生保数理 講義ノート

杉浦　誠

最終変更日: 2022 年 3 月 14 日

参考文献

[F] 二見隆, 生命保険数学 上巻・下巻 生命保険文化研究所 (アクチュアリー会 HP から購入可能)
[K] 黒田 耕嗣, 生命保険数理 (アクチュアリー数学シリーズ 5) 日本評論社

この講義ノートは TeX で lifeins.sty を用いて作成しました。

1　現価計算

生保数理では利息の計算において、利息を元金に組み入れる**複利計算**を用いる。

年利が i のとき、元本 A に対する 1 年後の元利合計は $(1+i)A$ となり、2 年後は $(1+i)^2A$, n 年後には $(1+i)^nA$ となる。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & n \\ A & \longrightarrow & (1+i)A & \longrightarrow & (1+i)^2A & \longrightarrow \wr \longrightarrow & (1+i)^nA \end{array}$$

$B=(1+i)^nA$ とする。このとき B を A の**終価**といい、A を B の**現価**という。

では、n 年後に B となるための現価 A はどうなるか。このときも $B=(1+i)^nA$ となるから、

$$(1+i)^nA=B \qquad より \qquad A=\frac{1}{(1+i)^n}B. \qquad \square$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & & n \\ A & \longrightarrow & (1+i)^nA \\ & & \| \\ & & B \end{array}$$

ここで、**現価率** $v=\dfrac{1}{1+i}$ を用いると $A=v^nB$ と表される。

● 転化と名称利率

利息を元金に組み入れることを**転化**といい、1 年間での組入れ回数を**転化回数**という。では、年利が j であるとき、転化回数 k のとき実利率 i を j と k で表そう。

元本 A に対する $1/k$ 年後の元利合計は $\left(1+\dfrac{j}{k}\right)A$ となり、下の図のようにこれを k 回繰り返し

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1/k & & 2/k & & 1 \\ A & \longrightarrow & \left(1+\dfrac{j}{k}\right)A & \longrightarrow & \left(1+\dfrac{j}{k}\right)^2A & \longrightarrow \wr \longrightarrow & \left(1+\dfrac{j}{k}\right)^kA \end{array}$$

1 年後 $\left(1+\dfrac{j}{k}\right)^kA$ となる。よって、

$$\left(1+\frac{j}{k}\right)^kA=(1+i)A \qquad より \qquad i=\left(1+\frac{j}{k}\right)^k-1. \qquad \square$$

この j を転化回数 k の**名称利率**といい $i^{(k)}$ と表す:

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(k)}}{k}\right)^k, \qquad i^{(k)}=k\big\{(1+i)^{1/k}-1\big\}. \tag{1.1}$$

- $\delta = \log(1+i)$ を**利力**という。

命題 1.1 (i) $v = e^{-\delta}$, (ii) $\delta = \lim_{k\to\infty} i^{(k)}$.

証明: (i) は $e^\delta = 1+i$ より明らか。(ii) は $f(x) = (1+i)^x = e^{\delta x}$ とおくと、

$$\lim_{k\to\infty} i^{(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{(1+i)^{1/k}-1}{1/k} \lim_{k\to\infty} \frac{f(1/k)-f(0)}{1/k} = f'(0) = \delta. \qquad \square$$

- $d = \dfrac{i}{1+i}$ を**割引率**という。また、転化回数 k のときの割引率 $d^{(k)}$ を

$$1-d = \left(1-\frac{d^{(k)}}{k}\right)^k \qquad \text{あるいは} \qquad d^{(k)} = k\left\{1-(1-d)^{1/k}\right\} \tag{1.2}$$

で定める。これは (1.1) と対にして覚えるとよい。

命題 1.2 (i) $d = iv,\ v+d = 1$, (ii) $\delta = \lim_{k\to\infty} d^{(k)}$.

