dots) \in \Sigma_2$ に対し

$$d(S,T) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

とおく．

(1) d は Σ_2 上の距離関数になることを示せ．

(2) 写像 $\sigma\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ を

$$\sigma(s_0, s_1, \dots) = (s_1, s_2, \dots)$$

で定義する．σ は連続写像であることを示せ．

(3) $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\mathrm{Per}_n(\sigma) = \{S \in \Sigma_2 \mid \sigma^n(S) = S\}$$

とおく．$\mathrm{Per}_n(\sigma)$ の元の個数は 2^n であることを示せ．

(4) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Per}_n(\sigma)$ は Σ_2 で稠密であることを示せ．

(5) $\{\sigma^n(S_0) \mid n \in \mathbb{N}\}$ が Σ_2 で稠密になるような元 $S_0 \in \Sigma_2$ が存在することを示せ．

109. $A = \left\{m + n\sqrt{5} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Z}\right\}$ は $\mathbb{R}$ の中で稠密であることを示せ．

110. $\mathbb{R}$ の開集合 A, B で,

$$A \cap \overline{B},\ \overline{A} \cap B,\ \overline{A \cap B},\ \overline{A} \cap \overline{B}$$

がすべて異なるようなものを挙げよ．

111. (X, d) を完備な距離空間とする．

(1) $\{F_n\}$ を, X の空でない閉集合の減少列

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \dots$$

で, $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$ であるようなものとする．このとき $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ はちょうど一点であることを示せ．

(2) (1) で「F_n が閉集合」という条件がないとき, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ となる例を挙げよ．

(3) (1) で「$\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$」という条件がないとき, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ となる例を挙げよ．

112. (X, d) を完備な距離空間, $f\colon X \to X$ を縮小写像とする．ただし, 縮小写像とは, ある実数 $0 \le r < 1$ が存在して, すべての $x, y \in X$ に対し $d\,(f(x), f(y)) \le rd(x, y)$ をみたすものである．

(1) $x_0 \in X$ とする．$x_n = f^n(x_0)$ により与えられる X の点列 $\{x_n\}$ はコーシー列であることを示せ．

(2) f は不動点, すなわち $f(x) = x$ となる点, を持つことを示せ．

113. p を素数, C を $0 < C < 1$ なる実数とする．$r \in \mathbb{Q}$ に対し

$$|r|_p = \begin{cases} C^k & \left(r = p^k \dfrac{m}{l} \neq 0,\ k, l, m \in \mathbb{Z},\ l, m \text{ は } p \text{ と互いに素}\right) \\ 0 & (r = 0) \end{cases}$$

とおく（ p 進付値）．

(1) $q, r \in \mathbb{Q}$ に対し

$$|qr|_p = |q|_p|r|_p$$
$$|q+r|_p \le \max(|q|_p, |r|_p)$$

が成り立つことを示せ.

(2) $q, r \in \mathbb{Q}$ に対し

$$d(q,r) = |q-r|_p$$

とおくと, d は $\mathbb{Q}$ 上の距離関数であることを示せ.

114. (X,d) を距離空間, $E \subset X$ を閉集合とする.

(1)

$$G_n = \left\{ x \in X \;\middle|\; \rho_E(x) < \frac{1}{n} \right\}$$

は開集合であることを示せ. （ρ_E については問題 107 を見よ.）

(2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = E$ であることを示せ.

115. コンパクト距離空間は可分であることを示せ.

116. E を $\mathbb{R}$ の部分集合, $f\colon E \to \mathbb{R}$ を写像とする. 集合

$$\Gamma_f = \{(x,y) \mid x \in E,\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2$$

がコンパクトならば, f は連続であることを示せ.

117. $\mathbb{R}$ の部分集合 E_n および C を以下のように定める.

$$E_0 = [0,1]$$
$$E_1 = E_0 - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$
$$E_2 = E_1 - \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) - \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

以下帰納的に, E_{n-1} の各閉区間を 3 等分し中央 1/3 の長さの開区間を取り除いて得られる長さ $1/3^n$ の閉区間の和集合を E_n とし,

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subset \mathbb{R}$$

とする. C は<u>カントール集合</u>とよばれる.

(1) C は閉集合であることを示せ.

(2) C は全疎であることを示せ.

(3) C は<u>完全集合</u>, すなわち $C' = C$ であることを示せ.

(4) 半開区間 $[0,1)$ の点 x に対し，その 2 進展開を $0,t_1,t_2,\ldots$ とし，$b_i = 2t_i$ とおく．

$$f(x) = 0,b_1,b_2,\ldots(3\text{ 進展開})$$

とすると f は $[0,1)$ から C への単射写像であることを示せ．

118. 距離空間において次を示せ．

(1) 収束する点列はコーシー列である．

(2) コーシー列は有界である．

(3) コーシー列が集積点をもてば，その集積点に収束する．

119. $\mathbb{R}$ は完備であることを示せ．

第 3 章

位相空間

3.1　位相空間の定義

【定義 **3.1.1**】 集合 X の部分集合の族 $\mathcal{O}$ が次の 3 つの条件をみたすとき, $\mathcal{O}$ は X に位相を定めるといい, 組 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という. また, しばしば, $\mathcal{O}$ のことを X の位相とよぶ.

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.

(ii) $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.

(iii) $O_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ の元を X の開集合という.

【定義 **3.1.2**】 X を集合とし, X の部分集合族 $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ がそれぞれ位相 T_1, T_2 を定めるとする. $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ であるとき, 位相 T_2 は位相 T_1 より強い, または, 位相 T_1 は位相 T_2 より弱いといって, $T_1 \leq T_2$ とあらわす.

問題

120. 定義 3.1.1 の (ii) は次の (ii') と同値であることを示せ.

　(ii') 有限個（1 個以上）の開集合の共通部分は開集合である.

121. (X, d) を距離空間とする. X の（定義 2.1.22 の意味の）開集合全体 $\mathcal{O}$, すなわち,

$$\mathcal{O} = \left\{ O \subset X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } x \in O \text{ に対して, ある } \varepsilon > 0 \text{ が存在して,} \\ U(x, \varepsilon) \subset O \text{ となる} \end{array} \right\}$$

　は X に位相を定めることを示せ.

　この位相を距離の定める位相という. 特にことわらないかぎり, 距離空間を位相空間とみるときは距離の定める位相を考える.

見直し

位相?

122. $\mathbb{R}$ にユークリッド距離から定まる位相を与える．$A_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ とするとき, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [-1, 1]$ となることを示せ.

123. X を集合とする．巾集合 $\mathcal{P}(X)$ は X に位相を定めることを示せ.
この位相を X の離散位相という.
124. X を集合とする．$\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ は X に位相を定めることを示せ.
この位相を密着位相という.
125. 離散距離空間（問題 81 で与えられた距離空間）においては, 距離の定める位相は離散位相と一致することを示せ.
126. $\mathbb{R}$ において $\mathcal{O} = \left\{A \subset \mathbb{R} \;\middle|\; A^c \text{ は有限集合}\right\} \cup \{\emptyset\}$ とすると, $\mathcal{O}$ は $\mathbb{R}$ に位相を定めることを示せ.
この位相を $\mathbb{R}$ のザリスキー位相という.
127. 集合 $\{0, 1\}$ のすべての位相を挙げよ.
128. 位相の強弱 $\leq$ は順序の公理（定義 1.7.1）をみたすことを示せ.
129. 集合 X の任意の位相は, 密着位相より強く, 離散位相より弱いことを示せ.
130. $\mathbb{R}$ の以下の位相の強弱を調べよ．密着位相, ザリスキー位相, ユークリッド距離の定める位相, 離散位相.

3.2　閉集合

【定義 **3.2.1**】　X を位相空間とする.
$F \subset X$ が X の閉集合 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ F^c が X の開集合.

問題

131. X を位相空間とする.
$$\mathcal{F} = \left\{F \;\middle|\; F \text{ は } X \text{ の閉集合}\right\}$$
とするとき, 次が成り立つことを示せ.
(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$, $X \in \mathcal{F}$.
(2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.
(3) $F_\lambda \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$ ならば $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathcal{O}$.
132. 集合 X に密着位相および離散位相を与えたとき, 閉集合はそれぞれどのようなも

のか.

133. $\mathbb{R}$ にザリスキー位相を与えたとき, 閉集合はどのようなものか.
134. $\mathbb{R}$ にユークリッド距離の定める位相を与えたとき, $[a,b]$, $[a,\infty)$ は閉集合であることを示せ.
135. F_n $(n \in \mathbb{N})$ は閉集合であるが, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ は閉集合ではない例を挙げよ.
136. 距離空間においては, 一点からなる集合は閉集合であることを示せ.

3.3 近傍系

【定義 **3.3.1**】 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とする.

1. 部分集合 $U \subset X$ が点 $x \in X$ の近傍である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x \in O \subset U$ となる X の開集合 O が存在する.
2. 集合族 $\mathcal{U}_x(\mathcal{O}) = \{U \mid U \text{ は } x \text{ の近傍}\}$ を x の近傍系という.
3. という.
   $\mathcal{U}(\mathcal{O}) = \{\mathcal{U}_x(\mathcal{O})\}_{x \in X}$ を X の近傍系という.

【定義 **3.3.2**】 $(X,\mathcal{O})$ を位相空間とし, $\mathcal{U}(\mathcal{O}) = \{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ を X の近傍系とする. 各点 $x \in X$ に対し, X の部分集合の族 $\mathcal{V}_x$ が与えられ以下の条件をみたすとき, 族 $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x \in X}$ を X の基本近傍系という.

(i) $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$ $(\forall x \in X)$.
(ii) $\forall U \in \mathcal{U}_x$ に対し, $V \subset U$ となる $V \in \mathcal{V}_x$ が存在する.

【定義 **3.3.3**】 X を集合とする. 各点 $x \in X$ に対し, X の部分集合の空でない族[*1] $\mathcal{U}_x$ が与えられ以下の条件 (これを近傍系の公理という) をみたすとき, 族 $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x\}_{x \in X}$ は集合 X の近傍系であるという.

(i) $U \in \mathcal{U}_x$ ならば $x \in U$.
(ii) $U, V \in \mathcal{U}_x$ ならば $U \cap V \in \mathcal{U}_x$.
(iii) $U \in \mathcal{U}_x$, $U \subset V$ ならば $V \in \mathcal{U}_x$
(iv) $\forall U \in \mathcal{U}_x$ に対し, $x \in V \subset U$ となる V であって, $\forall y \in V$ について $V \in \mathcal{U}_y$ となるようなものが存在する.

【定義 **3.3.4**】 X を集合とする. 各点 $x \in X$ に対し, X の部分集合の空でない族 $\mathcal{V}_x$ が

[*1] $\mathcal{U}_x$ が部分集合の空でない族であるとは $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$ ということである. 「空でない部分集合」の族, すなわち $\emptyset \notin \mathcal{U}_x$ ということではない. (今の場合は (i) から $\emptyset \notin \mathcal{U}_x$ となるが.)

与えられ以下の条件 (これを基本近傍系の公理という) をみたすとき, 族 $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ は集合 X の基本近傍系であるという.

(i) $U \in \mathcal{V}_x$ ならば $x \in U$.
(ii) $U, V \in \mathcal{V}_x$ ならば $W \subset U \cap V$ となるような $W \in \mathcal{V}_x$ が存在する.
(iii) $\forall U \in \mathcal{V}_x$ に対し, $x \in V \subset U$ となる V であって, $\forall y \in V$ について $V \in \mathcal{V}_y$ となるようなものが存在する.

問題

137. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の近傍系 $\mathcal{U}(\mathcal{O})$ は近傍系の公理 (定義 3.3.3) をみたすことを示せ.
138. X を位相空間, O を X の開集合とする. このとき, 任意の $x \in O$ に対して, O は x の近傍であることを示せ.
139. $\mathcal{V}$ が位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の基本近傍系であれば, $\mathcal{V}$ は基本近傍系の公理 (定義 3.3.4) をみたすことを示せ.
140. X を集合とし, $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ は X の基本近傍系 (定義 3.3.4) であるとする. X の部分集合の族 $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ を
$$\mathcal{O}(\mathcal{V}) = \{O \mid O \subset X,\ \forall x \in O, \exists U \in \mathcal{V}_x\ s.t.\ U \subset O\}$$
と定める. ことのき $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ は X の位相であることを示せ.
141. X を集合とし, $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$, $\mathcal{V}' = \{\mathcal{V}'_x\}_{x\in X}$ は X の基本近傍系であるとする. 任意の $x \in X$ について $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{V}'_x$ であれば, $\mathcal{O}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{O}(\mathcal{V}')$, すなわち位相 $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ の方が位相 $\mathcal{O}(\mathcal{V}')$ より弱いことを示せ.
142. X を集合とし, $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ は X の基本近傍系であるとする. このとき $\mathcal{V}$ は位相空間 $(X, \mathcal{O}(\mathcal{V}))$ の基本近傍系であることを示せ.
143. $\mathcal{V}$ が位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の基本近傍系であれば, 問題 140 で定まる位相 $\mathcal{O}(\mathcal{V})$ はもとの位相 $\mathcal{O}$ と等しい, すなわち $\mathcal{O}(\mathcal{V}) = \mathcal{O}$ であることを示せ.
とくに $\mathcal{O}(\mathcal{U}(\mathcal{O})) = \mathcal{O}$ である.
144. 上の問題 142 において, 等号 $\mathcal{V} = \mathcal{U}(\mathcal{O}(\mathcal{V}))$ は必ずしも成立しない, すなわち $\mathcal{V}$ は必ずしも $(X, \mathcal{O}(\mathcal{V}))$ の近傍系とはならない. $\mathcal{V}$ と $\mathcal{U}(\mathcal{O}(\mathcal{V}))$ との関係について考察せよ.
145. X を距離空間とする. $x \in X$ の ε 近傍全体を $\mathcal{U}_x$, $\frac{1}{n}$ 近傍全体を $\mathcal{U}'_x$ とする. すなわち
$$\mathcal{U}_x = \{U(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}, \quad \mathcal{U}'_x = \{U(x, 1/n) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
このとき $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x\}_{x\in X}$ および $\mathcal{U}' = \{\mathcal{U}'_x\}_{x\in X}$ は基本近傍系の公理をみたすこと

を示せ．またこれらの定める位相は等しいことを示せ．

146. $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ に対し実数 $d(x,y), d'(x,y)$ を

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$
$$d'(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2\}$$

で定める．

(1) d, d' は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数となることを示し，それぞれに対する ε 近傍を図示せよ．

(2) このふたつの距離の定める位相は等しいことを示せ．

147. $\mathbb{R}$ に密着, 離散, ザリスキー位相をいれたとき，それぞれに対する $\mathcal{U}_x(\mathcal{O})$ を求めよ．

148. X を集合とし, $\mathcal{V}=\{\mathcal{V}_x\}_{x\in X}$ は X の基本近傍系であるとする．$\mathcal{V}$ が条件「$\forall U\in\mathcal{V}_x$ と $\forall y\in U$ について $U\in\mathcal{V}_y$ である」をみたすとき，任意の $U\in\mathcal{V}_x$ は位相空間 $(X,\mathcal{O}(\mathcal{V}))$ の開集合であること，すなわち $\mathcal{V}_x\subset\mathcal{O}(\mathcal{V})$ $(\forall x\in X)$ であることを示せ．

149. 実数 $a\in\mathbb{R}$ に対し実数の部分集合の族 $\mathcal{U}_a$ を $\mathcal{U}_a=\{[a,b)\mid b>a\}$ で定めると，$\mathcal{U}=\{\mathcal{U}_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ は集合 $\mathbb{R}$ の基本近傍系であることを示せ．$\mathbb{R}$ にこの基本近傍系から定まる位相をいれた位相空間 $(\mathbb{R},\mathcal{O}(\mathcal{U}))$ をソルゲンフリー直線という．ソルゲンフリー直線においては任意の閉区間 $[a,b]$ は開集合かつ閉集合であることを示せ．

150. ソルゲンフリー直線の位相とユークリッド距離から定まる位相はどちらが強いか．

3.4　内部, 外部, 閉包

X を位相空間, A を X の部分集合とする．

【定義 **3.4.1**】 A に含まれる X の開集合全体のなす族を $\mathcal{U}$ とする．

$$\mathcal{U}=\left\{O \mid O\subset A,\ O\text{ は }X\text{ の開集合}\right\}$$

このとき $A^o=\cup\mathcal{U}$ を A の内部あるいは内核という．

【定義 **3.4.2**】 A の補集合 A^c の内部を A の外部といい A^e と書く．すなわち $A^e=(A^c)^o$．

【定義 **3.4.3**】 A の内部にも外部にもはいらない点を A の境界点という．境界点の全体を A の境界といい, A^f と書く．すなわち $A^f=(A^o\cup A^e)^c$．

【定義 **3.4.4**】 $x\in A$ とする．$x\in U\subset A$ となるような x の近傍 U が存在するとき, x は A の内点であるという．A の補集合 A^c の内点を A の外点という．

【定義 **3.4.5**】 A を含む X の閉集合全体のなす族を $\mathcal{F}$ とする．

$$\mathcal{F}=\left\{F \mid F\subset A,\ F\text{ は }X\text{ の閉集合}\right\}$$

このとき $\overline{A} = \cap\mathcal{F}$ を A の<u>閉包</u>という. A の閉包を A^a と書くこともある.

【定義 **3.4.6**】 B を X の部分集合とする. $\overline{A} \supset B$ であるとき A は B で<u>稠密</u>であるという. とくに $\overline{A} = X$ となるとき A は<u>稠密</u>であるという.

【定義 **3.4.7**】 $(A^a)^o = \emptyset$ であるとき A は<u>全疎</u>であるという.

問題

151. A の内部は A の内点全体の集合であること, A の外部は A の外点全体の集合であることを示せ.
152. A の内部は A に含まれる開集合のうち, 包含関係に関して最大のものであることを示せ.
153. A の閉包は A を含む閉集合のうち, 包含関係に関して最小のものであることを示せ.
154. $x \in X$ が A の外点 $\Leftrightarrow$ $U \cap A = \emptyset$ となる x の近傍 U が存在する.
155. $x \in X$ が A の境界点 $\Leftrightarrow$ x の任意の近傍 U について, $U \cap A \neq \emptyset$ かつ $U \cap A^c \neq \emptyset$.
156. $x \in \overline{A}$ $\Leftrightarrow$ x は A の内点または境界点 $\Leftrightarrow$ x の任意の近傍 U について $U \cap A \neq \emptyset$.
157. $\mathbb{R}$ に, 密着, ザリスキー, ユークリッド, ソルゲンフリー直線, 離散位相をいれるとき, それぞれについて以下の部分集合の内部および閉包を求めよ.

$$\{0\}, \qquad (0,1), \qquad (0,1], \qquad [0,1), \qquad [0,1], \qquad \mathbb{Q}, \qquad \mathbb{R}$$

158. 次が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.
    (1) $A \subset B \Rightarrow A^o \subset B^o$
    (2) $(A \cap B)^o = A^o \cap B^o$
    (3) $(\cup A_\lambda)^o = \cup A_\lambda^o$
    (4) $(A^o)^o = A^o$
159. $(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)^o = \cap_{n=1}^{\infty} A_n^o$ は正しいか?
160. 次が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.
    (1) $A \subset B \Rightarrow A^a \subset B^a$
    (2) $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$
    (3) $(\cap A_\lambda)^a = \cap A_\lambda^a$
    (4) $(A^a)^a = A^a$
161. $(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)^a = \cup_{n=1}^{\infty} A_n^a$ は正しいか?
162. A, B, C を位相空間 X の部分集合とする. $A \subset B \subset C$ であって, A は B で, B は C で稠密であるならば, A は C で稠密であることを示せ.
163. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において, 以下の各部分集合の内部および閉包を求

めよ.