証明: (i) は定義より明らか。(ii) は命題 1.1 (ii) と同様に示せるので演習問題とする。 $\square$

命題 1.3 次が成り立つ。

$$d < d^{(2)} < \cdots < d^{(k)} < d^{(k+1)} < \cdots < \delta < \cdots < i^{(k+1)} < i^{(k)} < \cdots < i^{(2)} < i.$$

証明: $g(x) = \dfrac{1-(1-d)^x}{x} = \dfrac{1-e^{-\delta x}}{x}$ とおくと、$d^{(k)} = g\Big(\dfrac{1}{k}\Big)$. また、$g(x)$ は単調減少。実際、

$$g'(x) = \frac{\delta e^{-\delta x}\cdot x - (1-e^{-\delta x})}{x^2} = -\frac{e^{-\delta x}}{x^2}(e^{\delta x}-1-\delta x) < 0.$$

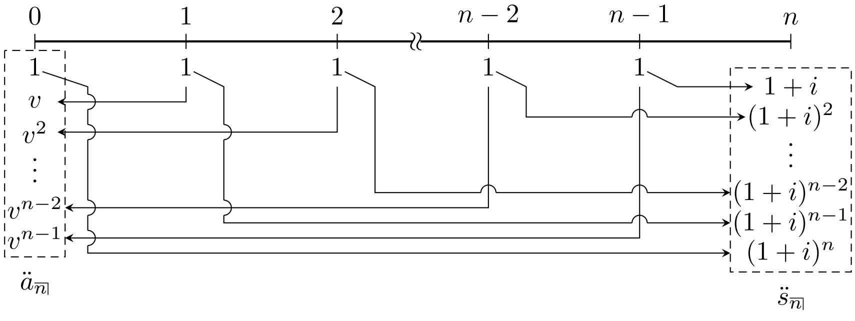
ここで、$e^u > 1+u$ $(u \neq 0)$ となることを用いた (グラフを描けば自明)。よって、$\dfrac{1}{k+1} < \dfrac{1}{k}$ より $g\Big(\dfrac{1}{k+1}\Big) > g\Big(\dfrac{1}{k}\Big)$, すなわち $d^{(k+1)} > d^{(k)}$ を得る。特に命題 1.2 (ii) より $d^{(k)} < \delta$ がわかる。$i^{(k)}$ についても $f(x) = \dfrac{(1+i)^x-1}{x} = \dfrac{e^{\delta x}-1}{x}$ を用い同様に証明できるので、演習問題とする。 $\square$

2 確定年金

- **期始払いの確定年金**

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ で n 年契約、期始払い、年金年額 1 の確定年金の現価を、
$\ddot{s}_{\overline{n}|}$ で n 年契約、期始払い、年金年額 1 の確定年金の終価を表す。

ここで、期始払いとは各年度の期始に払われるという意味であり、現価とは契約の開始時、すなわち 0 時点での価値を、終価は契約の終了時点、この場合 n 年後の価値を表すことので、これを図示すると以下のようになる。



上の図から、$\ddot{a}_{\overline{n}|}, \ddot{s}_{\overline{n}|}$ は以下のように表されることがわかる。

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + \cdots + v^{n-1} = \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{d}, \tag{2.1}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = 1 + i + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n = \frac{(1+i)\{(1+i)^n - 1\}}{1 + i - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}. \tag{2.2}$$

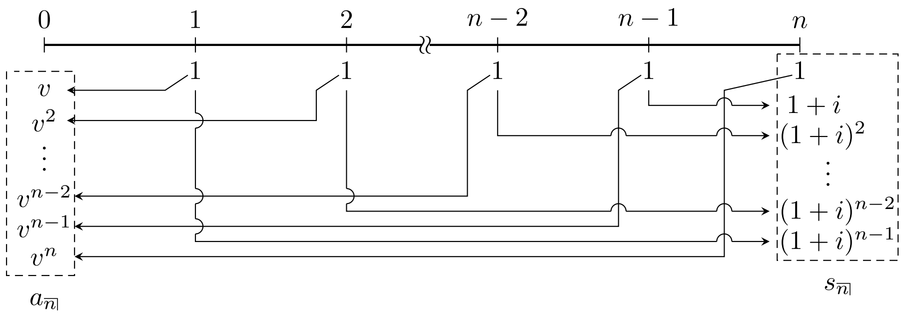
- **期末払いの確定年金**

$a_{\overline{n}|}$ で n 年契約、期末払い、年金年額 1 の確定年金の現価を、
$s_{\overline{n}|}$ で n 年契約、期末払い、年金年額 1 の確定年金の終価を表す。

ここで、期末払いとは各年度の期末に払われることに注意して、下図より $a_{\overline{n}|}, s_{\overline{n}|}$ が次のように表される。

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n = \frac{v(1 - v^n)}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{i}, \tag{2.3}$$

$$s_{\overline{n}|} = 1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1} = \frac{(1+i)^n - 1}{1 + i - 1} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{2.4}$$



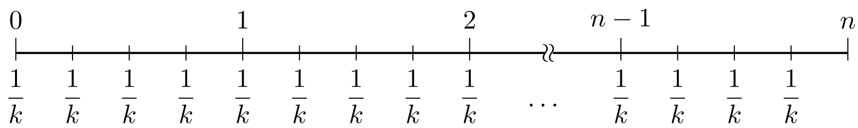
命題 2.1 (i) $a_{\overline{n}|} = v\ddot{a}_{\overline{n}|}$, (ii) $s_{\overline{n}|} = v\ddot{s}_{\overline{n}|}$, (iii) $\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^n \ddot{s}_{\overline{n}|}$, (i) $a_{\overline{n}|} = v^n s_{\overline{n}|}$.

証明は容易なので演習問題とするが、1 年受け取るのが遅れると v 倍されるからと理解できると望ましい。

- **年 k 回払いの確定年金**

$\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n}|}$ で n 年契約、期始払い、年金年額 1、年 k 回払いの確定年金の現価を、
$\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n}|}$ で n 年契約、期始払い、年金年額 1、年 k 回払いの確定年金の終価を表す。

ここで、「年金年額 1、年 k 回払い」なので 1 回あたり $1/k$ 支払われることに注意すると下図のようになる。



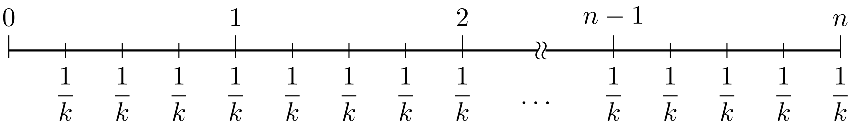
上の図から、$\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n}|}, \ddot{s}^{(k)}_{\overline{n}|}$ は以下のように表されることがわかる。

$$\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{k}\sum_{t=0}^{kn-1} v^{t/k}, \qquad \ddot{s}^{(k)}_{\overline{n}|} = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{kn}(1+i)^{t/k}.$$

期末払いの場合は

$a^{(k)}_{\overline{n}|}$ で n 年契約、期末払い、年金年額 1、年 k 回払いの確定年金の現価を、
$s^{(k)}_{\overline{n}|}$ で n 年契約、期末払い、年金年額 1、年 k 回払いの確定年金の終価を表す。

図で表すと



上の図から、以下のように表される。

$$a_{\overline{n}|}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{kn} v^{t/k}, \qquad s_{\overline{n}|}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{t=0}^{kn-1}(1+i)^{t/k}.$$

命題 2.2 次が成り立つ ($cf.$ (2.1)–(2.4))。

(i) $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = \dfrac{1-v^n}{d^{(k)}}$, (ii) $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)} = \dfrac{(1+i)^n-1}{d^{(k)}}$, (iii) $a_{\overline{n}|}^{(k)} = \dfrac{1-v^n}{i^{(k)}}$, (iv) $s_{\overline{n}|}^{(k)} = \dfrac{(1+i)^n-1}{i^{(k)}}$.

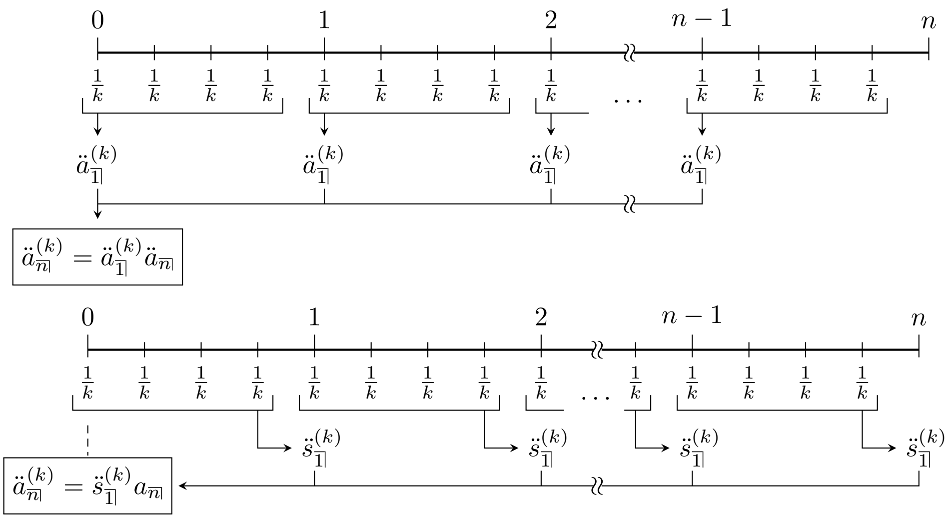
証明: (i) 定義式より (1.2) に注意して、

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = \frac{1}{k}\cdot\frac{1-(v^{1/k})^{nk}}{1-v^{1/k}} = \frac{1-v^n}{k\{1-(1-d)^{1/k}\}} = \frac{1-v^n}{d^{(k)}}.$$