(1) $\bigl\{(x_1,x_2) \bigm| t$ の二次方程式 $t^2+x_1t+x_2=0$ が実根を持つ$\bigr\}$

(2) $\bigl\{(x_1,x_2) \bigm| t$ の二次方程式 $t^2+x_1t+x_2=0$ が虚根を持つ$\bigr\}$

(3) $\{(x_1,x_2) \mid x_1,x_2\in\mathbb{Q}\}$

(4) $\{(x_1,x_2) \mid 0\le x_1=x_2<1\}$

(5) $\bigl\{(x_1,x_2) \bigm| x_1=a+b, x_2=a^2+b^2\ \ (\exists a>0,\exists b>0)\bigr\}$

164. S を非可算集合とする. S の部分集合 A に対し A の閉包を

$$\overline{A}=\begin{cases}A & A\text{ が高々可算集合}\\ S & A\text{ が非可算集合}\end{cases}$$

と定めることで S に位相をいれることができる. これを示せ. また, この位相空間 S においては, 可算個の開集合の共通部分は開集合であることを示せ.

165. $\mathbb{N}$ の部分集合 A に対し A の閉包を

$$\overline{A}=\begin{cases}\{n \mid n\in\mathbb{N}, n\le\max A\} & A\text{ が有限集合}\\ \mathbb{N} & A\text{ が無限集合}\end{cases}$$

と定めることで $\mathbb{N}$ に位相をいれることができる. この空間の開集合および閉集合を全て求めよ.

166. $\mathbb{N}$ に上の問題 165 の位相をいれる. $\mathbb{N}$ の閉集合の列 $A_1,A_2,\ldots$ が減少列, すなわち $A_1\supset A_2\supset\ldots$ をみたしていれば, ある番号 n があって $A_n=A_{n+1}=\ldots$ となっていることを示せ. 増加列 $A_1\subset A_2\subset\ldots$ の場合はどうか?

167. 上の問題 166 と同様なことを問題 164 の空間および $\mathbb{R}$ にザリスキー位相をいれた空間について考えよ.

3.5　点列の収束

【定義 **3.5.1**】 X を位相空間とする. X の点列 $\{x_n\}$ が点 $x\in X$ に<u>収束</u>する $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x の任意の近傍 U に対し, ある自然数 $N\in\mathbb{N}$ が存在し, $n\ge N$ ならば $x_n\in U$ となる.

このとき点 x を点列 $\{x_n\}$ の<u>極限点</u>といい $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=x$ あるいは $x_n\to x\ (n\to\infty)$ と書く.

問題

168. $\mathcal{V}$ を位相空間 X の基本近傍系とする. このとき次は同値であることを示せ.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=x$

(2) $\forall V \in \mathcal{V}_x$ に対し, ある自然数 $N \in \mathbb{N}$ が存在し, $n \geq N$ ならば $x_n \in V$ となる.

169. 密着位相の場合, どのような点列が収束するか. 離散位相の場合はどうか.

170. (1) $\mathbb{R}$ の部分集合 A が高々可算個の有理数からなる集合であるときに A は閉集合であるとすることで $\mathbb{R}$ に位相を定めることができることを示せ.

(2) $\mathbb{R}$ に上の位相をいれたとき, 次の点列の極限点を求めよ.

i. $x_n = \frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2},\ x_1 = 0,\ x_2 = a \in \mathbb{R}$

ii. $x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}},\ x_1 = 1$

3.6　フィルターの収束

3.7　連続写像と相対位相

【定義 **3.7.1**】 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A の部分集合族 $\mathcal{O}_A$ を

$$\mathcal{O}_A = \{A \cap O \mid O \in \mathcal{O}\}$$

と定めると, $\mathcal{O}_A$ は A の位相となる. この位相を X による A の<u>相対位相</u>という.
位相空間の部分集合に相対位相をいれて位相空間とみたとき, <u>部分空間</u>という.

【定義 **3.7.2**】 X, Y を位相空間とする.
写像 $f\colon X \to Y$ が点 $x \in X$ で<u>連続</u>である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $f(x) \in Y$ の任意の近傍 V に対して, x の近傍 U が存在して $f(U) \subset V$ となる.
X の全ての点で連続であるとき f は<u>連続</u>である, あるいは f は<u>連続写像</u> であるという.

【定義 **3.7.3**】 位相空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ は次の 2 つの条件をみたすとき<u>同相写像</u>または<u>同位相写像</u>であるという.

(i) f は全単射

(ii) $f,\ f^{-1}$ はともに連続

位相空間 X, Y の間に同相写像が存在するとき X と Y は<u>同相</u>である, または<u>同位相</u>であるという.

問題

171. 定義 3.7.1 の $\mathcal{O}_A$ が位相であることを示せ.

172. X, Y を位相空間, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ をそれぞれ X, Y の基本近傍系とし, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 次の 2 条件は同値であることを示せ.

(1) f が点 $x \in X$ で連続

(2) $\forall V \in \mathcal{V}_{f(x)}$ に対し, ある $U \in \mathcal{U}_x$ が存在して $f(U) \subset V$ となる

173. 集合 X に位相 T_1, T_2 をいれた位相空間をそれぞれ X_1, X_2 とする. このとき恒等写像 $\mathrm{id}\colon X_1 \to X_2$ が連続となる条件を考察せよ.

174. X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする. A の相対位相は, 包含写像 $i\colon A \to X$ が連続となるような最弱位相であることを示せ.

175. $f\colon X \to Y$ を連続写像とする. 次が正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.

(1) $O \subset X$ が開集合ならば $f(O) \subset Y$ も開集合である.

(2) $F \subset X$ が閉集合ならば $f(F) \subset Y$ も閉集合である.

176. X に密着位相がはいっているとき, 写像 $f\colon X \to \mathbb{R}$ が連続になるための条件を求めよ. X に離散位相をいれるとどうか.

177. $\mathbb{R}$ にザリスキー位相をいれる. 次の写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の連続性を調べよ.

(1) f が多項式のとき

(2) $f(x) = e^x$

(3) $f(x) = \cos x$

178. X を位相空間, $A \subset B \subset X$ を部分集合とする. 次を示せ.

(1) B が閉集合かつ B の相対位相で A が B の閉集合ならば, A は X の閉集合である.

(2) B が開集合かつ B の相対位相で A が B の開集合ならば, A は X の開集合である.

179. $\mathbb{R}$ の部分集合 $(1,2]$ は $\mathbb{R}$ の開集合ではないが, 部分空間 $(0,2]$ の開集合である.

180. $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ を実 $n \times n$ 行列全体のなす集合とする. $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ のノルム $||A||$ を $||A|| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$ により定める.

(1) $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に対し, $d(A,B) = ||A - B||$ と定めると, d は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上の距離関数であることを示せ.

(2) この距離で位相をいれたとき $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ と $\mathbb{R}^{n^2}$ は同相であることを示せ.

181. $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ に上の問題 180 の位相をいれる.

(1) 行列に対しその行列式を対応させる関数 $\det\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.

(2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \mid \det(A) \neq 0\}$ は $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ の稠密な開集合であることを示せ.

(3) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ に相対位相をいれる. $\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ.

(4) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \mid \det(A) = 1\}$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉集合であることを示せ.

182. 開区間 $(0,1)$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれると, $(0,1)$ と $\mathbb{R}$ は同相であることを示せ.

183. 半直線 $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ および円 $S^1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ にそ

れぞれ相対位相をいれる．写像 $f\colon \mathbb{R}^+ \to S^1$ を $f(x) = \left(\cos\frac{2\pi x}{1+x}, \sin\frac{2\pi x}{1+x}\right)$ で定めると，f は連続な全単射であるが同相写像ではないことを示せ．

184. 連続な単射 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ であって，f が $\mathbb{R}$ から $f(\mathbb{R})$ への同相写像にならないような例を挙げよ．ただし $f(\mathbb{R})$ には $\mathbb{R}^2$ からの相対位相をいれる．
185. 楕円と円は同相である．
186. 位相空間 X と Y が同相であることと，連続写像 $f\colon X \to Y$ と $g\colon Y \to X$ で，$g \circ f = \mathrm{id}_X$, $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となるものが存在することは同値である．

3.8　位相の生成

3.8.1　位相の基と準基

【定義 **3.8.1**】 X を集合とする．$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ に対し，$\mathcal{B}$ を含む位相全ての共通部分，すわなち $\mathcal{B}$ の元が開集合となるような最弱の位相を $\mathcal{B}$ が<u>生成する位相</u>といい $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ で表す．

【定義 **3.8.2**】 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の<u>基</u>あるいは<u>開基</u>である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 任意の開集合 O が $\mathcal{B}$ に属する開集合の和集合 $O = \bigcup\limits_{\lambda} O_\lambda$ $(O_\lambda \in \mathcal{B})$ として表せる．
(0 個の集合の和集合は空集合である，あるいはそう約束する.)

【定義 **3.8.3**】 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ が $\mathcal{O}$ の<u>準基</u>である $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{B}$ の有限個の元の共通部分として表される集合全体が $\mathcal{O}$ の基となる．
(0 個の集合の共通部分は全体 X と約束する.)

問題

187. X を集合とし，$\mathcal{O}_\lambda$ を X の位相とする．このとき $\bigcap\limits_{\lambda} \mathcal{O}_\lambda$ も X の位相となることを示せ．
188. $\mathcal{B}$ を集合 X の部分集合の族とする．このとき $\mathcal{B}$ は，$\mathcal{B}$ の生成する位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の準基であることを示せ．
189. $\mathcal{B}$ を集合 X の部分集合の族とする．$\mathcal{B}$ を開基とする位相は，存在すれば，一意的である．
190. $\mathcal{B}$ を集合 X の部分集合の族とする．次の 3 条件は同値であることを示せ．
    (1) $\mathcal{B}$ は，$\mathcal{B}$ の生成する位相 $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ の開基である
    (2) $\mathcal{B}$ を開基とする X の位相が存在する
    (3) $\mathcal{B}$ は次の 2 条件をみたす
        (i) 任意の $x \in X$ に対し，$x \in O$ となる $O \in \mathcal{B}$ が存在する

(ii) $O_1, O_2 \in \mathcal{B}$ ならば, 任意の $x \in O_1 \cap O_2$ に対し, $x \in O \subset O_1 \cap O_2$ となる $O \in \mathcal{B}$ が存在する.

191. 位相空間の基本開近傍系は開基となることを示せ.

3.8.2　積位相と直和

【定義 **3.8.4**】 $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. 直積集合 $X \times Y$ に, 部分集合の族 $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ を開基とする位相をいれた位相空間を X と Y の直積空間という.

【定義 **3.8.5**】 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする. 直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に, 部分集合の族

$$\mathcal{B} = \left\{ \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある有限部分集合 } L \subset \Lambda \text{ が存在して, } \lambda \in L \text{ ならば } A_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda, \\ \lambda \notin L \text{ ならば } A_\lambda = X_\lambda \end{array} \right\}$$

を開基とする位相 (この位相を直積位相という) をいれた位相空間を, 族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積空間または弱位相による直積空間という.

【定義 **3.8.6**】 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする. 非交和 $\coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ に, 位相

$$\mathcal{O} = \left\{ O = \coprod_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \;\middle|\; O_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda \right\}$$

をあたえた位相空間を族 $\{(X_\lambda, \mathcal{O}_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ の位相和という.

問題

192. 定義 3.8.4 および定義 3.8.5 の $\mathcal{B}$ は問題 190 の条件をみたすことを示せ.
193. 定義 3.8.5 において $\Lambda = \{1, 2\}$ であるとき, この意味での直積空間 $\prod_{\lambda\in\{1,2\}} X_\lambda$ と, 定義 3.8.4 の意味での直積空間 $X_1 \times X_2$ は同相であることを示せ.
194. $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を直積空間, $\pi_\lambda \colon X \to X_\lambda$ を標準的な射影とする.
    (1) 直積空間の位相は, 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し π_λ が連続となるような, 最弱の位相であることを示せ.
    (2) π_λ は開写像であることを示せ.
    (3) π_λ が閉写像とはならないような例を挙げよ.
    (4) A を位相空間とする. 写像 $f \colon A \to X$ が連続であるための必要十分条件は全ての λ に対し $\pi_\lambda \circ f \colon A \to X_\lambda$ が連続となることである.

(5) A を位相空間とし, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し連続写像 $f_\lambda\colon A \to X_\lambda$ が与えられているとする．このとき連続写像 $f\colon A \to X$ で, 全ての λ に対し $\pi_\lambda \circ f = f_\lambda$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ．

195. $X = \coprod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を位相和, $i_\lambda\colon X_\lambda \to X$ を標準的包含写像とする．

(1) 位相和の位相は, 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し i_λ が連続となるような, 最強の位相であることを示せ．

(2) i_λ は開写像かつ閉写像であることを示せ．

(3) A を位相空間とする．写像 $f\colon X \to A$ が連続であるための必要十分条件は全ての λ に対し $f \circ i_\lambda\colon X_\lambda \to A$ が連続となることである．

(4) A を位相空間とし, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し連続写像 $f_\lambda\colon X_\lambda \to A$ が与えられているとする．このとき連続写像 $f\colon X \to A$ で, 全ての λ に対し $f \circ i_\lambda = f_\lambda$ をみたすものがただひとつ存在することを示せ．

196. $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ は同相である．

197. X, Y を位相空間とする．

(1) $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_x\}$, $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_y\}$ がそれぞれ X, Y の基本近傍系であるとき, $\mathcal{W}_{(x,y)} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{V}_y\}$ とおけば, $\left\{\mathcal{W}_{(x,y)}\right\}$ は直積空間 $X \times Y$ の基本近傍系となることを示せ．

(2) $A \subset X$, $B \subset Y$ を部分集合とする．直積空間 $X \times Y$ の部分集合として $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ であることを示せ．ただし右辺は A の X における閉包 $\overline{A}$ と B の Y における閉包 $\overline{B}$ の直積である．

198. X, Y, Z を位相空間とする．直積空間 $X \times Y$ から Z への写像 $f\colon X \times Y \to Z$ が点 $(x, y) \in X \times Y$ で連続であるための必要十分条件は $f(x, y) \in Z$ の任意の近傍 W に対して, x の近傍 U と y の近傍 V が存在して $f(U \times V) \subset W$ となることである．

199. X, Y, Z を位相空間, $f\colon X \times Y \to Z$ を直積空間 $X \times Y$ から Z への連続写像とする．点 $a \in X$ に対し, 写像 $f_a\colon Y \to Z$ を $f_a(y) = f(a, y)$ により定義すると, f_a は連続写像であることを示せ．

200. 次の写像はいずれも連続であることを示せ．ただし $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ である．

(1) $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \xrightarrow{\ +\ } & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

(2) $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\ -\ } & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ a & \longmapsto & -a \end{array}$$

(3) $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\times\times\mathbb{R}^\times & \xrightarrow{\ \times\ } & \mathbb{R}^\times \\ \cup & & \cup \\ (a,b) & \longmapsto & ab \end{array}$$

(4) $$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times \\ \cup & & \cup \\ a & \longmapsto & a^{-1} \end{array}$$

201. 次の写像はいずれも連続であることを示せ．

(1)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{+} & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \cup\!\!\!\!\raisebox{0pt}{} & & \cup \\ (A,B) & \longmapsto & AB \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{-} & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \\ \cup & & \cup \\ A & \longmapsto & A^{-1} \end{array}$$

一般に, 群 G が位相空間であり, 積および逆元をとる写像が連続であるとき, G を位相群という.

202. $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ は $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉集合であることおよび, 部分群であることを示せ. このようなものを閉部分群という.

203. 群 G に離散位相をいれると, 位相群になる.

204. $I = [0,1]$, $X_i = \mathbb{R}$ $(\forall i \in I)$ により与えられる位相空間の族 $\{X_i\}_{i\in I}$ の直積空間 $\prod_{i\in I} X_i$ を, (集合として) $\mathbb{R}^I = \{f\colon I \to \mathbb{R}\}$ と同一視する. このとき次は同値であることを示せ.

(1) $\prod_i X_i$ の点列 $\{f_n\}$ が $f \in \prod_i X_i$ に収束する

(2) 各 $x \in I$ において $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ である

205. X を $\mathbb{R}$ 上のノルム空間, X^* をその共役空間とし, Λ を X の基底とする.

(1) ベクトル空間として $\mathrm{Hom}(X,\mathbb{R}) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathrm{Hom}(\mathbb{R}\lambda,\mathbb{R}) \cong \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{R}$ と自然に同一視されることを示せ.

(2) 上の同一視により $X^* \subset \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{R}$ とみて, X^* に直積空間 $\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{R}$ からの相対位相をいれる. $f \in X^*$, $\varepsilon > 0$, 有限部分集合 $F \subset X$ に対し, X^* の部分集合 $U(f,\varepsilon,F)$ を

$$U(f,\varepsilon,F) = \bigcap_{x\in F} \{g \in X^* \mid |g(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

により定める . このとき

$$\bigl\{U(f,\varepsilon,F) \bigm| \varepsilon > 0, F \subset X \text{ は有限集合}\bigr\}$$

は f の基本近傍系であることを示せ.

この位相を汎弱位相という.

206. 2 点からなる集合 $X_n = \{0,1\}$ に, $d_n(0,1) = 1$ で定まる (離散) 距離を与え, 直積集合 $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ を考える.

(1) $x = (x_n), y = (y_n) \in X$ に対し $d(x,y) \in \mathbb{R}$ を

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1 + d_n(x_n,y_n)}$$

で定めると, d は X 上の距離関数であることを示せ.

(2) この距離の定める位相と直積位相は等しいことを示せ.

(3) この位相により, X は完全不連結, コンパクト空間**??**であることを示せ.

(4) この位相により, X はカントール集合 (問 117) と同相になることを示せ.

3.8.3　等化位相

【定義 **3.8.7**】 $(X, \mathcal{O}_X)$ を位相空間, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする. Y の部分集合族

$$\mathcal{O}_f = \{O \subset Y \mid f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_X\}$$

は Y に位相を与える. この位相を f による等化位相といい, 位相空間 $(Y, \mathcal{O}_f)$ を f による等化空間という.

【定義 **3.8.8**】 関係 $\sim$ を位相空間 X 上の同値関係とする. 商集合 $X/\sim$ に, 自然な射影 $\pi\colon X \to X/\sim$ による等化位相を与えたものを同値関係 $\sim$ による商空間という.

【定義 **3.8.9**】 X を位相空間, $A \subset X$ を空でない部分空間とする. $A \times A \subset X \times X$ の生成する同値関係 (問題 212) による商空間を部分空間 A を一点に縮めた空間といい, X/A と書く.

【定義 **3.8.10**】 X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を全射とする. Y の位相が f による等化位相と一致するとき, すなわち「 $O \subset Y$ が開集合 $\Leftrightarrow f^{-1}(O)$ が開集合」が成り立つとき f を等化写像という.

問題

207. 定義 3.8.7 の $\mathcal{O}_f$ は位相であることを示せ.
208. 定義 3.8.7 で, f による等化位相は, f を連続にする最強の位相であることを示せ.
209. X, Y, Z を位相空間, $f\colon X \to Y$ を等化写像とする. このとき写像 $g\colon Y \to Z$ が連続であるための必要十分条件は $g \circ f\colon X \to Z$ が連続であることである.
210. X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を連続な全射とし, 問題 35 の写像 $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ を考える.
    (1) $\overline{f}$ は連続であることを示せ.
    (2) f が開写像ならば $\overline{f}$ は同相写像であることを示せ.
211. $\mathbb{N}$ に離散位相をいれる. $\mathbb{N}$ と閉区間 $I = [0, 1]$ の直積空間 $\mathbb{N} \times I$ において部分空間 $\mathbb{N} \times \{0\}$ を一点に縮めて得られる空間から $\mathbb{R}^2$ への写像

$$f\colon \mathbb{N} \times I/\mathbb{N} \times \{0\} \to \mathbb{R}^2$$

を, $f([n,t]) = (nt, 1-t)$ により定める (welldefined か?). このとき f は連続な全単射であるが, 同相写像ではない.