(ii) は同様に、(iii), (iv) は (1.1) に注意して同様に示せる。 □

命題 2.3 (i) $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(k)}\ddot{a}_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(k)}a_{\overline{n}|}$, (ii) $\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(k)}\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(k)}s_{\overline{n}|}$,
(iii) $a_{\overline{n}|}^{(k)} = a_{\overline{1}|}^{(k)}\ddot{a}_{\overline{n}|} = s_{\overline{1}|}^{(k)}a_{\overline{n}|}$, (iv) $s_{\overline{n}|}^{(k)} = a_{\overline{1}|}^{(k)}\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{1}|}^{(k)}s_{\overline{n}|}$.

証明: (i) 各保険年度ごとに期始にまとめ、それをもとに計算した式が $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{a}_{\overline{1}|}^{(k)}\ddot{a}_{\overline{n}|}$, 年度ごとに期末にまとめ、それから計算した式が $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = \ddot{s}_{\overline{1}|}^{(k)}a_{\overline{n}|}$ となる。図で表すと以下のようになる。



(ii)–(iv) についても同様に解釈できる。各自試みられたい。 □

- **連続払いの確定年金**

連続払いの確定年金の現価は $\bar{a}_{\overline{n}|} = \displaystyle\int_0^n v^t\,dt = \frac{1-v^n}{\delta}$ で、終価は $\bar{s}_{\overline{n}|} = \displaystyle\int_0^n (1+i)^t\,dt = \frac{(1+i)^n-1}{\delta}$ で定義される。次に注意する。

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{k\to\infty}\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(k)} = \lim_{k\to\infty}a_{\overline{n}|}^{(k)}, \qquad \bar{s}_{\overline{n}|} = \lim_{k\to\infty}\ddot{s}_{\overline{n}|}^{(k)} = \lim_{k\to\infty}s_{\overline{n}|}^{(k)}.$$

これは区分求積法を通して証明できる。

その他、以下のような記号も用いる。(二見氏の教科書を確認のこと。)

$${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m\ddot{a}_{\overline{n}|}, \qquad {}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{n}|}, \qquad \text{(据え置き確定年金の現価)} \tag{2.5}$$

$$\ddot{a}_\infty = 1 + v + \cdots + v^n + \cdots = \sum_{t=0}^{\infty} v^t = \frac{1}{d} \qquad \text{(期始払い永久確定年金の現価)} \tag{2.6}$$

$$a_\infty = v + v^2 + \cdots + v^n + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} v^t = \frac{1}{i} \qquad \text{(期末払い永久確定年金の現価)} \tag{2.7}$$

$$(I\ddot{a})_{\overline{n}|} = 1 + 2v + \cdots + nv^{n-1} = \frac{1-(n+1)v^n + nv^{n+1}}{d^2} \qquad \text{(期始払い累加確定年金の現価)} \tag{2.8}$$

$$(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + \cdots + nv^n = v(I\ddot{a})_{\overline{n}|} \qquad \text{(期末払い累加確定年金の現価)} \tag{2.9}$$

$$(I\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_0^n (\lfloor t \rfloor + 1)v^t\,dt = \sum_{k=1}^{n} k\int_{k-1}^{k} v^t\,dt = \frac{d}{\delta}(I\ddot{a})_{\overline{n}|} \qquad \text{(連続払い累加確定年金の現価)} \tag{2.10}$$

($\lfloor t \rfloor$ は t の整数部分、すなわち t 以下の最大の整数を表す。)

$$(\bar{I}\bar{a})_{\overline{n}|} = \int_0^n tv^t\,dt = \frac{1}{\delta^2} - \left(\frac{n}{\delta} + \frac{1}{\delta^2}\right)v^n \qquad \text{(連続払い累加確定年金の現価)} \tag{2.11}$$

問題 2.1 上で定義した (2.6), (2.7), (2.8), (2.10), (2.11) の最後の等号、例えば (2.6) では $\displaystyle\sum_{t=0}^{\infty} v^t = \frac{1}{d}$ をそれぞれの式について証明せよ。

3 生命確率

生命表 時点 0 で 0 歳の人の人数 $l_0 = 100,00$ 人で始まった閉集団 (新規加入のない集団) の x 年後の生存者数を l_x で表し、$x = 0, 1, 2, \cdots, \omega$ を表にしたものを生命表という。ここで ω は集団の寿命で $l_\omega = 0$ となる。生保数理では l_x は x の微分可能な ($[0, \omega)$ 上では狭義) 単調減少で、$x \geq \omega$ では $l_x = 0$ となる関数と考える。

$d_x = l_x - l_{x+1}$ で x 歳で死亡する人の数を表す。ここで、

$$l_x = d_x + d_{x+1} + \cdots + d_{\omega-1} \tag{3.1}$$

となることに注意する。これは人はいつか死亡することに対応する ($cf.$ 命題 3.1 (4))。

保険加入時は上記とは異なる生命表を用いることもある。それを**選択表**といい、x 歳で加入する場合 $l_{[x]} \to l_{[x]+1} \to l_{[x]+2} \to l_{x+3} \to l_{x+4} \to \cdots$ と減少していくと考える。詳しくは二見 [F], 上 を参照のこと。

- **生存確率, 死亡確率**

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad x \text{ 歳の人が 1 年後生存している確率}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \qquad x \text{ 歳の人が 1 年以内に死亡する確率}$$

$${}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \qquad x \text{ 歳の人が } t \text{ 年後まで生存している確率 } ({}_1p_x = p_x)$$

$${}_tq_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} \qquad x \text{ 歳の人が } t \text{ 年以内に死亡する確率 } ({}_1q_x = q_x)$$

$${}_{t|}q_x = \frac{d_{x+t}}{l_x} \qquad x \text{ 歳の人が } x+t \text{ 歳と } x+t+1 \text{ 歳の間に死亡する確率 } ({}_{0|}q_x = q_x)$$

p_x, ${}_tp_x$ を**生存確率**, q_x, ${}_tq_x$ を**死亡確率**, ${}_{t|}q_x$ を**据え置き死亡確率**という。

命題 3.1 次が成立する。

(1) ${}_tp_x + {}_tq_x = 1$, 特に、$p_x + q_x = 1$. (2) ${}_{t_1+t_2}p_x = {}_{t_1}p_x \cdot {}_{t_2}p_{x+t_1}$.

(3) ${}_{t|}q_x = {}_tp_x - {}_{t+1}p_x = {}_{t+1}q_x - {}_tq_x$. (4) ${}_tq_x = q_x + {}_{1|}q_x + {}_{2|}q_x + \cdots + {}_{t-1|}q_x$, $t \in \mathbf{N}$.

この命題の証明は省略する。(2) は「x 歳の人が $t_1 + t_2$ 年後生存している確率は、x 歳の人が t_1 年後生存し $x + t_1$ 歳になりさらに t_2 年後生存している確率に等しい」、(4) は「t 年以内に死亡する確率は、第 1 年度か

ら第 t 年度のいずれかに死亡する確率に等しい」と理解できるとよりよい ($cf.$ (3.1))。ここで、第 k 年度は $k-1$ 年後からの 1 年間を意味する。

• **死力**を $\mu_x = -\dfrac{1}{l_x}\dfrac{d\,l_x}{dx} = -\dfrac{d}{dx}(\log l_x)$ で定義する。l_x は狭義単調減少なので $\mu_x > 0$ $(0 \le x < \omega)$ となる。

定理 3.2 ${}_tp_x = \exp\Bigl(-\displaystyle\int_0^t \mu_{x+s}\,ds\Bigr)$.