見直し

融合和, 連続写像の張り合わせを追加

3.8.4　誘導位相

見直し

終位相, 始位相について書く

第 4 章

位相空間の性質

第 5 章

追加

5.1　2011 年度追加

問題

212. X を集合, $A \subset X$ を空でない部分集合とし, $A \times A \subset X \times X$ の生成する X 上の同値関係を $\sim$ とする．このとき, $x \sim y \Leftrightarrow$「$x = y$ または $x, y \in A$」であることを示せ．また, この同値関係による商集合はどのようなものか.
213. X を集合, Y を順序集合とする． $f, g \in Y^X$ に対し $f \leq g \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x \in X : f(x) \leq g(x)$ と定義したとき, 関係 $\leq$ は Y^X 上の順序関係であることを示せ.
214. 集合 $\{0, 1\}$ に普通の, つまり $0 < 1$ という順序をいれる．X を集合とし, 2^X に, 問題 213 の順序をいれる．このとき問題 21 の写像 $\chi\colon \mathcal{P}(X) \to 2^X$ は順序を保つことを示せ．ただし $\mathcal{P}(X)$ には包含関係で順序をいれる (問題 45).
215. X を集合, (Y, d_Y) を距離空間, $F(X, Y)$ を X から Y への写像全体のなす集合とする． $f_0 \in F(X, Y)$ と, $\varepsilon > 0$ に対し,
$$U(f_0, \varepsilon) = \left\{ f \in F(X, Y) \;\middle|\; \sup_{x \in X} d_Y\left(f(x), f_0(x)\right) < \varepsilon \right\}$$
とおく． 各 $f_0 \in F(X, Y)$ に対し, $F(X, Y)$ の部分集合の族 $\mathcal{V}_{f_0}$ を $\mathcal{V}_{f_0} = \{U(f_0, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ と定めると, 族 $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_{f_0}\}$ は基本近傍系の公理をみたすことを示せ.
216. P を順序集合, $X \subset P$ とする．任意の $x \in X$ と, 任意の $y \in P (y \geq x)$ に対し, $y \in X$ となるとき, X を upper set という．また, 任意の $x \in X$ と, 任意の $y \in P (y \leq x)$ に対し, $y \in X$ となるとき, X を lower set という.
X が upper set ならば X^c は lower set か？
217. P を有限順序集合とする．単射 $f\colon P \to P$ が, 任意の $x \in P$ に対し, $x \leq f(x)$ を

みたせば, f は恒等写像である.

第 6 章

試験問題

6.1 前期中間

1999

1 i) $f(A \cap B) \subsetneqq f(A) \cap f(B)$ となる例を述べよ.

ii) A を X の真の部分集合 ($A \subsetneqq X$) とする. このとき $f\colon X \to A$ で単射となる例を作れ.

2 i) A を可算集合, B を有限集合とする. このとき $A \cup B$ は可算集合になることを示せ. ただし $A \cap B = \emptyset$ とする.

ii) A, B を可算集合とする. このとき $A \cup B$ は可算集合になることを示せ. ただし $A \cap B = \emptyset$ とする.

3 A の巾集合 $P(A)$ と $2^A = \{f \mid f\colon A \to \{0,1\}\}$ は 1 対 1 に対応することを示せ.

4 $\mathbb{R} \supset A, B$ であり $\max A, \min A, \max B, \min B$ が存在するとする.

i) $A \subset B$ ならば $\max A \leq \max B$ かつ $\min A \geq \min B$ となることを示せ.

ii) 逆は成り立つか. すなわち $\max A \leq \max B$ かつ $\min A \geq \min B$ ならば $A \subset B$ となるか.

5 $\mathbb{R} \supset A$ が次の集合のとき $\max A, \min A, \sup A, \inf A$ を求めよ.

i) $A = (0, 1]$.

ii) $A = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

2000

$\boxed{\mathbf{6}}$ $f\colon X \to X$ で f は全射であるが, 単射とならない例を作れ.

$\boxed{\mathbf{7}}$ i) X を可算集合, A を X の部分集合とする. このとき A が可算集合で $X - A$ が可算集合となる例を作れ.

ii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合になることを示せ.

$\boxed{\mathbf{8}}$ $2^{\mathbb{N}}$ は可算でないことを示せ.

$\boxed{\mathbf{9}}$

$$A = \left\{ \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right| \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

とする.

i) $\sup A$ を求めよ. (求める過程も書け.)

ii) $\max A, \min A, \inf A$ を求めよ. (答だけでよい.)

$\boxed{\mathbf{10}}$ 実数列 $\{a_n\}$ が収束列で $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ であるとすると, ある番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ ならば $a_n > 0$ となることを示せ.

2002

$\boxed{\mathbf{11}}$ 次を示せ.

i) A, B を可算集合, $A \cap B = \emptyset$ とする. このとき $A \cup B$ も可算.

ii) X を非可算集合, A を可算集合, $A \subset X$ とする. このとき $X - A$ も非可算集合となる.

iii) X を非可算集合, A を可算集合, $A \subset X$ とする. このとき X と $X - A$ の濃度は等しい.

$\boxed{\mathbf{12}}$

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

とする.

i) $\max A$ が存在しないことを示せ.

ii) $\min A, \inf A, \sup A$ を求めよ. (答だけでよい.)

$\boxed{\mathbf{13}}$ i) $A \subset B \subset \mathbb{R}$ とし,

$$U_A = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall a \in A \text{ に対し } x \geq a \right\}$$

$$U_B = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \forall b \in B \text{ に対し } x \geq b \right\}$$

をそれぞれ A, B の上界全体とする．このとき $U_A \supset U_B$ を示し，$\sup A \leq \sup B$ を示せ．

ii) $A_n \subset \mathbb{R}$, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ は有界であるとする．
$B = \{\sup A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ とする．このとき $\sup A$ は B の上界であること及び $\sup B$ は A の上界であることを示し，$\sup A = \sup B$ を示せ．

$\boxed{\textbf{14}}$ 実数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束列で $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, $a > b$ であるとすると, ある番号 $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, $n \geq n_0$ ならば $a_n > b_n$ となることを示せ.

2003

$\boxed{\textbf{15}}$ 次の命題が正しければ証明し, 間違っていたら反例を与えよ.

i) $f\colon X \to X$ が単射ならば全射である.

ii) $f\colon X \to Y$ を写像, $X = A \cup B$, $Y = C \cup D$ で $f(A) \subset C$, $f(B) \subset D$ とする.
$f\colon A \to C$, $f\colon B \to D$ が単射ならば, $f\colon X \to Y$ は単射である.

$\boxed{\textbf{16}}$ i) X を可算集合, A を X の部分集合とする. このとき A が可算集合で $X - A$ が可算集合となる例を作れ.

ii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算集合になることを示せ.

$\boxed{\textbf{17}}$ 次を普通の文にせよ.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ \{x + y \geq 0\}$$

$\boxed{\textbf{18}}$

$$A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{m} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$$

とする.

i) $\inf A$ を求めよ. (求める過程も書け.)

ii) $\min A, \max A, \sup A$ を求めよ. (答だけでよい.)

$\boxed{\textbf{19}}$ $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない, 上に有界な部分集合とし，$AB \subset \mathbb{R}$ を

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

により定める.
任意の $a \in A$ について $a \geq 0$, かつ任意の $b \in B$ について $b \geq 0$ であるとする.

i) $\sup AB \leq \sup A \cdot \sup B$ を示せ.

ii) $\sup AB = \sup A \cdot \sup B$ を示せ.

20 実数列が収束列であれば, 有界であることを示せ.

2005

21 i) $f\colon X \to Y$ を写像, $A_n \subset Y$, $n = 1, 2, \ldots$ を部分集合とする．このとき次を示せ.

$$f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n)$$

ii) 写像 $f\colon X \to \mathbb{R}$ と $a \in \mathbb{R}$ について次を示せ.

$$\{x \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \;\middle|\; f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}$$

22 A, B を集合, $i\colon A \to B$ を写像とする．次の 2 条件 (1), (2) が同値であることを示せ.

(1) $i\colon A \to B$ は単射

(2) 任意の集合 X と任意の写像 $f, g\colon X \to A$ について次をみたす．『$if = ig$ ならば $f = g$』

23 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R} - \mathbb{N}$ の間の全単射を具体的にひとつ作れ.

24 $A \subset \mathbb{R}$ が次の集合であるとき $\sup A, \max A, \inf A, \min A$ を求めよ．(答のみでよい.)

i) $A = \left\{1 + \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

ii) $A = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

iii) $A = \left\{\sin \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

25 $A_n \subset \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ を部分集合, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ は有界であるとする．$a_n = \inf A_n$ とおく．次の不等式が正しければ証明し, 正しくなければ反例をあげよ.

i) $\inf A \leq \inf_n \{a_n\}$

ii) $\inf A \geq \inf_n \{a_n\}$

2006

26 X, Y, Z を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ を写像とする. 次の命題が正しければ証明し, 間違っていたら反例を与えよ.

i) $g \circ f\colon X \to Z$ が単射ならば $f\colon X \to Y$ は単射である.

ii) $g \circ f\colon X \to Z$ が単射ならば $g\colon Y \to Z$ は単射である.

iii) $g \circ f\colon X \to Z$ が全射かつ $g\colon Y \to Z$ が単射ならば $f\colon X \to Y$ は全射である.

27 A, B を集合, $p\colon A \to B$ を写像とする. 次の 2 条件 (1), (2) が同値であることを示せ.

(1) $p\colon A \to B$ は全射

(2) 任意の集合 X と任意の写像 $f, g\colon B \to X$ について次をみたす. 『$f \circ p = g \circ p$ ならば $f = g$』

28 $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R} - 2\mathbb{Z}$ の間の全単射を具体的にひとつ作れ, ただし $2\mathbb{Z} = \{2l \mid l \in \mathbb{Z}\}$ は偶数全体のなす集合とする.

29 $A \subset \mathbb{R}$ が次の集合であるとき $\sup A, \max A, \inf A, \min A$ を求めよ. (答のみでよい.)

i) $A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

ii) $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$

iii) $A = \left\{\sin n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$

30 $A, B \subset \mathbb{R}$ を有界な部分集合, $A \cap B \neq \emptyset$ とする. このとき次の不等式を示せ.

$$\sup A \cap B \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$

また等号が成立しない例を挙げよ.

2007

31 i) X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする. $A \subset X$, $B \subset Y$ について次を示せ.

$$f\left(f^{-1}(B) \cap A\right) = B \cap f(A)$$

ii) X を集合, $f\colon X \to \mathbb{R}$ を写像とする. $a \in \mathbb{R}$ について次を示せ.

$$\{x \mid f(x) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \;\middle|\; f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}$$

32 i) $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の濃度が等しいことを示せ.

ii) 閉区間 $[0,1]$ と $[0,3]$ の濃度が等しいことを示せ.

33 $A, B \subset \mathbb{R}$ を空でない有界な部分集合とする. このとき次を示せ.

$$\inf A \cup B = \min\{\inf A, \inf B\}$$

34 $k \in \mathbb{N}$ とする.

$$a_n = \sin\frac{n\pi}{k}$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ の上極限 $\limsup a_n$ と下極限 $\liminf a_n$ を求めよ.

2008

35 i) $\Delta = \{(n,n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とする. このとき, 具体的に全単射を作ることにより, Δ と $\mathbb{N}$ の濃度が等しいことを示せ.

ii) $A = \{(i,n) \mid n \in \mathbb{N},\ i = 1, 2\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ とする. このとき, 具体的に全単射を作ることにより, A と $\mathbb{N}$ の濃度が等しいことを示せ.

iii) $2^{\mathbb{N}}$ は可算集合ではないことを示せ.

36 i) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を集合の族とする. 下極限 $\varliminf_{n\to\infty} A_n$ の定義を述べよ.

ii) X を集合, $f\colon X \to \mathbb{R}$, $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ を写像とする. 正実数 $\varepsilon > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し集合 $A_{n,\varepsilon} \subset X$ を

$$A_{n,\varepsilon} = \{x \mid x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}$$

により定める. このとき次の (a),(b) は同値であることを示せ.

(a) $x \in X$ が $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ をみたす.

(b) $x \in \bigcap_{\varepsilon>0}\left(\varliminf_{n\to\infty} A_{n,\varepsilon}\right)$

37 i) $\limsup\left\{(-1)^n + \frac{1}{n}\right\}$ を求めよ. (求める過程も書け.)

ii) $A_n = \left[(-1)^n + \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right] \subset \mathbb{R}$ とするとき, $\varliminf_{n\to\infty} A_n$ を求めよ.

iii) $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を有界な実数列で, $a_n < b_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ をみたすものとし, $\limsup a_n = \alpha$, $\liminf b_n = \beta$, $A_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ とおく. このとき $(\alpha, \beta) \subset \varliminf_{n\to\infty} A_n \subset [\alpha, \beta]$ であることを示せ.

38 複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対し, $\overline{z}$ で z の共役を表し, $\arg z$ で z の偏角を表す. ただし, 偏角は $-\pi < \arg z \leq \pi$ の範囲で考える. また $||z|| = \sqrt{z\overline{z}}$ と定める. $\mathbb{C}$ の部分集合 S^1

を

$$S^1 = \{z \mid z \in \mathbb{C},\ ||z|| = 1\}$$

で定める．次の関数 f は S^1 上の距離関数になるか．

i) $f(z, w) = ||z - w||$

ii) $f(z, w) = |\arg(z\overline{w})|$

2009

39 次で与えられる $\mathbb{R}$ の部分集合 X, Y の間の全単射をひとつつくれ．

i) $X = [0, 1]$, $Y = [0, 3]$.

ii) $X = (0, 1)$, $Y = \mathbb{R}$.

iii) $X = (0, 1)$, $Y = [0, 1]$.

40 i) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を集合の族とする．$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n$ の定義を述べよ．

ii) $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n$ を示せ．

iii) $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n \subsetneq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, A_n$ なる例を挙げよ．

41 i) $\mathbb{R}$ の部分集合の間の等式 $\bigcup_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1)$ を示せ．

ii) X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像, $A_\lambda \subset Y$ とする．次を示せ．

$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(A_\lambda)$.

iii) 写像 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = x^2 - 2x$ で定める．$\bigcup_{n=2}^{\infty} g^{-1}\left(\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]\right)$ を求めよ．

42 $\mathbb{R}$ の空でない有限部分集合は最大元を持つことを示せ．

43 全順序体 $\mathbb{K}$ の数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$ が 0 に収束するならば, $\mathbb{K}$ はアルキメデスの公理をみたすことを示せ．

44 α を正の実数とする．α（を 10 進表記したとき）の小数点第 n 位以下を切り捨てたものを a_n とする．$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の上限は α であることを示せ．

2010

45 i) $y = f(x)$ が $x = a$ で連続でない事を, 日本語として分かるように書け．ただし ε-δ 論方式で書くこと．

ii)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

とするとき, $f(x)$ は $x = 0$ で連続でないことを示せ.

$\boxed{\mathbf{46}}$ 次の集合は可算である事を示せ.

i) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

ii) $A = \left\{ f \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\} \;\middle|\; f(n) = 1 \text{ なる } n \in \mathbb{N} \text{ は有限個} \right\}$

$\boxed{\mathbf{47}}$ 次の集合の間の全単射 $f \colon X \to Y$ を具体的に書け.

i) $X = (0, 1)$, $Y = (-\infty, 0)$

ii) $X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \max\{|x|, |y|\} = 1 \right\}$,
$Y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$\boxed{\mathbf{48}}$ $\mathbb{N}$ に普通の順序をいれる. $A \subset \mathbb{N}$ を空でない部分集合とする. このとき次の条件は同値であることを示せ.

i) A は有限集合.

ii) $\max A$ が存在する.

iii) $\sup A$ が存在する.

$\boxed{\mathbf{49}}$ $\mathbb{K}$ を全順序体, $\{a_n\}$ を $\mathbb{K}$ の数列, $a \in \mathbb{K}$ とする. $\varepsilon \in \mathbb{K}$, $\varepsilon > 0$ に対し, $A(\varepsilon) \subset \mathbb{N}$, $B(\varepsilon) \subset \mathbb{K}$ を

$$A(\varepsilon) = \{ n \in \mathbb{N} \mid d(a, a_n) \geq \varepsilon \}$$
$$B(\varepsilon) = \{ a_n \mid d(a, a_n) \geq \varepsilon \}$$

により定める. ただし $d(a, a_n) = |a - a_n|$.

i) $\{a_n\}$ が a に収束することと, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $A(\varepsilon)$ が有限集合であることは同値であることを示せ.

ii)「任意の $\varepsilon > 0$ に対し $B(\varepsilon)$ が有限集合であるならば, $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ である」というのは正しいか? 正しければ証明し, 正しくなければ反例を挙げよ.

2011

$\boxed{\mathbf{50}}$ i) X, Y を集合, $B_i \subset Y$ $(i = 1, 2, \ldots)$ を部分集合, $f \colon X \to Y$ を写像とする. このとき

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i)$$

であることを示せ.

ii) 写像 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \sin x$ で定める. このとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[-2,\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{n}\right]\right)$$

を求めよ.

51 次の集合は可算である事を示せ.

i) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

ii) $\mathcal{S} = \{[\alpha, \beta] \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q},\ \alpha \leq \beta\}$

52 次の集合の間の全単射 $f\colon X \to Y$ を具体的につくれ.

i) $X = [0, 1]$, $Y = [-3, 5]$

ii) $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$ とする. このとき,
$X = S^1 - \{(1, 0)\}$, $Y = \mathbb{R}$

iii) $X = Y = \mathbb{N}$. ただし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $f(n) \neq n$ となるもの.

53 $\mathbb{K}$ を全順序体, $\{a_n\}$ を $\mathbb{K}$ のコーシー列, $\{a_{i_k}\}$ を $\{a_n\}$ の部分列とする. $\{a_{i_k}\}$ が収束列で, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{i_k} = a$ であれば, $\{a_n\}$ も収束列であり, その極限値は a であることを示せ.

54 $A, B \subset \mathbb{R}$ を有界な, 空でない部分集合とし, $\alpha = \sup A$, $\beta = \inf B$ とする.
集合 $C \subset \mathbb{R}$ を

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$$

により定める. このとき次を示せ.

i) $-\alpha$ は C の下界である.

ii) $l \in \mathbb{R}$ が C の下界であるならば, $-l$ は A の上界である.

iii) $\inf C = -\alpha$.

また, 集合 $D \subset \mathbb{R}$ を

$$D = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$$

により定める. 任意の $a \in A$ について $a \geq 0$ かつ, 任意の $b \in B$ について $b \leq 0$ であるとき, 次を示せ.

iv) $\alpha\beta$ は D の下界である.

v) $\alpha\beta = \inf D$.

2012

$\boxed{\mathbf{55}}$ $A, B \subset \mathbb{R}$ を有界な, 空でない部分集合とする. 集合 $C, D \subset \mathbb{R}$ を

$$C = \{a - b \in \mathbb{R} \mid a \in A,\ b \in B\}$$
$$D = \{d \in \mathbb{R} \mid 1/d \in A\}$$

により定める.

i) 任意の $a \in A$ に対し, ある $b \in B$ が存在して, $a \leq b$ が成り立つとする. このとき,
   (a) $\sup A \leq \sup B$ を示せ.
   (b) $\inf A \leq \inf B$ は成り立つか？　成り立つならば証明し, 成り立たないならば反例を挙げよ.

ii) $\sup C = \sup A - \inf B$ を示せ.

iii) $\inf\{|a| \mid 0 \neq a \in A\} > 0$ ならば, D は有界であることを示せ.

iv) D が有界ならば, $\inf\{|a| \mid 0 \neq a \in A\} > 0$ となるか？ そうならば証明し, そうでないならば反例を挙げよ.

v) $\inf A > 0$ であるとき, $\sup D = 1/\inf A$ を示せ.

$\boxed{\mathbf{56}}$ 写像 $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を

$$f(l, m) = \begin{cases} 3^{l-1}\left(3 \cdot \dfrac{m+1}{2} - 2\right) & m \text{ が奇数} \\ 3^{l-1}\left(3 \cdot \dfrac{m}{2} - 1\right) & m \text{ が偶数} \end{cases}$$

により定めると, f は全単射であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{57}}$ X, Y, Z を集合, $\varphi\colon X \to Y$ を写像とする.

i) 写像 $\varphi_*\colon \mathrm{Map}(Z, X) \to \mathrm{Map}(Z, Y)$ を $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$ で定める. φ が単射ならば, φ_* も単射であることを示せ.

ii) 写像 $\varphi^*\colon \mathrm{Map}(Y, Z) \to \mathrm{Map}(X, Z)$ を $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ で定める. φ が全射ならば, φ^* は単射であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{58}}$ X を集合, Y を X の部分集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 次の性質（$*$）をみたす Y の部分集合 S_0 が存在することを, 以下の問にしたがって示せ. ただし, Y の部分集合 A に対し, $A^c = X - A$, $A^{c'} = Y - A$ とする.