証明: $-\displaystyle\int_0^t \mu_{x+s}\,ds = \int_0^t \frac{d}{ds}(\log l_{x+s})\,ds = \Bigl[\log l_{x+s}\Bigr]_{s=0}^t = \log\frac{l_{x+t}}{l_x} = \log {}_tp_x.$ □

例題 3.1 死力が $\mu_x = \dfrac{1}{\omega - x}$ $(0 \le x < \omega)$ のとき、${}_tp_x$ と ${}_tq_x$ を求めよ。また、40 歳の人が 55 歳と 60 歳の間に死亡する確率 ${}_{15|5}q_{40}$ $(\omega > 60)$ を求めよ。(${}_{m|t}q_x = {}_mp_x \cdot {}_tq_{x+m}$ と定める。${}_{m|1}q_x = {}_{m|}q_x$ である。)

解: $-\displaystyle\int_0^t \mu_{x+s}\,ds = -\int_0^t \frac{1}{\omega-(x+s)}\,ds = \Bigl[\log\{\omega-(x+s)\}\Bigr]_0^t = \log\frac{\omega-(x+t)}{\omega-x}.$

よって、${}_tp_x = \exp\Bigl\{-\displaystyle\int_0^t \mu_{x+s}\,ds\Bigr\} = \frac{\omega-(x+t)}{\omega-x}$, ${}_tq_x = 1 - {}_tp_x = 1 - \dfrac{\omega-(x+t)}{\omega-x} = \dfrac{t}{\omega-x}.$

これより、${}_{15|5}q_{40} = {}_{15}p_{40}\cdot{}_5q_{55} = \dfrac{\omega-55}{\omega-40}\cdot\dfrac{5}{\omega-55} = \dfrac{5}{\omega-40}.$ □

定理 3.3 (1) $\dfrac{d}{dt}{}_tp_x = -{}_tp_x\mu_{x+t}$, (2) $\dfrac{d}{dx}{}_tp_x = {}_tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})$.

証明: (1) $\dfrac{d}{dt}{}_tp_x = \dfrac{l'_{x+t}}{l_x} = \dfrac{l_{x+t}}{l_x}\cdot\dfrac{l'_{x+t}}{l_{x+t}} = -{}_tp_x\mu_{x+t}.$

(2) $\dfrac{d}{dx}{}_tp_x = \dfrac{d}{dx}\Bigl(\dfrac{l_{x+t}}{l_x}\Bigr) = \dfrac{l'_{x+t}l_x - l_{x+t}l'_x}{{l_x}^2} = \dfrac{l_{x+t}}{l_x}\cdot\dfrac{l'_{x+t}}{l_{x+t}} - \dfrac{l_{x+t}}{l_x}\dfrac{l'_x}{l_x} = {}_tp_x(-\mu_{x+t}+\mu_x).$ □

系 3.4 Λ_x で x 歳の人の余命を表す確率変数とすると、$P(\Lambda_x > t) = {}_tp_x$ となる。これと、定理 3.3 (1) より Λ_x の確率密度関数が $f_{\Lambda_x}(t) = {}_tp_x\mu_{x+t}$ $(0 \le t < \omega - x)$, $f_{\Lambda_x}(t) = 0$ $(t \ge \omega - x)$ となる。

問題 3.1 次を示せ。(1) ${}_tq_x = \displaystyle\int_0^t {}_up_x\mu_{x+u}\,du$, (2) ${}_{t|}q_x = \displaystyle\int_t^{t+1} {}_up_x\mu_{x+u}\,du.$

例えば、${}_tq_x = \displaystyle\int_0^t {}_up_x\mu_{x+u}\,du$ は x 歳の人が $0 < u \le t$ なる u 年生存し $x+u$ 歳で (死力がかかり) 死亡したと覚えることもできる。

• x 歳の**平均余命**を $\mathring{e}_x = \displaystyle\int_0^{\omega-x} t\,{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\,dt$ で定義する。ここで、一般に非負値確率変数 X に対し

$$E[X] = E[\int_0^\infty 1_{[0,X]}(t)\,dt] = \int_0^\infty E[1_{(t,\infty)}(X)]\,dt = \int_0^\infty P(X>t)\,dt$$

および $t \ge \omega - x$ に対して ${}_tp_x = 0$ に注意する。

• x 歳の**略算平均余命**を $e_x = \displaystyle\sum_{t=1}^{\omega-x} t\,{}_{t|}q_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} {}_tp_x$ で定義する。ここで、$K_x = \lfloor\Lambda_x\rfloor$ とすると、

$$E[K_x] = \sum_{t=1}^\infty tP(K_x = t) = \sum_{t=1}^\infty P(K_x \ge t)$$

および $P(K_x = t) = {}_{t|}q_x$ に注意する。この証明は演習問題とする。

その他、以下のような記号も用いる。

$${}_n\mathring{e}_x = \int_0^n {}_tp_x\,dt, \qquad {}_ne_x = \sum_{t=1}^n {}_tp_x, \qquad {}_{m|}\mathring{e}_x = {}_mp_x\mathring{e}_{x+m}, \qquad {}_{m|}e_x = {}_mp_xe_{x+m}.$$