（$*$）　$Y = S_0 \coprod f(S_0^c)$.

i) $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を $S_i \subset X$ である集合族とする．このとき

$$f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(S_i).$$

ii) $S \subset X$ に対し，$F(S) = \left(f\left(S^c\right)\right)^{c'} = Y - f(X - S)$ と定める．このとき，$S \subset T$ ならば $F(S) \subset F(T)$.

iii) $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を $S_i \subset X$ である集合族とする．このとき

$$F\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(S_i).$$

iv) $F(X) \supset F^2(X) \supset \cdots \supset F^n(X) \supset \cdots$.

v) $S_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} F^n(X)$ とするとき，$F(S_0) = S_0$.

vi) S_0 は条件（$*$）をみたす．

2013

$\boxed{\textbf{59}}$ X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像，$A \subset X$, $B \subset Y$ とする．

i) $f\left(f^{-1}(B) \cap A\right) = B \cap f(A)$ が成り立つことを示せ．

ii) $f^{-1}\left(f(A) \cap B\right) = A \cap f^{-1}(B)$ は成り立つか？ 成り立つならば証明し，成り立たない場合は例を挙げよ．

$\boxed{\textbf{60}}$ i) X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像，$A_\lambda \subset Y$ とする．$f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}\left(A_\lambda\right)$ であることを示せ．

ii) 写像 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = x^2 - x$ で定める．$\bigcap_{r>2} g^{-1}\left([0, r)\right)$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{61}}$ X を集合，$A_n \subset X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を部分集合とする．

i) $\left(\varliminf_{n} A_n\right)^c = \varlimsup_{n} A_n^c$ を示せ．

ii) $\varliminf_{n} A_n \subset \varlimsup_{n} A_n$ を示せ．

iii) $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ のとき $\varliminf_{n} A_n = \varlimsup_{n} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ であることを示せ．

$\boxed{\textbf{62}}$ X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とする．写像 $f^*\colon 2^Y \to 2^X$ を $f^*(b) = b \circ f$ で定める．ただし $2^X = \mathrm{Map}(X, \{0, 1\})$ である．

i) f が全射ならば，f^* は単射であることを示せ．

ii) f^* が単射ならば，f は全射であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{63}}$ $n \in \mathbb{N}$ に対し, $\mathbb{R}$ における関係 $\sim_n$ を $x \sim_n y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} n(x-y) \in \mathbb{Z}$ により定める.

i) $\sim_n$ は同値関係であることを示せ.

ii) $m, n \in \mathbb{N}$ とする. $p_n = f_{mn} \circ p_m$ となるような写像 $f_{mn} \colon \mathbb{R}/{\sim_m} \to \mathbb{R}/{\sim_n}$ が存在することと $m|n$ であることは同値であることを示せ. ただし p_m, p_n は $\sim_m, \sim_n$ に関する自然な射影であり, $m|n$ とは m が n の約数であることである.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "p_n"] \arrow[d, "p_m"'] & \mathbb{R}/{\sim_n} \\ \mathbb{R}/{\sim_m} \arrow[ur, dotted, "f_{mn}"'] & \end{tikzcd}$$

iii) $f_{1n}^{-1}(\overline{0})$ を求めよ. ただし $\overline{0} = p_n(0) \in \mathbb{R}/{\sim_n}$ である.

2014

$\boxed{\mathbf{64}}$ 次の命題を考える.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R} : z \geq y \to x + z \geq 0$$

（ただし「$\to$」は「ならば」を表す論理記号, すなわち $p \to q$ は p が真で q が偽のとき偽, その他の場合は真.）

i) この命題をふつうの（論理記号を使わない）文にせよ.

ii) この命題の真偽を理由をつけて判定せよ.

$\boxed{\mathbf{65}}$ X, Y, Z を集合, $A \subset X$, $B, B' \subset Y$, $C \subset Z$ を部分集合, $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ を写像とする.

i) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ を示せ.

ii) $f^{-1}(f(A) \cap B) \supset A \cap f^{-1}(B)$ を示せ.

iii) $f^{-1}(f(A) \cap B) = A \cap f^{-1}(B)$ は成り立つか？ 成り立つならば証明し, 成り立たない場合は例を挙げよ.

iv) $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$ を示せ.

$\boxed{\mathbf{66}}$ X, Y, Z を集合, $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$ を写像とする. 次の命題が正しければ証明し, 間違っていたら反例を与えよ.

i) $g \circ f \colon X \to Z$ が単射ならば $f \colon X \to Y$ は単射である.

ii) $g \circ f \colon X \to Z$ が単射ならば $g \colon Y \to Z$ は単射である.

iii) $g \circ f \colon X \to Z$ が単射かつ $f \colon X \to Y$ が全射ならば $g \colon Y \to Z$ は単射である.

67 $f_i\colon X \to Y_i$ を写像, $q_i\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$ を射影, $B_i \subset Y_i$ を部分集合（$i = 1, 2$）とする．次を示せ．

i) $B_1 \times B_2 = q_1^{-1}(B_1) \cap q_2^{-1}(B_2)$.

ii) $\langle f_1, f_2\rangle^{-1}(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2)$.

iii) f_1 が単射ならば $\langle f_1, f_2\rangle$ も単射であることを示せ.

ただし $\langle f_1, f_2\rangle\colon X \to Y_1 \times Y_2$ は $\langle f_1, f_2\rangle(x) = (f_1(x), f_2(x))$ で与えられる写像.

68 X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする．写像 $f^*\colon 2^Y \to 2^X$ を $f^*(b) = b \circ f$ で定める．ただし $2^X = \mathrm{Map}(X, \{0, 1\})$ である．

i) f が単射ならば, f^* は全射であることを示せ.

ii) f^* が全射ならば, f は単射であることを示せ.

2015

69 i) X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像, $\{B_j\}_{j\in J}$ を Y の部分集合の族とする．次を示せ．

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$$

ii) $a \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathbb{R}$ の部分集合 A_a を $A_a = [a, 0)$ により定める．また $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ とする．$\displaystyle\bigcup_{a\in\mathbb{R}_-} A_a$ を求めよ.

iii) 写像 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $g(x) = x^2 - 5x + 6$ で定める．$\displaystyle\bigcup_{a\in\mathbb{R}_-} g^{-1}(A_a)$ を求めよ.

70 X, Y を集合, $A, A' \subset X$, $B \subset Y$ を部分集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

i) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ を示せ.

ii) $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ は成り立つか？ 成り立つならば証明し, 成り立たない場合は例を挙げよ.

iii) $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$ は成り立つか？ 成り立つならば証明し, 成り立たない場合は例を挙げよ.

71 X, Y, Z, W を集合, $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$, $h\colon Z \to W$ を写像とし, $g \circ f$, $h \circ g$ がどちらも全単射であるとする.

i) g は全単射であることを示せ.

ii) f と h は全単射であることを示せ.

72 $f\colon X \to Y$, $f_i\colon X \to Y_i$ を写像, $\langle f_1, f_2\rangle\colon X \to Y_1 \times Y_2$ を $\langle f_1, f_2\rangle(x) =$

$(f_1(x), f_2(x))$ で与えられる写像とする.

i) f_1, f_2 がともに全射ならば $\langle f_1, f_2 \rangle$ も全射か? 成り立つならば証明し, 成り立たない場合は例を挙げよ.

ii) f_1 が単射ならば $\langle f_1, f_2 \rangle$ も単射であることを示せ.

iii) 写像 f のグラフ $\Gamma_f = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = y\}$ と X との間の全単射を作れ.

$\boxed{\textbf{73}}$ X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 写像 $f^*\colon 2^Y \to 2^X$ を $f^*(b) = b \circ f$ で定める. ただし $2^X = \mathrm{Map}(X, \{0,1\})$ である.

i) f が全射ならば, f^* は単射であることを示せ.

ii) f が単射ならば, f^* は全射であることを示せ.

$\boxed{\textbf{74}}$ X を集合, $A_n \subset X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を部分集合とする.

i) $\left(\overline{\lim_n} A_n\right)^c = \underline{\lim}_n A_n^c$ を示せ.

ii) 任意の $i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$ に対し $A_i \subset A_j$ であるとする.

(a) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$$\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = A_n$$

であることを示せ.

(b) $\underline{\lim}_n A_n = \overline{\lim_n} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ であることを示せ.

6.2　前期期末

1999

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の関数は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

i) $f(x,y) = |x^2 - y^2|$

ii) $f(x,y) = (x-y)^2$

iii) $f(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$

$\boxed{\textbf{2}}$ X を集合とし,d_1, d_2 を X 上の距離関数とする.

i) $x, y \in X$ に対し $d(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ で与えられる関数は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $X \supset A$ を部分集合とし,$\delta(A), \delta_1(A), \delta_2(A)$ をそれぞれ d, d_1, d_2 で計った A の直径とする．すなわち

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$$
$$\delta_1(A) = \sup\{d_1(x,y) \mid x, y \in A\}$$
$$\delta_2(A) = \sup\{d_2(x,y) \mid x, y \in A\}$$

このとき $\delta(A) = \max\{\delta_1(A), \delta_2(A)\}$ であることを示せ.

iii) $d'(x,y) = \min\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ で与えられる関数 d' は必ずしも X 上の距離関数になるとは限らない. 距離関数になる例と, ならない例を一つずつ挙げよ.

2000

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\overline{\mathbb{N}} = \{n \mid n$ は $n \geq 2$ となる自然数$\}$ とする． $\overline{\mathbb{N}}$ の元 a, b について, $b \leq a$ を $b = ax$, $x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ と定義する．このとき $\overline{\mathbb{N}}$ の最大, 最小, 極大, 極小元を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ i) A を集合とし, $B \subsetneqq A$ で, B は可算集合とする．このとき $A - B$ と A が対等になる A, B の例を作れ.

ii) A を集合とする． $P(A)$ と 2^A は対等になることを示せ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ i) 帰納的順序集合の定義を述べ, Zorn の Lemma を書け.

ii) Λ を全順序集合とし, $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を考える．ただし各 G_λ は群であり, $\lambda \leq \mu$ のとき $G_\lambda \subseteq G_\mu$ とする．ここで G_λ は G_μ の部分群とする．このとき

$$G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

は群になることを示せ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の関数は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

i) $f(x,y) = \sqrt{|x-y|}$

ii) $f(x,y) = (x-y)^4$

$\boxed{\mathbf{7}}$ X を集合とし,d_1, d_2 を X 上の距離関数とする.

i) $x, y \in X$ に対し $d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$ で与えられる関数 d は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $X \supset A, B$ を部分集合とする．d, d_1, d_2 で計った A と B の距離について次の不等式が成り立つことを示せ．

$$d(A,B) \geq d_1(A,B) + d_2(A,B)$$

iii) 上の不等式で等号が成り立たない例を挙げよ．

2002

8 p を素数とする．$0 \neq x \in \mathbb{Z}$ について，$p^\alpha | x$ だが $p^{\alpha+1} \nmid x$ となる 0 以上の整数 α を $v_p(x)$ とする．$v_p(0) = \infty$ とする．
$x, y \in \mathbb{Z}$ について，$x \leq y$ を $v_p(x) \geq v_p(y)$ と定義する ($\ast$)．
このとき ($\ast$) の関係が，順序関係のみたすべき 3 つの条件についてそれぞれ，みたす場合は証明し，みたさない場合は反例を挙げよ．

9 i) A, B を可算集合，$A \cap B = \emptyset$ とする．このとき $A \cup B$ も可算．
ii) $\mathbb{R}$ 上の互いに交わらない空でない開区間は，どううまくとっても高々可算個しかとれないことを示せ．

10 i) n を自然数とする．$\sup\{\frac{(-1)^k}{k} \mid k \geq n\}$ を求めよ．
ii) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について $\limsup a_n$ を求めよ．
(どちらも求める過程も書け．)

11 次の関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか．
i) $f(x,y) = x^2 + y^2$
ii) $f(x,y) = (x-y)^{100}$
iii) $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を単射とするとき $f(x,y) = |g(x) - g(y)|$

2003

12 i) $f \colon X \to Y$ を写像とする．$x, y \in X$ について，$x \sim y$ を $f(x) = f(y)$ と定義する．このとき関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ．
ii) $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $Y = \{1,2,3\}$ とし，写像 $f \colon X \to Y$ を $f(1) = f(2) = f(3) = 1$, $f(4) = f(5) = 2$, $f(6) = 3$ で定義するとき，(i) の同値関係での同値類の集合 $X/{\sim} = \{X_x | x \in X\}$ 及びその代表元を書け．

13 i) 順序集合 X で，最大元は存在しないが，極大元が存在する例を挙げよ．
ii) $X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{1,2,3\}$ とし，X, Y に自然数の大小で順序を入れる．次の条件 ($\star$) をみたすような写像 $f \colon X \to Y$ の例をひとつ挙げよ．

(⋆)「 f は全射であり, $x \le y$ である任意の $x, y \in X$ について $f(x) \le f(y)$ となる.」

iii) 上の (ii) において, 条件 (⋆) をみたすような写像 f はいくつあるか.

14 i) $f(x, y) = (x - y)^6$ で定義される関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

ii) X を集合, d_1, d_2 を X 上の距離関数, a_1, a_2 を正の実数とする. このとき $d(x, y) = a_1 d_1(x, y) + a_2 d_2(x, y)$ で定義される関数 d は X 上の距離関数になるか.

15 (X, d) を距離空間, $X \supset A, B$ を空でない部分集合とする.

i) A, B ともに有界ならば $A \cup B$ も有界であることを示せ.

ii) $d(A, B) = 0$ かつ $A \cap B = \emptyset$ である例を挙げよ.

16 (X, d) を距離空間とする. X から有限個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ を除いた集合

$$X - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

は X の開集合であることを示せ.

2003

17 i) $f\colon X \to Y$ を写像とする. $x, y \in X$ について, $x \sim y$ を $f(x) = f(y)$ と定義する. このとき関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ とし, 写像 $f\colon X \to Y$ を $f(1) = f(2) = f(3) = 1$, $f(4) = f(5) = 2$, $f(6) = 3$ で定義するとき, (i) の同値関係での同値類の集合 $X/\!\sim\, = \{X_x | x \in X\}$ 及びその代表元を書け.

18 i) 順序集合 X で, 最大元は存在しないが, 極大元が存在する例を挙げよ.

ii) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ とし, X, Y に自然数の大小で順序を入れる. 次の条件 (⋆) をみたすような写像 $f\colon X \to Y$ の例をひとつ挙げよ.

(⋆)「 f は全射である. また $x \le y$ である任意の $x, y \in X$ について $f(x) \le f(y)$ となる.」

iii) 上の (ii) において, 条件 (⋆) をみたすような写像 f はいくつあるか.

19 帰納的順序集合の定義を述べ, Zorn の Lemma を書け.

20 i) $f(x, y) = (x - y)^6$ で定義される関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

ii) X を集合, d_1, d_2 を X 上の距離関数, a_1, a_2 を正の実数とする. このとき $d(x,y) = a_1 d_1(x,y) + a_2 d_2(x,y)$ で定義される関数 d は X 上の距離関数になるか.

21 (X,d) を距離空間とする. X から有限個の点 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ を除いた集合

$$X - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

は X の開集合であることを示せ.

2004

22 $\mathbb{R}$ における関係 $\sim$ を, $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$ により定める.

i) 関係 $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) 集合 $\mathbb{R}/\sim$ はどのような集合か.

23 i) X を順序集合とする. $a \in X$ について $X(a) = \{x \mid a \leq x\}$ とする. $Y \subset X(a)$ をとり, $\alpha = \sup_X Y$ が存在したとすると, $\alpha = \sup_{X(a)} Y$ を示せ.

ii) 帰納集合でない集合の例を挙げよ (理由も示せ).

iii) $X \neq \emptyset$ を帰納集合とすると, 任意の $a \in X$ について, $a \leq x_0$ となる X の極大元 x_0 が存在することを Zorn の補題を使い示せ.

24 0 か 1 からなる数列で 1 は有限個しかないようなもの全体のなす集合

$$S = \left\{ \{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i \text{ は } 0 \text{ か } 1,\ a_i \text{ のうち } 1 \text{ であるのは有限個 } \right\}$$

を考える. S は可算集合であることを示せ.

25 i) $f(x,y) = (x-y)^{10}$ で定義される関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

ii) $f(x,y) = x^2 + y^2$ で定義される関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか.

iii) X を集合, (Y, d_Y) を距離空間, $g\colon X \to Y$ を単射とする. このとき $d(x,x') = d_Y(g(x), g(x'))$ で定義される関数 d は X 上の距離関数になるか.

2005

26 i) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は可算集合ではないことを示せ. ただし $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は $\mathbb{N}$ のべき集合をあらわす.

ii) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ の部分集合 $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ を

$$\mathcal{P}_f(\mathbb{N}) = \left\{ A \mid A \subset \mathbb{N},\ A \text{ は有限集合} \right\}$$

で定める．このとき $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ は可算集合であることを示せ.

$\boxed{\textbf{27}}$ i) 帰納集合の定義を書け.

ii) 帰納集合でない順序集合の例をあげよ.

$\boxed{\textbf{28}}$ Zorn の補題を用いて, $\mathbb{R}$ の部分集合 H で, 次の条件をみたすものが存在することを示せ.

(条件) 任意の $r \in \mathbb{R}$ は有限個の $h_1, \dots, h_n \in H$ と有限個の $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$ を用いて,

$$r = q_1h_1 + q_2h_2 + \cdots + q_nh_n$$

とただひととおりに表せる.

$\boxed{\textbf{29}}$ (X, d) を距離空間, $x, y \in X$, r, s を正の実数とする.

i) $d\left(U_r(x), U_s(y)\right) \geq \max\{d(x, y) - r - s, 0\}$ を示せ．ただし $U_r(x)$ は x を中心とする半径 r の開球を表す.

ii) $d\left(U_r(x), U_s(y)\right) = d(x, y) - r - s$ となる例をあげよ.

iii) $d\left(U_r(x), U_s(y)\right) > \max\{d(x, y) - r - s, 0\}$ となる例をあげよ.

$\boxed{\textbf{30}}$ (X, d) を距離空間, A_n $(n = 1, 2, \dots)$, B を X の部分集合とし, $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, $r_n = d(A_n, B)$ とおく．このとき次の等式を示せ.

$$d(A, B) = \inf_n \{r_n\}$$

2006

$\boxed{\textbf{31}}$ X を空でない集合とする．写像 $f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が次の条件 **f1** $\sim$ **f4** をみたすとする．以下の問に答えよ.

$$\begin{cases} \textbf{f1}. \quad f(x, y) \geq 0 & (\forall x, y \in X) \\ \textbf{f2}. \quad f(x, x) = 0 & (\forall x \in X) \\ \textbf{f3}. \quad f(x, y) = f(y, x) & (\forall x, y \in X) \\ \textbf{f4}. \quad f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z) & (\forall x, y, z \in X) \end{cases}$$

i) X における関係 $\sim$ を, $x \sim y \Leftrightarrow f(x, y) = 0$ により定めると, $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) $x, x', y, y' \in X$ について, $x \sim x'$ かつ $y \sim y'$ ならば $f(x, y) = f(x', y')$ であることを示せ.

iii) Y を, 同値関係 $\sim$ による, X の商集合 $Y = X/\!\sim$ とする. 写像 $d\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ を $d([x],[y]) = f(x,y)$ により定めると, d は Y 上の距離関数であることを示せ. ただし, $[x]$ は, x の同値類をあらわす.

32 $\overline{\mathbb{N}} = \{n \mid n$ は $n \geq 2$ である自然数$\}$ とする. $\overline{\mathbb{N}}$ の元 a,b について, $b \leq a$ を $b = ax$, $x \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ と定義する. このとき $\overline{\mathbb{N}}$ の最大, 最小, 極大, 極小元を求めよ.

33 X を空でない順序集合とする.

i) $\mathcal{S} = \{A \mid \emptyset \neq A \subset X,\ A$ は全順序部分集合$\}$ とし, $\mathcal{S}$ に包含関係で順序をいれる. このとき $\mathcal{S}$ は帰納集合であることを示せ.

ii) X は, 包含関係に関して極大な, 全順序部分集合を持つことを示せ.

34 次の関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか, 理由をつけて答えよ.

i) $f(x,y) = (x-y)^2$

ii) $f(x,y) = |x^3 - y^3|$

2006

35 X, Y を空でない集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 以下の問に答えよ.

i) X における関係 $\sim$ を, $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ により定めると, $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) $\overline{X}$ を, 同値関係 $\sim$ による, X の商集合 $\overline{X} = X/\!\sim$ とする. 写像 $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ を $\overline{f}([x]) = f(x)$ により定めると, $\overline{f}$ は単射であることを示せ. ただし, $[x]$ は, x の同値類をあらわす.

iii) $f\colon X \to Y$ が全射であれば, $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ は全単射であることを示せ.

36 $\overline{\mathbb{N}} = \{n \mid n$ は $n \geq 2$ である自然数$\}$ とする. $\overline{\mathbb{N}}$ の元 a,b について, $b \leq a$ を $b = ax$, $x \in \mathbb{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ と定義する. このとき $\overline{\mathbb{N}}$ の最大, 最小, 極大, 極小元を求めよ.

37 X を空でない順序集合とする.

i) $\mathcal{S} = \{A \mid \emptyset \neq A \subset X,\ A$ は全順序部分集合$\}$ とし, $\mathcal{S}$ に包含関係で順序をいれる. このとき $\mathcal{S}$ は帰納集合であることを示せ.

ii) X は, 包含関係に関して極大な, 全順序部分集合を持つことを示せ.

38 次の関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか, 理由をつけて答えよ.

i) $f(x,y) = (x-y)^2$

ii) $f(x,y) = |x^3 - y^3|$

2007

39 X を集合とし,d_1, d_2 を X 上の距離関数とする.

i) $x, y \in X$ に対し $d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$ で与えられる関数 d は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $X \supset A, B$ を部分集合とする. d, d_1, d_2 で計った A と B の距離について次の不等式が成り立つことを示せ.

$$d(A,B) \geq d_1(A,B) + d_2(A,B)$$

iii) 上の不等式で等号が成り立たない例を挙げよ.

40 X, Y を空でない集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする. 以下の問に答えよ.

i) X における関係 $\sim$ を, $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$ により定めると, $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) $\overline{X}$ を, 同値関係 $\sim$ による, X の商集合 $\overline{X} = X/\sim$ とする. 写像 $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ を $\overline{f}([x]) = f(x)$ により定めると, f は単射であることを示せ. ただし, $[x]$ は, x の同値類をあらわす.

iii) $f\colon X \to Y$ が全射であれば, $\overline{f}\colon \overline{X} \to Y$ は全単射であることを示せ.

41 i) 帰納的順序集合の定義を述べよ.

ii) Zorn の Lemma を書け.

iii) 帰納的順序集合ではない順序集合の例を挙げよ.

2008

42 X を集合とし,d_1, d_2 を X 上の距離関数とする.

i) $x, y \in X$ に対し $d(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ で与えられる関数は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $X \supset A$ を部分集合とし,$\delta(A), \delta_1(A), \delta_2(A)$ をそれぞれ d, d_1, d_2 で計った A の直径とする. このとき $\delta(A) = \max\{\delta_1(A), \delta_2(A)\}$ であることを示せ.

iii) $d'(x,y) = \min\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ で与えられる関数 d' は必ずしも X 上の距離関数になるとは限らない. 距離関数になる例と, ならない例を一つずつ挙げよ.

2009

$\boxed{\textbf{43}}$ i) 有限全順序集合には最大元が存在することを示せ.

ii) 有限順序集合は帰納的順序集合であることを示せ.

iii) $(0,1) \subset \mathbb{R}$ を開区間とする．集合 $\overline{\mathcal{P}} = \{A \subset (0,1) \mid A \neq (0,1)\}$ に順序を $\subset$ でいれたとき, $\overline{\mathcal{P}}$ は帰納的順序集合ではないことを示せ.

$\boxed{\textbf{44}}$ i) A, B, C を集合, $f\colon A \to B$ を全単射とする．このとき全単射 $A \times C \to B \times C$ を作れ.

ii) $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の濃度が等しいことを示せ.

iii) $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の濃度が等しいことを示せ.

$\boxed{\textbf{45}}$ X を空でない集合とする．写像 $f\colon X \times X \to \mathbb{R}$ が次の条件 **f1** $\sim$ **f4** をみたすとする．以下の問に答えよ.

$$\begin{cases} \textbf{f1}. \quad f(x,y) \geq 0 & (\forall x, y \in X) \\ \textbf{f2}. \quad f(x,x) = 0 & (\forall x \in X) \\ \textbf{f3}. \quad f(x,y) = f(y,x) & (\forall x, y \in X) \\ \textbf{f4}. \quad f(x,z) \leq \max\{f(x,y), f(y,z)\} & (\forall x, y, z \in X) \end{cases}$$

i) X における関係 $\sim$ を $x \sim y \Leftrightarrow f(x,y) = 0$ により定めると, $\sim$ は同値関係であることを示せ.

ii) $x, x', y, y' \in X$ について, $x \sim x'$ かつ $y \sim y'$ ならば $f(x,y) = f(x',y')$ であることを示せ.

iii) Y を, 同値関係 $\sim$ による, X の商集合 $Y = X/{\sim}$ とする．写像 $d\colon Y \times Y \to \mathbb{R}$ を $d([x],[y]) = f(x,y)$ により定めると, d は Y 上の距離関数であることを示せ．ただし, $[x]$ は x の同値類.

iv) $r > 0$ とする．上の (Y,d) において, $[y] \in \mathrm{U}_r([x])$ ならば $\mathrm{U}_r([y]) = \mathrm{U}_r([x])$ であることを示せ．ただし

$$\mathrm{U}_r([x]) = \{[z] \in Y \mid d([x],[z]) < r\}$$

は $[x] \in Y$ を中心とする半径 r の開球.

v) $r > 0$ とする．上の (Y,d) において, $\delta(\mathrm{U}_r([x])) \leq r$ であることを示せ．ただし $\delta(\mathrm{U}_r([x])) = \sup\{d([y],[z]) \mid [y],[z] \in \mathrm{U}_r([x])\}$ は直径.

2010

$\boxed{\textbf{46}}$ X, Y を集合, $\simeq, \approx$ をそれぞれ X, Y 上の同値関係とする.

i) $X \times Y$ における関係 $\sim$ を,

$$(x,y) \sim (x',y') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \simeq x' \text{ かつ } y \approx y'$$

と定めると, $\sim$ は $X \times Y$ 上の同値関係であることを示せ.

ii) $X = Y = \mathbb{Z}$,
$x \simeq x' \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x - x'$ が 2 で割りきれる,
$y \approx y' \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} y - y'$ が 3 で割りきれる,
としたとき, 商集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\sim$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{47}}$ i) 全順序集合でない順序集合の例を挙げよ.

ii) 極大元は持つが最大元を持たない順序集合の例を挙げよ.

iii) X を順序集合, $X \supset A$ を部分集合とする. $\sup A$ は, 存在すれば, 一意的であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{48}}$ X, Y を空でない集合, $f\colon X \to Y$ を写像とし,

$$\mathcal{S} = \{(Y', s') \mid Y' \subset Y,\ s'\colon Y' \to X,\ f \circ s' = 1_{Y'}\}$$

とする.

i) $\mathcal{S} \neq \emptyset$ を示せ.

ii) $(Y', s'), (Y'', s'') \in \mathcal{S}$ に対して

$$(Y', s') \leq (Y'', s'') \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} Y' \subset Y'' \text{ かつ } s''|_{Y'} = s'$$

と定めると, $\mathcal{S}$ は順序集合になることを示せ.

iii) $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合になることを示せ.

iv) Zorn の Lemma を使い, f が全射ならば, 写像 $s\colon Y \to X$ で, $f \circ s = 1_Y$ となるものが存在することを示せ.

$\boxed{\mathbf{49}}$ X を集合とし, d_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ を X 上の距離関数とする.

i) 各 $x, y \in X$ に対し $\{d_i(x, y) \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ は有界であるとする. このとき, $x, y \in X$ に対し $d(x, y) \in \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) = \sup_i d_i(x, y)$$

と定めると, d は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $x, y \in X$ に対し $d(x, y) \in \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) = \inf_i d_i(x, y)$$

と定めると, d は必ずしも X 上の距離関数になるとは限らない. 距離関数になる例と, ならない例を一つずつ挙げよ.

50 X を集合とし, 関数 $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ を

$$d(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

で定める. $n\in\mathbb{N}$ とする.

i) d は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)\in X^n$ に対し $d_n(x,y)\in\mathbb{R}$ を

$$d_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n}d(x_i,y_i)$$

と定めると, d_n は X^n 上の距離関数になることを示せ.

iii) $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)\in X^n$ に対し $d_H(x,y)\in\mathbb{R}$ を

$$d_H(x,y)=\sharp\{i\mid x_i\neq y_i\}$$

と定めると, d_H は X^n 上の距離関数になることを示せ. ただし, $\sharp$ は集合の濃度.

iv) $X=\{a,g,h,i,m,n,u\}$ であるとき

$$d_7\left((h,a,m,m,i,n,g),(h,u,m,m,i,n,g)\right)$$

および

$$d_H\left((h,a,m,m,i,n,g),(h,u,m,m,i,n,g)\right)$$

を求めよ.

2011

51 $\mathbb{N}$ に大小関係で順序を入れて, 全順序集合とみる. このとき, 次の問に答えよ.

i) 写像 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が, $a<b$ となる任意の $a,b\in\mathbb{N}$ について $f(a)<f(b)$ をみたすとする. このとき, $a\leq f(a)$ となることを示せ.

ii) 写像 $f\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ が, i) の条件をみたし, かつ全単射であるとする. このとき, f は恒等写像であることを示せ.

52 $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$ とする. $(x,y),(x',y')\in S$ に対し, $(x,y)\sim(x',y')$ を, $x'=x$, $y'=y$ または $x'=-x$, $y'=-y$ と定義するとき, $\sim$ は同値関係であることを示せ.

また, $S/\sim$ の代表元の集合をひとつ求めよ.

53 R を単位元 1 を持つ可換環 (ただし $1 \neq 0$) とする.

i) Λ を全順序集合, $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を R のイデアルの族で, $\lambda \leq \mu$ のとき, $I_\lambda \subset I_\mu$ とする. このとき, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ も R のイデアルであることを示せ.

ii) $\mathcal{S} = \left\{ I \;\middle|\; I \text{ は } R \text{ のイデアル} \right\}$ とする. $I, J \in \mathcal{S}$ について $I \leq J$ を $I \subset J$ と定義するとき, $\mathcal{S}$ は帰納集合になることを示せ.

iii) $\mathcal{S}$ の極大元を求めよ.

54 $A, B \subset \mathbb{R}$ を有界な部分集合, $A \cap B \neq \emptyset$ とする. このとき次の不等式を示せ.

$$\inf A \cap B \geq \max\{\inf A, \inf B\}.$$

また等号が成立しない例を挙げよ.

55 次の関数 f は $\mathbb{R}$ 上の距離関数になるか. ただし $n \in \mathbb{N}$ とする.

i) $f(x, y) = \dfrac{|x-y|}{n}$

ii) $f(x, y) = |g_n(x) - g_n(y)|$

ただし

$$g_n(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{n+1}, & |x| \geq 1 \\ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) x, & -1 \leq x \leq 0 \\ \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

iii) $f(x, y) = |x^2 - y^2|$

iv) $f(x, y) = (x - y)^2$

56 X を集合とし, d_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ を X 上の距離関数とする.

i) 各 $x, y \in X$ に対し $\{d_n(x, y) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ は有界であるとする. このとき, $x, y \in X$ に対し $d(x, y) \in \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) = \sup_n d_n(x, y)$$

と定めると, d は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $x, y \in X$ に対し $d(x, y) \in \mathbb{R}$ を

$$d(x, y) = \inf_n d_n(x, y)$$

と定めると, d は必ずしも X 上の距離関数になるとは限らない.

(a)「$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$」は成り立つか. 成り立つなら証明し, 成り立たないなら反例を挙げよ.

(b) 三角不等式は成り立つか．成り立つなら証明し, 成り立たないなら反例を挙げよ．

2012

57 $(X,\sim)$, $(Y,\simeq)$ を同値関係, $f\colon X \to Y$ を写像とする．今, 任意の $x_1 \sim x_2$ に対し, $f(x_1) \simeq f(x_2)$ が成り立つとする．このとき, 写像

$$\overline{f}\colon X/\sim \to Y/\simeq$$

を $\overline{f}(C_x) = C_{f(x)}$ により定める．

i) $\overline{f}$ は well defined である, すなわち C_x の代表元のとり方によらないことを示せ．

ii) $X = Y = \mathbb{Z}$, $\sim$ を　mod 4, $\simeq$ を　mod 8 とする．このとき, f は単射であるが, $\overline{f}$ は単射とならない例を挙げよ．

58 i) 全順序集合においては, 極大元は最大元であることを示せ．

ii) 帰納的順序集合ではないが, 極大元が存在するような順序集合の例を挙げよ．

59 X, Y を空でない集合とする．

$$\mathcal{S} = \bigl\{(X', Y', f') \bigm| X' \subset X,\ Y' \subset Y,\ f'\colon X' \to Y' \text{は全単射}\bigr\}$$

とおく．

i) $\mathcal{S} \neq \emptyset$ であることを示せ．

ii) $\mathcal{S}$ における順序関係 $\leq$ を, $(X', Y', f'), (X'', Y'', f'') \in \mathcal{S}$ に対し,

$$(X', Y', f') \leq (X'', Y'', f'') \Leftrightarrow X' \subset X'',\ Y' \subset Y'',\ f''|X' = f'$$

と定める．（これが順序関係であることは認めてよい．）このとき, $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合であることを示せ．

iii) $\mathcal{S}$ の極大元を (X_0, Y_0, f_0) とする．このとき $X_0 = X$ または $Y_0 = Y$ であることを示せ．

60 距離空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ は, 任意の $x, x' \in X$ に対し $d(f(x), f(x')) = d(x, x')$ をみたすとき, 距離を保つという．

i) X, Y を離散距離空間, $f\colon X \to Y$ を単射とする．このとき, f は距離を保つことを示せ．

ii) $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を, 距離を保つ写像で $f(0) = 0$ であるものとする．

(a) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $|f(x)| = |x|$ であることを示せ.

(b) $f(1) = 1$ であるとき, f を求めよ.

61 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を実数列とする.

i) 数列 $\{(-1)^n\}$ および $\{(-1)^{n+1}\}$ の上極限を求めよ.

ii) 任意の n に対し $c_n \le a_n + b_n$ であるが, $\inf c_n \le \inf a_n + \inf b_n$ とはならない例を挙げよ.

iii) $\limsup(a_n + b_n) \le \limsup a_n + \limsup b_n$ を示せ.

iv) $\limsup(a_n + b_n) < \limsup a_n + \limsup b_n$ となる例を挙げよ.

2013

62 $X = \mathcal{P}([2])$ に包含関係で順序を入れる. ただし $[2] = \{0, 1\}$ で, $\mathcal{P}([2])$ は $[2]$ の冪集合である.

i) X の元の個数は？（答えだけでよい.）

ii) X の部分集合で, 元の個数が 3 個であるものを全て挙げよ.

iii) ii の集合のうち, 全順序集合であるものはどれか？

iv) ii の集合のうち, 全順序集合ではないものそれぞれについて, その最大元, 上限, 極大元を求めよ.

63 P を順序集合, $f\colon P \to P$ を順序を保つ写像, すなわち, 任意の $p, q \in P$, $p \le q$ に対し $f(p) \le f(q)$ が成り立つとする. P の部分集合

$$A = \{a \in P \mid a \le f(a)\}$$

が上限を持つとし, $\alpha = \sup A$ とおく. 次を示せ.

i) $f(\alpha)$ は A の上界である.

ii) $\alpha \in A$ である.

iii) $f(A) \subset A$.

iv) $f(\alpha) = \alpha$.

64 P を順序集合, $A, B \subset P$ とする. $A, B, A \cup B$ に上限が存在するとし,

$$\alpha = \sup A,\ \beta = \sup B,\ \gamma = \sup(A \cup B)$$

とおく. $\{\alpha, \beta\} \subset P$ を考える.

i) γ は $\{\alpha, \beta\}$ の上界であることを示せ.

ii) $\gamma = \sup\{\alpha, \beta\}$ であることを示せ.

$\boxed{\textbf{65}}$ i) $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ の間の全単射を具体的にひとつ作れ.
ただし $\mathbb{Z}_{\leq 0} = \{l \in \mathbb{Z} \mid l \leq 0\}$.
ii) $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ の間の全単射を具体的にひとつ作れ.

$\boxed{\textbf{66}}$ 次の条件をみたす全単射 $f\colon X \to Y$ を具体的にひとつ作れ.
i) $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $Y = [-2,0] \subset \mathbb{R}$. ただし $f(0) = 0$.
ii) $X = Y = \mathbb{N}$. ただし, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $f(n) \neq n$.
iii) $X = Y = [0,1] \subset \mathbb{R}$. ただし, 任意の $x \in [0,1]$ に対し $f(x) \neq x$.

$\boxed{\textbf{67}}$ $A \subset \mathbb{N}$ とする.
i) A^c が有限集合ならば A は可算集合であることを示せ.
ii) 上の逆, すなわち「A が可算集合ならば A^c は有限集合である」は成り立つか？
成り立つならば証明し, 成り立たない場合は例を挙げよ.
（注. ここで言う可算集合とは可算無限集合のことである.）

2014

$\boxed{\textbf{68}}$ $X = \{1,2,3,4\}$ とする. $m, n \in X$ に対し,

$$m \leq n \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} m|n \quad \text{（すなわち, } n \text{ が } m \text{ で割り切れる）}$$

と定め, X に順序を入れる. （これが順序であることは認めてよい.）
i) X の部分集合で, 元の個数が 3 個であるものを全て挙げよ.
ii) i) の集合のうち, 全順序集合であるものはどれか？
iii) i) の集合のうち, 全順序集合ではないものそれぞれについて, その最小元, 下限, 極大元を求めよ.
（以上, 答えだけでよい.）

$\boxed{\textbf{69}}$ P を順序集合, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を P の部分集合の族とする. また, P の部分集合 A に対し, A の上界全体を $U(A)$ で表す:

$$U(A) = \{p \in P \mid \forall a \in A : a \leq p\} \subset P$$

i) $\sup A$ が存在するとき, $s = \sup A$ とおけば, $U(A) = U(\{s\})$ であることを示せ.
ii) $U\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U(A_\lambda)$ を示せ.
iii) 各 A_λ および $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ に上限が存在するとし,

$$\alpha_\lambda = \sup A_\lambda, \quad \alpha = \sup\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$$

とおく．$\alpha = \sup\{\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ であることを示せ．

$\boxed{\textbf{70}}$ X を順序集合，$a, b \in X$，$a \le b$ とし，$A = \bigcap_{x>b}[a, x)$ とおく．（ $x > b$ であるような $x \in X$ が存在する場合のみ考えよ．）

i) b は A の極大元であることを示せ．

ii) X の順序が全順序であれば $A = [a, b]$ であることを示せ．

$\boxed{\textbf{71}}$ X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像，$\approx$ を Y 上の同値関係とする．

i) X 上の関係 $\sim$ を $x \sim x' \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(x) \approx f(x')$ により定めると，これは同値関係であることを示せ．

ii) $X = Y = \mathbb{Z}$ とし，$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f(n) = 2n$ で定める．$\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\approx$ を，4 を法として合同，すなわち，$l \approx m \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} 4|(l - m)$ により定める．このとき i) により定まる $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\sim$ はどのようなものか．

$\boxed{\textbf{72}}$ X を集合，$\mathcal{E}$ を X 上の同値関係全体のなす集合とし，$\mathcal{E}$ に包含関係で順序をいれる，すなわち，$\sim$, $\approx \in \mathcal{E}$ に対し，

$$\sim \le \approx \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}「x \sim y \Rightarrow x \approx y」$$

により順序を定める．（これが順序であることは認めてよい．）

i) $\emptyset \ne \mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ とする．X 上の関係 $\sim_{\mathcal{A}}$ を

$$x \sim_{\mathcal{A}} y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \sim \in \mathcal{A} : x \sim y$$

で定めると，$\sim_{\mathcal{A}}$ は同値関係であることを示せ．

ii) $\sim_{\mathcal{A}} = \inf \mathcal{A}$ であることを示せ．

iii) $X = \mathbb{Z}$ とし，$\approx$, $\approxeq$ をそれぞれ 2, 3 を法として合同という同値関係とする．このとき $\inf\{\approx, \approxeq\}$ を求めよ．

$\boxed{\textbf{73}}$ （この問題では実数や実数列の基本的性質は適宜使ってよい．）

$\mathcal{R}$ を実収束列全体のなす集合とする．$\mathcal{R}$ 上の関係 $\sim$ を，$x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in \mathcal{R}$ に対し，

$$x \sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \ge N : |x_n - y_n| < \varepsilon$$

により定める．

i) $x \sim y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ を示せ．

ii) 上の i) より $\sim$ は同値関係である．この $\sim$ による商集合 $\mathcal{R}/{\sim}$ と $\mathbb{R}$ の間に全単射を（どちら向きでもよいので）ひとつ作れ．

2015

$\boxed{\textbf{74}}$ $X = \{1, 2, 3, 6\}$ とする．$m, n \in X$ に対し，$m \leq n \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} m|n$（すなわち，$n$ が m で割り切れる）と定め，X に順序を入れる．（これが順序であることは認めてよい.）

i) X の閉区間 $[1, 2]$ を求めよ．（答えだけでよい.）

ii) X の部分集合 $\{2, 3\}$ の最大元，極大元，上限を求めよ．（答えだけでよい.）

$\boxed{\textbf{75}}$ X を順序集合，$a, b \in X$，$a \leq b$ とし，$A = \bigcap_{x>b}[a, x)$，$B = \bigcap_{x>b}[a, x]$ とおく．（ $x > b$ であるような $x \in X$ が存在する場合のみ考えよ.）

i) $[a, b] \neq A \neq B$ となる例を挙げよ.

ii) $C \subset X$, $\min C = a$, $\max C = b$ であるとき，$C \subset [a, b]$ を示せ.

iii) a は A の最小元であることを示せ.

iv) b は A の極大元であることを示せ.

v) X の順序が全順序であれば $A = [a, b]$ であることを示せ.

$\boxed{\textbf{76}}$ X を順序集合，$A \subset X$ とする．$s \in X$ に関する次の条件 ※ を考える.

※ $\forall x \in X : (x < s \to \exists a \in A : x < a)$.

i) $s = \sup A$ であるが，※ をみたさない例を挙げよ.

ii) $\sup A$ が存在するとし，$m = \sup A$ とする．$s \in X$ が A の上界であり，かつ ※ をみたせば $m = s$ であることを示せ.

$\boxed{\textbf{77}}$ 集合 $[4] = \{0, 1, 2, 3\}$ を考える.

i) $[4]$ の分割を全て挙げよ. (答えだけでよい.)

ii) $[4]$ 上の同値関係はいくつあるか? (ひとこと理由を添えよ.)

$\boxed{\textbf{78}}$ X を集合とする．X の巾集合 $\mathcal{P}(X)$ 上の関係 $\sim$ を，

$$A \sim B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \triangle B \text{ が有限集合}$$

により定める．ただし $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$.

i) $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ とする．次を示せ.

$$(A - C) \cap B^c \subset A - B.$$
$$(A - C) \subset (A - B) \cup (B - C).$$

ii) $\sim$ は同値関係であることを示せ.

iii) 空集合 $\emptyset$ と同値な集合は何か.

$\boxed{\textbf{79}}$ X を集合, $\prec$ を X 上の関係で反射律 $(x \prec x)$ と推移律 ($x \prec y$ かつ $y \prec z$ ならば $x \prec z$) をみたすものとする. X 上の関係 $\sim$ を

$$x \sim y \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \prec y \text{ かつ } y \prec x$$

により定める.

i) $\sim$ は同値関係であることを示せ.

この同値関係による商集合 $X/\!\sim$ 上の関係 $\leq$ を

$$[x] \leq [y] \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists a_x \in [x],\ \exists a_y \in [y] : a_x \prec a_y$$

により定める. (ただし $[x]$ は x の同値類.)

ii) $[x] \leq [y] \Leftrightarrow \forall a \in [x],\ \forall b \in [y] : a \prec b$ であることを示せ.

iii) $\leq$ は $X/\!\sim$ 上の順序であることを示せ.

$\boxed{\textbf{80}}$ P, Q を順序集合とし, $f\colon P \to Q$, $g\colon Q \to P$ は写像で, 任意の $p \in P$ と任意の $q \in Q$ に対し,

$$f(p) \leq q \Leftrightarrow p \leq g(q)$$

が成り立つものとする. 次を示せ.

i) 任意の $p \in P$ に対し, $p \leq g(f(p))$.

ii) 任意の $q \in Q$ に対し, $f(g(q)) \leq q$.

iii) f, g は順序を保つ.

iv) $A \subset P$ とする. $q \in Q$ が $f(A)$ の上界であることと, $g(q) \in P$ が A の上界であることは同値である.

v) A が上限を持てば, $f(A)$ も上限を持ち $f(\sup A) = \sup f(A)$ が成り立つ.

6.3 後期中間

1999

$\boxed{\textbf{1}}$ $\mathbb{R} \supset A = [0,1) \cup (1,2]$ とする.

i) $\mathbb{R}$ を普通の距離で距離空間とみたとき,A の内部, 外部, 境界, 閉包, 導集合を求めよ.

ii) $\mathbb{R}$ に離散位相をいれたとき,A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

iii) $\mathbb{R}$ に密着位相をいれたとき,A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

(解答のみでよい. 証明は不要.)

2 $\mathbb{R}$ に離散位相, 密着位相をいれたとき,$\mathbb{R}$ の点列 $x_n = \frac{1}{n}$ の極限値を求めよ.

3 (X, d) を距離空間,$\{x_n\}$ を X の点列,a を X の点とする.

i) 点列 $\{x_n\}$ が点 a に収束することの定義を述べよ.

ii) $\mathfrak{u}^*(a)$ を a の基本近傍系とする. このときつぎの 2 条件は同値であることを示せ.

(a) $x_n \to a \quad (n \to \infty)$

(b) 任意の $U \in \mathfrak{u}^*(a)$ に対しある番号 $N \in \mathbb{N}$ が存在して,$n \geq N$ ならば $x_n \in U$ となる.

4 i) $A \subset X$,A に相対位相をいれると, 包含写像 $i\colon A \hookrightarrow X$ は連続であることを示せ.

ii) 連続写像 $f\colon X \to Y$ で開写像とならない例を述べよ.

2000

5 X を位相空間とする.

i) O_i が X の開集合であるが, $\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$ は開集合とならない例を挙げよ.

ii) F_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を X の閉集合とするとき, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ は閉集合になることを示せ.

6 X を位相空間とする.

i) $x \in X$ とする. x の近傍の定義及び x の基本近傍系の定義を述べよ.

ii)『$X \supset O$ が開集合である $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in X$ について, $x \in U \subset O$ となる近傍 U が存在する.』を示せ.

7 (X, d) を距離空間とする.

i) $\mathcal{U}^*(x) = \{U_{\frac{1}{n}}(x) \mid n = 1, 2, \ldots\}$ は x の基本近傍系であることを示せ.

ii) $X \supset A$ を部分集合とする. $x \in X$ が A の集積点であることの定義を述べよ.

iii)『$x \in X$ が A の集積点である $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $0 < d(x, a_n) < \frac{1}{n}$ となる A の点 $a_n \in A$ が存在する.』を示せ.

8 X を距離空間, $X \supset A, B$ を部分集合とする. $A \subset B$ ならば $A^a \subset B^a$ を示せ. (ただし A^a は A の閉包.)

2002

$\boxed{\mathbf{9}}$ i) X を位相空間とする．U が x の近傍である定義を述べよ．又, 基本近傍系 $\mathcal{U}'(x)$ の定義を述べよ．

ii) X を位相空間, $X \supset A$ を部分集合, $\mathcal{U}(x)$ を $x \in X$ の近傍系とする．このとき次を示せ.

(1) ある $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して $U \subset A$ となる．$\Leftrightarrow$ x を含む開集合 O が存在して $O \subset A$ となる．

(2) $X \supset O$ が開集合．$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in O$ について, ある $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して $U \subset O$ となる．

$\boxed{\mathbf{10}}$ X を距離空間とする．このとき次の問に答よ．

i) $X \supset O$ が開集合の定義を書け．又, O_1, O_2 が開集合であるとき, $O_1 \cap O_2$ も開集合になることを示せ.

ii) $\varepsilon > 0$ とする．$x \in X$ の ε-近傍 $U_\varepsilon(x)$ は開集合になることを示せ.

$\boxed{\mathbf{11}}$ X, Y を距離空間, $f\colon X \to Y$ を写像とするとき次を示せ.
『Y の任意の開集合 O について, $f^{-1}(O)$ は X の開集合．$\Leftrightarrow$ 任意の $y \in Y$ と任意の $\varepsilon > 0$ について, $f^{-1}(U_\varepsilon(y))$ は X の開集合.』

2004

$\boxed{\mathbf{12}}$ $\mathbb{R} \supset A = (0,1] \cup \{2\}$ とする．

i) $\mathbb{R}$ に離散位相をいれたとき, A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

ii) $\mathbb{R}$ に密着位相をいれたとき, A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

iii) $\mathbb{R}$ に Z-位相をいれたとき, A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

iv) $\mathbb{R}$ をユークリッド距離で距離空間とみたとき, A の内部, 外部, 境界, 閉包を求めよ.

(解答のみでよい．証明は不要.)

$\boxed{\mathbf{13}}$ i) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, $X \supset A$ を部分集合とする．A の相対位相の定義を書け.

ii) $\mathbb{R}$ にユークリッド位相をいれる．集合 $(0,1] \cup [2,3]$ が A の相対位相で開集合となるような, $\mathbb{R}$ の部分集合 A をひとつ挙げよ.

$\boxed{\mathbf{14}}$ X を位相空間 $X \supset A$ を部分集合とする．A の閉包 A^a を

$$A^a = \{x \in X \mid U \cap A \neq \emptyset,\ \forall U \in \mathcal{U}(x)\}$$

で定義する．ここで $\mathcal{U}(x)$ は x の近傍系.

i) $\mathcal{U}'(x)$ を x の基本近傍系とする．このとき次の a,b が同値であることを示せ．

(a) $x \in A^a$

(b) $U \cap A \neq \emptyset,\ \forall U \in \mathcal{U}'(x)$

ii) (X, d) を距離空間とする．このとき次の a,b が同値であることを示せ．

(a) A が X で稠密である．

(b) 任意の $x \in X$ と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, (x と n に応じて) ある $a \in A$ が存在して $d(x, a) < 1/n$ となる．

2005

$\boxed{\mathbf{15}}$ X を位相空間とする．

i) 任意の $x \in X$ について $\{x\}$ が開集合であるとする．このとき X は離散位相空間であることを示せ．

ii) 任意の $x \in X$ について $\{x\}$ が閉集合であるとき, X は離散位相空間であるか．(理由も述べよ.)

$\boxed{\mathbf{16}}$ 間違い

X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合, $U \subset X$ を $x \in X$ の近傍とする．このとき, $A \cap U = \emptyset$ ならば $\overline{A} \cap U = \emptyset$ であることを示せ．
ただし $\overline{A}$ は A の閉包を表す．

$\boxed{\mathbf{17}}$ X を位相空間, A, B をともに X の稠密な部分集合とする．

i) $A \cup B$ も X で稠密であることを示せ．

ii) A が開集合であるとき, $A \cap B$ も X で稠密であることを示せ．

iii) $A \cap B$ が X で稠密とはならない例を挙げよ．

$\boxed{\mathbf{18}}$ 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{Z}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれる．

i) $A \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ は, A の開かつ閉集合であることを示せ．

ii) B は離散位相空間であることを示せ．

2006

$\boxed{\mathbf{19}}$ $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A を $A = \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\right\}$ により定める．

i) $\mathbb{R}^2$ をユークリッド距離で距離空間とみたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ．

ii) $\mathbb{R}^2$ に離散位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ．

iii) $\mathbb{R}^2$ に密着位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ．
（解答のみでよい．証明は不要．）

20 X を距離空間とする．O_1, O_2 が X の開集合であるならば $O_1 \cap O_2$ も開集合であることを示せ．

21 i) X を位相空間とする．U が x の近傍である定義を述べよ．又, 基本近傍系 $\mathcal{U}'(x)$ の定義を述べよ．

ii) X を位相空間, $\mathcal{U}'(x)$ を $x \in X$ の基本近傍系とする．このとき次を示せ．
$X \supset O$ が開集合．$\Leftrightarrow$ 任意の $x \in O$ について, ある $U \in \mathcal{U}'(x)$ が存在して $U \subset O$ となる．

2007

22 X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合とする．$x \in X$ に対し, $\mathcal{U}(x)$ を x の近傍系, $\mathcal{U}'(x)$ を x の基本近傍系とする．

i) $x \in A$ とする．このとき次の (a), (b) は同値であることを示せ．
(a) ある $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して, $U \subset A$.
(b) ある $V \in \mathcal{U}'(x)$ が存在して, $V \subset A$.

ii) 任意の $x \notin A$ に対してある近傍 $U \in \mathcal{U}(x)$ が存在して $U \cap A = \emptyset$ となるならば, A は閉集合であることを示せ.

23 $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ とし, X の部分集合 A を $A = \{x \in X \mid x < 1\}$ により定める．

i) X に 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ．

ii) X に離散位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ．

iii) X に密着位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包を求めよ．
（解答のみでよい．証明は不要．）

24 X を距離空間とする．F_i $(i = 1, 2, \ldots)$ が X の閉集合であるならば $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$ も閉集合であることを示せ.

2008

25 次の内, 正しいものには証明をつけ, 正しくないものには反例を挙げよ．ただし, X, Y は位相空間, A, B は X の部分集合とする．

i) $\mathbb{R}$ の位相は一意的に定まる.

ii) X の任意の部分集合は, 開集合か閉集合である.

iii) 開集合かつ閉集合であるような X の部分集合はない.

iv) A に X からの相対位相をいれると, A の開集合は X でも開集合である.

v) $f\colon X \to Y$ を連続写像とすると, O が X の開集合であれば, $f(O)$ は Y の開集合である.

vi) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ただし A° で A の内部を表す.

26 $(X, \mathcal{O}_1)$, $(X, \mathcal{O}_2)$ を位相空間とする．このとき次の (a),(b) は同値であることを示せ.

(a) $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$

(b) $\forall O \in \mathcal{O}_1$ と $\forall x \in O$ に対し, $x \in O_x \subset O$ となるような $O_x \in \mathcal{O}_2$ が存在する.

27 $X = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ とし, X の部分集合 A を $A = \{0\}$ により定める．(ii, iii は解答のみでよい．証明は不要.)

i) X の 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ からの相対位相は離散位相であることを示せ.

ii) X に離散位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包, 導集合を求めよ.

iii) X に密着位相をいれたとき，A の内部，外部，境界，閉包, 導集合を求めよ.

iv) X には離散位相, 密着位相以外にどのような位相がはいるか.

2009

28 X を位相空間とする. $x \in X$ に対し, $\mathcal{U}_x$ を x の近傍系とする.

i) $U, V \in \mathcal{U}_x$ ならば $U \cap V \in \mathcal{U}_x$ であることを示せ.

ii) $U_\lambda \in \mathcal{U}_x$ $(\lambda \in \Lambda)$ とすると $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}_x$ であることを示せ

iii) $U_n \in \mathcal{U}_x$ $(n \in \mathbb{N})$ であるが $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n \notin \mathcal{U}_x$ となる例を挙げよ.

29 X を位相空間, $A_1, A_2 \subset X$ を部分集合とする.

i) $(A_1 \cap A_2)^\circ = A_1^\circ \cap A_2^\circ$ であることを示せ.

ii) $(A_1 \cap A_2)^a \subsetneq A_1^a \cap A_2^a$ となる例を挙げよ.

30 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 A, B を

$$A = \{(x, y) \mid y < 0\}, \quad B = \{(x, y) \mid y \leq 0\}$$

で定める. $B^\circ = A$ であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{31}}$ X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. $x \in X$ が A の内点であることと, $d(x, A^c) > 0$ であることは同値であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{32}}$ i) $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ とする. このとき次の (a) と (b) は同値であることを示せ. (空集合については議論しないでよい.)

(a) 任意の $O \in \mathcal{O}$ に対し, $O = \bigcup_{\lambda} O'_\lambda$ となるような集合族 $\{O'_\lambda\}_\lambda \subset \mathcal{O}'$ が存在する.

(b) 任意の $O \in \mathcal{O}$ と任意の $x \in O$ に対し, $x \in O' \subset O$ となるような $O' \in \mathcal{O}'$ が存在する.

ii) 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ を考える. 可算個の開区間からなる集合 $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ($U_n \subset \mathbb{R}$ は開区間) であって, $\mathbb{R}$ の任意の開集合が $\mathcal{U}$ の元の和集合となるようなものが存在することを示せ.

2010

$\boxed{\mathbf{33}}$ X を空でない集合, $a \in X$ とする. $\mathcal{O} = \{O \subset X \mid a \in O\} \cup \{\emptyset\}$ とすると, $\mathcal{O}$ は X の位相となることを示せ.

$\boxed{\mathbf{34}}$ $\mathbb{R}$ にユークリッド位相をいれる. $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \left\{\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, $B = \mathbb{Q}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれる. このとき次を示せ.

i) $\{\frac{1}{n}\}$ は A の開かつ閉集合である.

ii) $\{0\}$ は A の閉集合であるが開集合ではない.

iii) $B \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ は B の開かつ閉集合である.

$\boxed{\mathbf{35}}$ $\mathbb{R}$ にユークリッド位相をいれたものを E, $\mathbb{R}$ に Zariski 位相をいれたものを Z とする. 写像 $f\colon E \to Z$ を $f(x) = x$ で, $g\colon Z \to E$ を $g(x) = x$ で, $h\colon Z \to Z$ を $h(x) = x + 1$ 定める.

i) f は連続か? 理由をつけて答えよ.

ii) g は連続か? 理由をつけて答えよ.

iii) h は連続か? 理由をつけて答えよ.

$\boxed{\mathbf{36}}$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$ とする. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \ a_i \leq x_i \leq b_i\ (\forall i)\}\end{aligned}$$

を考える.

i) $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ は閉集合であることを示せ.

ii) $a_1 = b_1$ であるとき, $\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ の内部を求めよ.

37 X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. $x \in X$ が A の外点 (すなわち $x \in A^e$) であることと, $d(x, A) > 0$ であることは同値であることを示せ.

2011

38 X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする. このとき次は同値であることを示せ.

i) A は閉集合.

ii) 任意の $x \in A^c$ に対し, $d(x, A) > 0$.

39 距離空間 X が 2 つ以上元を含めば, 距離の定める位相は密着位相ではないことを示せ.

40 X を位相空間とする. X の部分集合 A に対し, X の部分集合 $\overline{A}$ を

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap A \neq \emptyset\}$$

により定める. ただし, $\mathcal{U}(x)$ は x の近傍系. このとき次を示せ.

i) $A \subset B \subset X$ ならば $\overline{A} \subset \overline{B}$.

ii) $U, V \in \mathcal{U}(x)$ ならば $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$.

iii) $A, B \subset X$ について, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

41 $\mathbb{R}$ の部分集合 A を,

$$A = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$$

と定める. また A の部分集合の族 $\mathcal{O}_1$ を,

$$\mathcal{O}_1 = \left\{O \subset A \,\middle|\, \forall x \in O, \exists a, b \in A : a < x < b \text{ かつ } A \cap (a, b) \subset O\right\}$$

と定める. さらに, $\mathbb{R}$ のユークリッド位相からの相対位相を A にいれた位相を $\mathcal{O}_2$ とする.

i) $\mathcal{O}_1$ が位相の条件をみたすことを示せ.

ii) 次の A の部分集合の閉包を $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ でそれぞれ求めよ.

- $(1, 2)$.
- $(3, 4)$.

iii) A の部分集合 $\{x \in A \mid x > 1\}$ に $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ からの相対位相をいれたものは, 一致することを示せ.

iv) $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ の位相の強弱を述べよ.

v) 写像 $f\colon A \to \mathbb{R}$ を,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

により定める. $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$ での f の連続性を調べよ. ただし $\mathbb{R}$ にはユークリッド位相をいれるものとする.

2012

$\boxed{\textbf{42}}$ X を距離空間, $A \subset X$ を空でない部分集合とする.

i)「任意の $a \in A$ に対し $d(a, A^c) = 0$」となる例を挙げよ.

ii) 次は同値であることを示せ.

(a) A は開集合.

(b) 任意の $a \in A$ に対し, $d(a, A^c) > 0$.

$\boxed{\textbf{43}}$ X を距離空間, $\{x_n\}$ を X の点列, $x \in X$ とする.

i) $\{\mathrm{U}_\varepsilon(x) \mid \varepsilon > 0\}$ は点 x の基本近傍系であることを示せ.

ii) $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とする. このとき次は同値であることを示せ.

(a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

(b) 任意の $V \in \mathcal{U}^*(x)$ に対し, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq N$ に対し, $x_n \in V$ となる.

$\boxed{\textbf{44}}$ X を位相空間, $A \subset X$ を部分空間, $B \subset A$ を部分集合とする.

i) B の A における閉包を B^a, X における閉包を $\overline{B}$ であらわす. このとき, $B^a = A \cap \overline{B}$ であることを示せ.

ii) B に X からいれた相対位相と, A からいれた相対位相は一致することを示せ.

$\boxed{\textbf{45}}$ a を $0 < a < 1$ である実数とする. $\mathbb{R}$ の部分集合 X, Y, A を,

$$\begin{aligned} X &= \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \\ Y &= X \cup \{0\} \\ A &= \{x \in X \mid x > a\} \end{aligned}$$

と定める.

i) $\mathbb{R}$ にザリスキー位相をいれたとき, X の内部, 閉包を求めよ.
（ただし, $\mathbb{R}$ のザリスキー位相とは $\mathcal{O}_Z = \left\{ O \subset \mathbb{R} \;\middle|\; O^c \text{ は有限集合} \right\} \cup \{\emptyset\}$ で定まる位相である.）

ii) $\mathbb{R}$ のユークリッド位相からの相対位相を X, Y にいれた位相空間をそれぞれ X_E, Y_E とする.

(a) X_E の位相は離散位相であることを示せ.

(b) Y_E の位相は離散位相ではないことを示せ.

iii) $\mathbb{R}$ のザリスキー位相からの相対位相を X, A にいれた位相空間をそれぞれ X_Z, A_Z とする.

(a) X_Z の位相は離散位相ではないことを示せ.

(b) A_Z の位相は離散位相であることを示せ.

2013

46 X を有限集合とする. $A \subset X$ に対し, A の特性関数を χ_A であらわす. すなわち χ_A は

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

で定まる写像 $\chi_A \colon X \to \{0,1\}$ である. また $A, B \subset X$ に対し, $A \oplus B$ で A と B の対称差をあらわす. すなわち $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ である.

i) $\{0,1\}$ 上の離散距離を d_D と書く. $A, B \subset X$ に対し,

$$|A \oplus B| = \sum_{x \in X} d_D(\chi_A(x), \chi_B(x))$$

であることを示せ. ただし, 左辺は元の個数である.

ii) $d \colon \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ を $d(A,B) = |A \oplus B|$ と定めると, d は $\mathcal{P}(X)$ 上の距離関数であることを示せ.

47 X を距離空間, $A \subset X$ を空でない部分集合とし, $x \in X$ とする. このとき $x \in A^e \Leftrightarrow d(x,A) > 0$ であることを示せ. ただし A^e は A の外部である.

48 X を距離空間とする. ある正の数 R が存在して, 任意の $x, y \in X$ $(x \neq y)$ に対し $d(x,y) \geq R$ が成り立つとき, 距離 d の定める位相は離散位相であることを示せ.

49 X を位相空間, $x \in X$ とし, $\mathcal{U}^*(x)$ を x の基本近傍系とする.
$\mathcal{U}^*(x)$ の部分集合 $\mathcal{U}^{**}(x)$ が条件「任意の $V \in \mathcal{U}^*(x)$ に対し, ある $W \in \mathcal{U}^{**}(x)$ が存在して $W \subset V$ となる」をみたすとき, $\mathcal{U}^{**}(x)$ も x の基本近傍系であることを示せ.

50 $\mathbb{R}$ の部分集合 A を,

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

と定める.

i) $\mathbb{R}$ にザリスキー位相をいれたとき, A の内部, 閉包を求めよ. 理由も書け. (ただし, $\mathbb{R}$ のザリスキー位相とは $\mathcal{O}_Z = \big\{ O \subset \mathbb{R} \;\big|\; O^c \text{ は有限集合} \big\} \cup \{\emptyset\}$ で定まる位相である.)

ii) $\mathbb{R}$ にユークリッド位相をいれたとき, A の内部, 閉包を求めよ. (答えだけでよい.)

iii) $\mathbb{R}$ に離散位相をいれたとき, A の内部, 閉包を求めよ. (答えだけでよい.)

51 X を空でない集合とする.

i) X の空でない部分集合とその上の全順序の組全体

$$\mathcal{S} = \big\{ (A, \leq_A) \;\big|\; \emptyset \neq A \subset X,\ \leq_A \text{ は } A \text{ 上の全順序} \big\}$$

を考え, $\mathcal{S}$ に

$$(A, \leq_A) \preceq (B, \leq_B) \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i) } A \subset B, \\ \text{(ii) 任意の } a, a' \in A \text{ に対し, } a \leq_A a' \Leftrightarrow a \leq_B a' \end{cases}$$

により順序 $\preceq$ をいれる. (これが順序であることは認めてよい.) このとき $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合であることを示せ.

ii) X に全順序をいれることができることを示せ.

2014

52 i) $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$ の間の全単射を具体的にひとつ作れ.

ii) $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ の間の全単射を具体的にひとつ作れ.

iii) $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ の間の全単射を具体的にひとつ作れ.

53 X を集合, d_0, d_1 を X 上の距離関数とする. $0 \leq t \leq 1$ に対し, $d_t \colon X \times X \to \mathbb{R}$ を $d_t(x, y) = (1-t)d_0(x, y) + t d_1(x, y)$ により定める.

i) $\min\{d_0(x, y), d_1(x, y)\} \leq d_t(x, y) \leq \max\{d_0(x, y), d_1(x, y)\}$ であることを示せ.

ii) d_t は X 上の距離関数であることを示せ.

iii) $A \subset X$ を空でない部分集合, $\delta_t(A)$ を距離 d_t で測った A の直径, すなわち

$$\delta_t(A) = \sup\{d_t(a,b) \mid a, b \in A\}$$

とする.

$\delta_0(A), \delta_1(A) < +\infty$ であるとき, $\delta_t(A) \leq \max\{\delta_0(A), \delta_1(A)\}$ であることを示せ.

54 i) X を距離空間とし, $x \in X$ を中心とする半径 $r(>0)$ の開球を $\mathrm{U}_r(x)$ で表す.

(a) $\mathrm{U}_r(x)$ は開集合であることを示せ.

(b) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{U}_{\frac{1}{n}}(x)$ を求めよ. （理由も書け.）

ii) (a) 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において, 一点からなる集合は開集合ではないことを示せ.

(b) 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の開集合の族 $\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であって, $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ が開集合とはならないものを挙げよ.

55 距離空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ は, 任意の $x, x' \in X$ に対し $d(f(x), f(x')) = d(x, x')$ をみたすとき, 距離を保つという.

i) X, Y を離散距離空間, $f\colon X \to Y$ を単射とする. このとき, f は距離を保つことを示せ.

ii) $\mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を, 距離を保つ写像で $f(0) = 0$ であるものとする.

(a) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $|f(x)| = |x|$ であることを示せ.

(b) $f(1) = 1$ であるとき, f を求めよ.

56 X, Y を空でない集合とする.

$$\mathcal{S} = \left\{(A, B, f) \;\middle|\; A \subset X,\ B \subset Y,\ f\colon A \to B \text{ は全単射}\right\}$$

とおく.

i) $\mathcal{S} \neq \emptyset$ であることを示せ.

ii) $\mathcal{S}$ における順序関係 $\leq$ を, $(A, B, f), (A', B', f') \in \mathcal{S}$ に対し, $(A, B, f) \leq (A', B', f') \Leftrightarrow A \subset A',\ B \subset B',\ f'|A = f$ と定める. （これが順序関係であることは認めてよい.）このとき, $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合であることを示せ.

iii) $\mathcal{S}$ の極大元を (X_0, Y_0, f_0) とする. このとき $X_0 = X$ または $Y_0 = Y$ であることを示せ.

2015

57 次の集合の間の全単射をひとつ作れ.

i) $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}-3\mathbb{N}$. ただし $3\mathbb{N}=\{3n \mid n\in\mathbb{N}\}$.

ii) $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}\times\{0,1,2\}$.

iii) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ と B. ただし B は 0 と 1 からなる数列全体のなす集合

$$B=\left\{\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \text{任意の } i \text{ に対し } a_i \text{ は } 0 \text{ か } 1\right\}.$$

iv) $\mathbb{R}$ の区間 $[0,2]$ と $[0,1)$.

v) $X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \max\{|x|,|y|\}=1\right\}$ と
$Y=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2=1\right\}$

58 X を空でない順序集合とする.

i) $\mathcal{S}=\left\{A \;\middle|\; \emptyset\neq A\subset X,\ A \text{ は全順序部分集合}\right\}$ とし, $\mathcal{S}$ に包含関係で順序をいれる. このとき $\mathcal{S}$ は帰納的順序集合であることを示せ.

ii) X は, 包含関係に関して極大な全順序部分集合を持つことを示せ.

59 (X,d) を距離空間, A を集合, $f\colon A\to X$ を写像とする. 写像 $\varphi\colon A\times A\to\mathbb{R}$ を $\varphi(a,b)=d(f(a),f(b))$ により定める.

i) f が単射ならば, φ は A 上の距離関数であることを示せ.

ii) φ が A 上の距離関数ならば, f は単射であることを示せ.

60 X を集合とし, d_1,d_2 を X 上の距離関数とする.

i) $x,y\in X$ に対し $d_3(x,y)=d_1(x,y)+d_2(x,y)$ で与えられる関数 d_3 は X 上の距離関数になることを示せ.

ii) $A\subset X$ を空でない部分集合とする. d_1,d_2,d_3 で計った A の直径をそれぞれ $\delta_1(A),\delta_2(A),\delta_3(A)$ とする. すなわち

$$\delta_i(A)=\sup\left\{d_i(a,b) \mid a,b\in A\right\}.$$

次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\delta_3(A)\leq\delta_1(A)+\delta_2(A)$$

iii) 上の不等式で等号が成り立たない例を挙げよ.

61 X を距離空間, $A\subset X$ を空でない部分集合とする.

i)「任意の $a\in A$ に対し $d(a,A^c)=0$」となる例を挙げよ.

ii) 次は同値であることを示せ.

(a) A は開集合.

(b) 任意の $a \in A$ に対し, $d(a, A^c) > 0$.

62 $\mathbb{R}^n$ を n 次元ユークリッド空間とする.

i) $a \in \mathbb{R}$ とする. $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$H_{1,a} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > a\}$$

は開集合であることを示せ.

ii) $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i < b_i$ とする. $\mathbb{R}^n$ の開区間

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(a_i, b_i) &= (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \forall i : a_i < x_i < b_i\}\end{aligned}$$

は開集合であることを示せ.

6.4 後期期末

1999

1 $\mathbb{R} \supset A$ が次の集合のとき $\max A, \min A, \sup A, \inf A$ を求めよ. (解答のみでよい. 証明は不要.)

i) $A = (0, 1]$

ii) $A = \{\frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

2 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ をともに連続写像とする. このとき $F(x) = (f(x), g(x))$ で定義される写像 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ は連続であることを示せ.

3 $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ に $\mathbb{R}$ の部分空間として距離をいれる.

i) $x_n = \frac{1}{n}$ で定まる $(0, 1]$ の点列 $\{x_n\}_{n \in N}$ は基本列であることを示せ.

ii) $(0, 1]$ は完備ではないことを示せ.

4 X を Hausdorff 空間とする.

i) X の部分集合 A, B がともにコンパクトならば $A \cup B$ もコンパクトであることを示せ.

ii) X の部分集合 A がコンパクトならば A は X の閉集合であることを示せ.

5 i) $(0,1) \subset \mathbb{R}$ はコンパクトではないことを示せ.

ii) $\mathbb{R}$ はコンパクトではないことを示せ.

2002

6 i) X を位相空間, $X \supset A$ を部分集合とする. A の相対位相の定義を述べよ.

ii) X, Y を位相空間, $X \supset A$, $Y \supset B$ をそれぞれ部分集合とする. 写像 $f\colon X \to Y$ が連続で $f(A) \subset B$ とすると, A, B に相対位相をいれたとき, $f\colon A \to B$ は連続であることを示せ.

7 i) 位相空間における点列の収束の定義を述べよ.

ii) (X, d) を距離空間, $X \supset F$ を閉集合とする. X の点列 $\{x_n\}$ が, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $x_n \in F$ であるとする. このとき $\{x_n\}$ が $x \in X$ に収束すれば, $x \in F$ であることを示せ.

iii) $\mathbb{R} \supset A$ は有界閉集合であるとする. このとき $\max A$ が存在することを示せ. (Hint. $\sup A$ を考えよ.)

2004

8 X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

i) $f\colon X \to Y$ が連続の定義 (近傍による) を書け.

ii) $A \subset X$ を X の部分集合とする. $f\colon X \to Y$ が連続であるとき, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ を示せ. ただし $\overline{A}$ は A の閉包をあらわす.

iii) $f\colon X \to Y$ が連続で, $f(\overline{A}) \subsetneq \overline{f(A)}$ となる例を作れ. また, 作った A はコンパクトになるかどうかも述べよ.

9 i) X を位相空間, $X \supset A, B$ をコンパクトとするとき, $A \cup B$ もコンパクトになることを示せ.

ii) X を Hausdorff 空間, $X \supset A, B$ をコンパクトとするとき, $A \cap B$ もコンパクトになることを示せ.

10 i) X を連結な位相空間, $f\colon X \to \{0,1\}$ を連続写像とする. ただし $\{0,1\}$ には離散位相がはいっているものとする. このとき f は全射ではないことを示せ.

ii) 位相空間 X の各連結成分は閉集合であることを示せ.

iii) X を位相空間で, 任意の $x \in X$ が連結な近傍を持つものとする. このとき X の各連結成分は開集合であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{11}}$ i) X を距離空間, 写像 $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ は点 $a \in X$ で連続とする．$f(a) > g(a)$ ならば a の近傍 U で, $f(x) > g(x) \quad (\forall x \in U)$ となるものがとれることを示せ.

ii) 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ から 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ への写像 $p_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ を $p_i(x_1, x_2) = x_i$ により定める．距離空間 X からの写像 $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ について, $p_1 \circ f$, $p_2 \circ f$ がともに連続ならば, f も連続であることを示せ.

iii) 線型写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は連続であることを示せ．ただし $\mathbb{R}^2$ は自然に $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間と考える.

2005

$\boxed{\mathbf{12}}$ X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

i) $f\colon X \to Y$ が連続の定義 (近傍による) を書け.

ii) $A \subset X$ を X の部分集合とする．$f\colon X \to Y$ が連続であるとき, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ を示せ．ただし $\overline{A}$ は A の閉包をあらわす.

iii) $f\colon X \to Y$ が連続で, $f(\overline{A}) \subsetneq \overline{f(A)}$ となる例を作れ．また, 作った A はコンパクトになるかどうかも述べよ.

$\boxed{\mathbf{13}}$ 次を示せ.

i) X が離散空間でコンパクトであるならば,X は有限集合である.

ii) $X = \mathbb{R}$ に Z 位相をいれると X はコンパクトである.

$\boxed{\mathbf{14}}$ i) X を連結な位相空間, $f\colon X \to \{0, 1\}$ を連続写像とする．ただし $\{0, 1\}$ には離散位相がはいっているものとする．このとき f は全射ではないことを示せ.

ii) 位相空間 X の各連結成分は閉集合であることを示せ.

iii) X を位相空間で, 任意の $x \in X$ が連結な近傍を持つものとする．このとき X の各連結成分は開集合であることを示せ.

2006

$\boxed{\mathbf{15}}$ X を位相空間, $X = A_1 \cup A_2$ として, A_1, A_2 には, X からの相対位相をいれる．また, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

i) $f|_{A_i}\colon A_i \to Y \ (i = 1, 2)$ は連続であるが,
$f\colon X \to Y$ は連続ではない例をあげよ.

ii) A_1, A_2 が X の閉集合であるとき, 次を示せ.
$f|_{A_i}\colon A_i \to Y \ (i = 1, 2)$ が連続 $\Rightarrow$ $f\colon X \to Y$ が連続.

$\boxed{\mathbf{16}}$ X を距離空間, $A \subset X$ を部分集合とする.

i) X は Hausdorff 空間であることを示せ.

ii) A がコンパクトならば, A は X の閉集合であることを示せ.

iii) A がコンパクトならば, A は有界であることを示せ.

17 X をコンパクトな距離空間とする.

i) $\{a_n\}$ を X の点列とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し, X の部分集合 A_n および F_n を $A_n = \{a_i\}_{i \geq n}$, $F_n = A_n^a$ により定める．ただし A_n^a は A_n の閉包をあらわす. このとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$$

であることを示せ.

ii) $\{a_n\}$ が基本列ならば, $\lim_{n\to\infty} \delta(A_n) = 0$ であることを示せ．ただし $\delta(A_n)$ は A_n の直径をあらわす.

iii) X は完備であることを示せ.

18 $\mathbb{R}$ は 1 次元ユークリッド空間をあらわすものとする.

i) $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする．$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ を連続関数とし, $f(a) < f(b)$ であるとする．このとき $f(a) < \alpha < f(b)$ である任意の実数 $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し, $a < c < b$, $f(c) = \alpha$ となるような実数 $c \in \mathbb{R}$ が存在すること（中間値の定理）を示せ．ただし閉区間 $[a,b]$ が連結であることは認めてよい.

ii) 連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の像 $f(\mathbb{R})$ が高々可算な集合であるならば, f は定数関数であることを示せ.

iii) 連続関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で, 有理数を無理数に, 無理数を有理数に写すもの, すなわち $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}^c$, $f(\mathbb{Q}^c) \subset \mathbb{Q}$ となるものはあるか.

2007

19 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$ および $A \cup \{0\}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれる.

i) A はコンパクトでない事を示せ.

ii) $A \cup \{0\}$ はコンパクトであることを示せ.

20 X を距離空間, $A \subset X$ を閉集合, $x \in X$ とする.

i) $x \notin A$ ならば, $d(x, A) > 0$ であることを示せ.

ii) $B \subset X$ がコンパクトで $A \cap B = \emptyset$ ならば, $d(A, B) > 0$ であることを示せ.

21 X を位相空間とする．また集合 $\{0, 1\}$ に離散位相をいれる.

i) X が連結であることと, $A \subset X$ が開かつ閉集合ならば $A = \emptyset$ または $A = X$ であることが同値であることを示せ.

ii) X が連結で, $f\colon X \to \{0, 1\}$ が連続写像ならば, f は全射ではないことを示せ.

iii) X が連結でないならば, 連続写像 $f\colon X \to \{0, 1\}$ で, 全射であるものが存在することを示せ.

2008

$\boxed{\mathbf{22}}$ $A \subset \mathbb{R}$ を空でない部分集合とし, $[1, 2] \cup [3, 4]$, $\mathbb{Q}$ および A に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれる.

i) $[1, 2] \cup [3, 4]$ は連結ではないことを示せ.

ii) $\mathbb{Q}$ は連結ではないことを示せ.

iii) A が連結で $a, b \in A$, $a \leq b$ ならば $[a, b] \subset A$ であることを示せ.

iv) A が高々可算かつ連結であるならば A は一点からなる集合であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{23}}$ コンパクトの定義に基づき以下を示せ.

i) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続写像, $A = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ としたとき, $f(A)$ はコンパクトであることを示せ.

ii) 実数列 $\{a_n\}$ が収束列で, $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ であるとする. このとき $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{a\} \cup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ はコンパクトであることを示せ.

iii) 距離空間 X の部分集合 K がコンパクト $\Leftrightarrow$ 無数の開円盤の一組が, 全体として K を覆うならば, K はすでに, それらの開円盤の中の有限個だけで覆われる.

$\boxed{\mathbf{24}}$ (X, d) を距離空間, $A \subset X$ を空でない閉集合とする. 関数 $d_A\colon X \to \mathbb{R}$ を $d_A(x) = d(x, A)$ で定義する.

i) $x \notin A \Leftrightarrow d_A(x) > 0$ を示せ.

ii) 任意の $x, x' \in X$ に対し, 不等式 $d(x, A) \leq d(x, x') + d(x', A)$ が成立することを示せ.

iii) d_A は一様連続であることを示せ.

iv) Y を位相空間, $K \subset Y$ をコンパクト部分集合とし, $f\colon Y \to X$ を連続写像で $f(K) \cap A = \emptyset$ であるものとする. このとき次の性質を持つ正の数 ε が存在することを示せ.

「写像 $g\colon Y \to X$ が $\sup_{y \in Y} d(f(y), g(y)) < \varepsilon$ をみたせば, $g(K) \cap A = \emptyset$ となる.
」

ただし, コンパクト集合上の連続関数が最小値をとるということはみとめてよい.

2009

$\boxed{\textbf{25}}$ X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

i) 写像 f が連続であることの定義を, 近傍を使って述べよ.

ii) 次の (a),(b) は同値であることを示せ.

(a) f は連続.

(b) Y の任意の開集合 O について, $f^{-1}(O)$ は X の開集合.

iii) Z を集合とし, Z に位相 T_1, T_2 をいれる. このとき次の (a),(b) は同値であることを示せ.

(a) 恒等写像 $1_Z\colon (Z, T_1) \to (Z, T_2)$ は連続.

(b) $T_2 \leq T_1$.

$\boxed{\textbf{26}}$ i) コンパクトでない空間の例を理由をつけて挙げよ.

ii) 距離空間 X がコンパクトならば, X は有界であることを示せ.

iii) X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を連続写像, $B \subset Y$ をコンパクト集合とする. このとき $f^{-1}(B)$ はコンパクトか? そうならば証明し, そうでなければ反例を理由をつけて挙げよ.

$\boxed{\textbf{27}}$ i) 位相空間 X が非連結であることの定義を述べよ.

ii) $\mathbb{Q}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれると, $\mathbb{Q}$ は非連結であることを示せ.

iii) X を集合とし, X に位相 T_1, T_2 をいれる. さらに T_2 が T_1 より弱いとする. このとき, (X, T_1) が連結であれば (X, T_2) も連結であることを示せ.

$\boxed{\textbf{28}}$ (X, d) を距離空間とし, 次の条件 $(*)$ を考える.

$(*)$ ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $x \neq y$ であるような任意の $x, y \in X$ に対し $d(x, y) \geq \varepsilon_0$ が成り立つ.

以下の問に答えよ.

i) X が $(*)$ をみたせば, 距離の定める X の位相は離散位相であることを示せ.

ii) X が $(*)$ をみたせば, X は完備であることを示せ.

iii) X が有限集合であれば X は完備であることを示せ.

iv)「距離の定める X の位相が離散位相ならば X は完備である」というのは正しいか? 理由をつけて答えよ.

$\boxed{\textbf{29}}$ 閉区間 $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれる. X を位相空間とし, $f, g\colon I \to$

X を連続写像で $f(1) = g(0)$ をみたすものとする．このとき

$$h(t) = \begin{cases} f\left(2t\right), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g\left(2t-1\right), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

で定義される写像 $h\colon I \to X$ は連続であることを示せ.

2010

30 $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ をユークリッド空間, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を写像とする.

i) 次の (a),(b) は同値であることを示せ.

(a) f は連続.

(b) $F(x,y) = f(x) - y$ で定まる写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が連続.

ii) f が連続ならば f のグラフ

$$\Gamma_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x)\right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ の閉集合であることを示せ.

31 i) 離散距離空間は完備であることを示せ.

ii) 集合 $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ を 1 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分空間として距離空間とみる．このとき A は完備ではないことを示せ.

iii)「距離空間 X において, 距離の定める X の位相が離散位相ならば X は完備である」というのは正しいか? 理由をつけて答えよ.

32 $X = \mathbb{R}$ にユークリッド位相をいれる．X の部分集合 $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ 及び $\overline{A} = A \cup \{0\}$ に X からの相対位相をいれる．$f\colon \overline{A} \to X$ を写像とする.

i) 次の (a),(b) は同値であることを示せ.

(a) f は連続.

(b) $f(1/n) = a_n$, $f(0) = \alpha$ とするとき, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

ii) f が連続であるとき, $f(\overline{A})$ はコンパクトであることを示せ.

33 $X = \mathbb{R}$ に Zariski 位相をいれる.

i) X はコンパクトであることを示せ.

ii) X の部分集合 A で, A はコンパクトであるが, 閉集合ではないものをひとつ挙げよ.

34 X を空でない位相空間とする.

i) X が連結ならば, 空でない真の部分集合 $\emptyset \neq A \subsetneq X$ で, 開集合かつ閉集合であるものは存在しないことを示せ.

ii) $F \subset X$ を閉集合とする. 次の (a),(b) は同値であることを示せ.

(a) F は連結.

(b) X の閉集合 F_1, F_2 が $F = F_1 \coprod F_2$ をみたせば, $F_1 = \emptyset$ または $F_2 = \emptyset$.

35 $\mathbb{R}^2$ にユークリッド位相をいれる.

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

に $\mathbb{R}^2$ からの相対位相をいれる. このとき, D は連結であることを示せ.

(ヒント) $\mathbb{R}^2$ 内の線分が連結であることは証明なしに使ってよい.

2011

E で, $\mathbb{R}$ にユークリッド位相をいれた位相空間を表す.

Z で, $\mathbb{R}$ に Zariski 位相をいれた位相空間を表す.

コンパクト空間は Hausdorff とは仮定しない.

36 E の部分集合 A, B を

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 1 - \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

により定める.

i) $A \cup B$ はコンパクトであることを示せ.

ii) $A \cup B$ の内部, 閉包を求めよ. (理由も書け.)

37 i) Z の任意の部分空間はコンパクトであることを示せ.

ii) X を Hausdorff 空間とする. A, B を X の任意のコンパクト集合とするとき, $A \cap B$ もコンパクトであることを示せ.

38 i) A を Z の部分集合で無限個の元を持つものとする. このとき A は連結であることを示せ.

ii) 集合 X に位相 T_1, T_2 を入れる. $T_1 \leq T_2$ であるとき, X が T_2 で連結ならば, T_1 でも連結であることを示せ.

39 i) 距離空間は Hausdorff 空間であることを示せ.

ii) Z は Hausdorff 空間ではないことを示せ.

iii) $a_n = n$ で与えられる Z の点列 $\{a_n\}$ を考える．任意の $x \in Z$ に対し, $\{a_n\}$ は x に収束することを示せ.

iv) $b_n = 1$ で与えられる Z の点列 $\{b_n\}$ を考える．$\{b_n\}$ は 1 に収束することを示せ．また, その極限点は一意的であることを示せ.

40 $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$ に

$$\mathcal{O} = \Big\{O \subset A \;\Big|\; \forall x \in O, \exists a, b \in A : a < x < b \text{ かつ } A \cap (a,b) \subset O\Big\}$$

で与えられる位相 $\mathcal{O}$ をいれる．（$\mathcal{O}$ が位相であることは認めてよい.）

写像 $g\colon A \to E$ を,

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x - 1, & x > 1 \\ x + 1, & x < -1 \end{cases}$$

により定める.

i) $a, b \in A$, $a < b$ とする．$A \cap (a,b)$ は A の開集合か？

ii) g は点 $0 \in A$ で連続であることを示せ.

iii) g は点 $a \in A$（ただし $a \neq 0$）で連続であることを示せ.

iv) g は全単射であることを示せ.

v) g の逆写像も連続であることを示せ.

vi) A は連結か？ 理由を付けて答えよ.

2012

E で, $\mathbb{R}$ にユークリッド位相をいれた位相空間を表す.

Z で, $\mathbb{R}$ に Zariski 位相をいれた位相空間を表す.

コンパクト空間は Hausdorff とは仮定しない.

41 写像 $f\colon E \to E$ を $f(x) = x + 1$ で, $g\colon Z \to E$ を $g(x) = x + 1$ で, $h\colon Z \to Z$ を $h(x) = x + 1$ で定める.

i) f は連続か? 理由をつけて答えよ.

ii) g は連続か? 理由をつけて答えよ.

iii) h は連続か? 理由をつけて答えよ.

42 i) O_1, O_2 を Z の空でない開集合とする．このとき $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ であることを示せ.

ii) $Z \times E$ は Hausdorff 空間ではないことを示せ.

iii) $Z \times Z$ は連結であることを示せ.

43　2 点からなる集合 $T=\{0,1\}$ を考える．T に離散位相をいれた空間を T_d とする．

i) T の位相 $\mathcal{O}$ で $(T,\mathcal{O})$ が Hausdorff 空間となるものを全て挙げよ．

ii) 位相空間 $X(\neq\emptyset)$ が非連結であることと，X から T_d への連続な全射が存在することは同値であることを示せ．

iii) T の位相 $\mathcal{O}$ で $(T,\mathcal{O})$ が非連結となるものを全て挙げよ．

44　$\mathbb{R}$ の部分集合 A, B を

$$A=\left\{\frac{1}{n}\in\mathbb{R}\;\middle|\;n\in\mathbb{N}\right\}$$
$$B=A\cup\{0\}$$

と定める．E からの相対位相を A, B にいれた位相空間をそれぞれ A_E, B_E とし，Z からの相対位相を A にいれた位相空間を A_Z とする．

i) A_E はコンパクトではないことを示せ．

ii) B_E はコンパクトであることを示せ．

iii) A_Z はコンパクトであることを示せ．

45　集合 $X(\neq\emptyset)$ に位相 $\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2$ を入れる．$\mathcal{O}_1\leq\mathcal{O}_2$ であるとする．

i) $(X,\mathcal{O}_1)$ が Hausdorff ならば，$(X,\mathcal{O}_2)$ も Hausdorff であることを示せ．

ii) $(X,\mathcal{O}_2)$ が連結ならば，$(X,\mathcal{O}_1)$ も連結であることを示せ．

iii) $(X,\mathcal{O}_2)$ がコンパクトならば，$(X,\mathcal{O}_1)$ もコンパクトであることを示せ．

2013

E で，$\mathbb{R}$ にユークリッド位相をいれた位相空間を表す．

Z で，$\mathbb{R}$ に Zariski 位相をいれた位相空間を表す．

46　i) 開写像の合成は開写像であることを示せ．

ii) 連続写像であるが開写像ではない例を挙げよ．

47　写像 $f\colon E\to E$ を $f(x)=2x$ で，$g\colon Z\to E$ を $g(x)=2x$ で，$h\colon Z\to Z$ を $h(x)=2x$ で定める．

i) f は連続か? 理由をつけて答えよ．

ii) g は連続か? 理由をつけて答えよ．

iii) h は連続か? 理由をつけて答えよ．

48　i) Z は Hausdorff 空間ではないことを示せ．

ii) $a_n = n$ で与えられる Z の点列 $\{a_n\}$ を考える．$\{a_n\}$ は 2014.0131 に収束することを示せ．

iii) $c_n = (-1)^n$ で与えられる Z の点列 $\{c_n\}$ を考える．$\{c_n\}$ は収束列ではないことを示せ．

49 X を元を 2 つ以上含む集合, $a \in X$ とし, $\mathcal{O} = \{O \subset X \mid a \in O\} \cup \{\emptyset\}$ とする．

i) $\mathcal{O}$ は X の位相となることを示せ．

ii) $(X, \mathcal{O})$ は Hausdorff 空間か？ 理由をつけて答えよ．

50 X を位相空間, $A \subset X$ を部分空間, $B \subset A$ を部分集合とし, $i\colon A \to X$ を包含写像とする．

i) B の A における閉包を B^a, X における閉包を $\overline{B}$ であらわす．このとき, $B^a = A \cap \overline{B}$ であることを示せ．

ii) W を位相空間, $f\colon W \to A$ を写像とする．このとき, 合成 $i \circ f\colon W \to X$ が連続ならば f も連続であることを示せ．

51 X, Y, W を空でない位相空間, $p_X\colon X \times Y \to X$, $p_Y\colon X \times Y \to Y$ を射影とする．また, $y_0 \in Y$ とし, $X \times \{y_0\}$ に $X \times Y$ からの相対位相をいれる．写像 $j\colon X \to X \times \{y_0\}$ を $j(x) = (x, y_0)$ により定める．

i) $f\colon W \to X \times Y$ を写像とする．次は同値であることを示せ．（射影が連続であることは証明無しで認めてよい．）

(a) f は連続．

(b) $p_X \circ f$, $p_Y \circ f$ はどちらも連続．

ii) $g(w) = y_0$ により与えられる定値写像 $g\colon W \to Y$ は連続であることを示せ．

iii) j は連続であることを示せ．

iv) j は同相写像であることを示せ．

2014

E で, $\mathbb{R}$ にユークリッド位相をいれた位相空間を表す．

Z で, $\mathbb{R}$ に Zariski 位相をいれた位相空間を表す．（ただし, $\mathbb{R}$ の Zariski 位相とは $\mathcal{O}_Z = \left\{O \subset \mathbb{R} \;\middle|\; O^c \text{ は有限集合}\right\} \cup \{\emptyset\}$ で定まる位相である．）

52 距離空間において，1 点からなる集合は閉集合であることを示せ．

53 X を位相空間, $A, B \subset X$ とする．

i) $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ を示せ．

ii) $A^\circ \cup B^\circ \neq (A \cup B)^\circ$ となる例を挙げよ.

$\boxed{\textbf{54}}$ $\mathbb{R}$ の部分集合 X, Y を次で定める.

$$X = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathbb{R} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$Y = X \cup \{0\}$$

i) X を Z の部分集合とみたとき, X の内部, 閉包を求めよ. 理由も書け.

ii) E からの相対位相を X, Y にいれた位相空間をそれぞれ X_E, Y_E とする.

(a) X_E の位相は離散位相であることを示せ.

(b) Y_E の位相は離散位相ではないことを示せ.

$\boxed{\textbf{55}}$ i) $a_n = n$ で与えられる Z の点列 $\{a_n\}$ を考える. $\{a_n\}$ は 2015 に収束することを示せ.

ii) $b_n = 1$ で与えられる Z の点列 $\{b_n\}$ を考える. $\{b_n\}$ は 1 に収束することを示せ.

iii) $c \in Z$, $c \neq 1$ とする. 点列 $\{b_n\}$ は c には収束しないことを示せ.

$\boxed{\textbf{56}}$ X, Y を位相空間, $f\colon X \to Y$ を写像とする.

i) $a \in X$ とし, $\mathcal{U}^*(a), \mathcal{U}^*(f(a))$ をそれぞれ a, $f(a)$ の基本近傍系とする. このとき次は同値であることを示せ.

(a) f は点 $a \in X$ で連続.

(b) 任意の $V \in \mathcal{U}^*(f(a))$ に対し, ある $U \in \mathcal{U}^*(a)$ が存在して, $f(U) \subset V$ となる.

ii) 次は同値であることを示せ.

(a) f は連続である.

(b) Y の任意の開集合 O に対し, $f^{-1}(O)$ は X の開集合である.

iii) $A \subset X$ を部分空間, $i\colon A \to X$ を包含写像, W を位相空間, $g\colon W \to A$ を写像とする. このとき, 合成 $i \circ g\colon W \to X$ が連続ならば g も連続であることを示せ.

$\boxed{\textbf{57}}$ $g\colon Z \to E$ を $g(x) = x^2$ で, $h\colon Z \to Z$ を $h(x) = x^2$ で定める.

i) g は連続か? 理由をつけて答えよ.

ii) h は連続か? 理由をつけて答えよ.

$\boxed{\mathbf{58}}$ X, Y, W を空でない位相空間, $p_X\colon X \times Y \to X$, $p_Y\colon X \times Y \to Y$ を射影とする．また, $y_0 \in Y$ とし, $X \times \{y_0\}$ に $X \times Y$ からの相対位相をいれる．写像 $j\colon X \to X \times \{y_0\}$ を $j(x) = (x, y_0)$ により定める.

i) $f\colon W \to X \times Y$ を写像とする．次は同値であることを示せ．（射影が連続であること, 連続写像の合成が連続であることは証明無しで認めてよい.）

(a) f は連続.

(b) $p_X \circ f$, $p_Y \circ f$ はどちらも連続.

ii) $g(w) = y_0$ により与えられる定値写像 $g\colon W \to Y$ は連続であることを示せ.

iii) j は連続であることを示せ.

iv) j は同相写像であることを示せ.

$\boxed{\mathbf{59}}$ X, Y を空でない位相空間とする.

i) 連続な単射 $f\colon X \to Y$ が存在するとする．このとき, Y が Hausdorff 空間ならば X もそうであることを示せ.

ii) 直積空間 $X \times Y$ が Hausdorff 空間ならば X もそうであることを示せ.

2015

$\boxed{\mathbf{60}}$ Z を集合, $A \subset Z$ を部分集合とする．Z の部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \left\{ O \subset Z \;\middle|\; O^c \text{ は有限集合} \right\} \cup \{\emptyset\}$$

で定める.

i) $\mathcal{O}$ は Z に位相を定めることを示せ.

以下 Z には位相 $\mathcal{O}$ を入れる.

ii) A, A^c がともに無限集合であるとき, A の内部, 閉包を求めよ.

iii) Z が有限集合であるとき, A の内部, 閉包を求めよ.

$\boxed{\mathbf{61}}$ X を位相空間, $A \subset X$ を部分集合, $x \in X$ とし, $\mathcal{U}(x)$ を x の近傍系とする．X の部分集合族 $\mathcal{O}(x)$ を

$$\mathcal{O}(x) = \left\{ O \subset X \;\middle|\; x \in O \text{ かつ } O \text{ は開集合} \right\}$$

で定める.

i) $\mathcal{O}(x)$ は x の基本近傍系であることを示せ.

ii) 次は同値であることを示せ.

(a) 任意の $U \in \mathcal{U}(x)$ に対し, $U \cap A \neq \emptyset$.

(b) 任意の $O \in \mathcal{O}(x)$ に対し, $O \cap A \neq \emptyset$.

62 X を位相空間, A, B をともに X の稠密な部分集合とする.

i) $A \cup B$ も X で稠密であることを示せ.

ii) A が開集合であるとき, $A \cap B$ も X で稠密であることを示せ.

iii) $A \cap B$ が X で稠密とはならない例を挙げよ.

63 X を位相空間, $A \subset X$ を部分空間, $B \subset A$ を部分集合とし, $i\colon A \to X$ を包含写像とする.

i) B の A における閉包を B^a, X における閉包を $\overline{B}$ であらわす.
このとき, $B^a = A \cap \overline{B}$ であることを示せ.

ii) Y を位相空間, $f\colon Y \to A$ を写像とする. このとき, 合成 $i \circ f\colon Y \to X$ が連続ならば f も連続であることを示せ.

64 X を集合とし, d, d_1, d_2 を X 上の距離関数とする. $x, y \in X$ に対し $d_3(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$ で与えられる関数 d_3 は X 上の距離関数になる (これは認めてよい).

i) $x \neq y$ ならば $d(x,y) \geq 1$ であるとする. このとき, 距離 d の定める位相は離散位相であることを示せ.

ii) $f(x) = x$ で与えられる写像 $f\colon (X, d_3) \to (X, d_1)$ は連続であることを示せ.

iii) $g(x) = x$ で与えられる写像 $g\colon (X, d_1) \to (X, d_3)$ は連続か? 連続ならば証明し, そうでなければ反例を挙げよ.

65 X を距離空間, $A \subsetneq X$ を空でない部分集合とする.

i) $x \in X$ が A の内点であることと, $d(x, A^c) > 0$ は同値であることを示せ.

ii) A が有限集合ならば, A は閉集合であることを示せ.

参考文献

[1] ケリー, 児玉之宏訳, 『位相空間論』, 吉岡書店
[2] 静間良二, 『位相』, サイエンス社
[3] 森田紀一, 『位相空間論』, 岩波全書
[4] J.L.Kelley, General Topology, Springer Verlag
[5]『数学辞典第 4 版』, 岩波書店

索引

執筆者

前原龍二
志賀博雄
手塚康誠
日熊隆則
神山靖彦
佃修一