問題 3.2 Λ_x, K_x を上記のそれとするとき、${}_n\mathring{e}_x = E[\min\{\Lambda_x, n\}]$, ${}_n e_x = E[\min\{K_x, n\}]$ を示せ。

例 3.2 (余命の確率分布のモデル)
(1) ド・モアブルの法則 (1725 年) $\mu_x = \dfrac{1}{\omega - x}$, $0 \le x < \omega$. ($cf.$ 例題 3.1.)
(2) ゴムパーツの法則 (1825 年) $\mu_x = Bc^x$, ($B > 0$, $c > 0$ は定数).
　　このとき ${}_tp_x = g^{c^x(c^t-1)}$, ただし、$q = e^{-B/\log c}$.
(3) メーカムの法則 (1860 年) $\mu_x = A + Bc^x$, ($A > 0$, $B > 0$, $c > 0$ は定数).
　　このとき ${}_tp_x = e^{-At}g^{c^x(c^t-1)}$, ただし、$g = e^{-B/\log c}$.

問題 3.3 上で定義したゴムパーツの法則, メーカムの法則について ${}_tp_x$ が上記の式となることを証明せよ。

4　一時払い純保険料

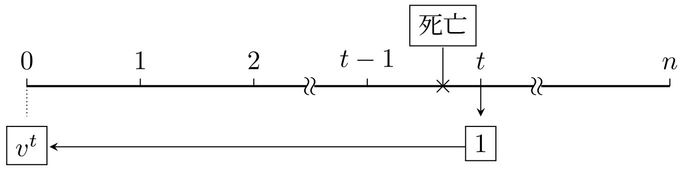
生命保険契約の価格の計算は、前章で導入した生命表の示す予定死亡率と、利息の計算に用いる予定利率を用いて行う。これに、保険制度の運用に必要な経費をあらかじめ考えておいて、これを保険料に組み入れる。これを予定事業費率とよぶ。これらを総称して計算基礎という。

3 つの計算基礎のうち予定事業費率を除いた、予定死亡率と予定利率から計算した保険料を純保険料といい、それに予定事業費率を加味して計算した保険料を営業保険料という。

①　定期保険

$A^{1}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約、死亡保険金 1、死亡時期末払いの定期保険の純保険料を、
$\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約、死亡保険金 1、死亡時即時払いの定期保険の純保険料を表す。

● $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ について
x 歳の人が第 t 保険年度に死亡する、すなわち、$t-1$ 年から t 年までの間で死亡する確率は ${}_{t-1|}q_x$ であるから、純保険料は



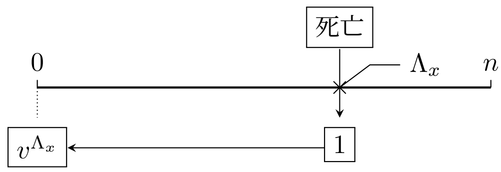
$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q_x \tag{4.1}$$

となる。略算平均寿命で用いた確率変数 K_x: $P(K_x = t) = {}_{t|}q_x$, $t = 0, 1, \ldots,$ を用いると、保険会社の払う保険金の現価 X が

$$X = \begin{cases} v^{K_x+1}, & K_x = 0, 1, \cdots, n-1, \\ 0, & K_x \ge n \end{cases} \qquad \text{となることを用いて、} \quad A^{1}_{x:\overline{n}|} = E[X] = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q_x$$

とも表せることに注意する。

● $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ について
x 歳の人の余命 Λ_x を用いると、保険会社の払う保険金の現価 Y は $Y = \begin{cases} v^{\Lambda_x}, & 0 < \Lambda_x \le n, \\ 0, & \Lambda_x > n, \end{cases}$ と表されるので



$$\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = E[Y] = E[v^{\Lambda_x}, 0 < \Lambda_x \le n] = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t}\, dt \tag{4.2}$$

となる。ここで、Λ_x の確率密度関数は $f_{\Lambda_x}(t) = {}_tp_x \mu_{x+t}$, $t \ge 0$, であった。

$A^{1\,(k)}_{x:\overline{n}|}$ で各保険年度を k 個の小期間に分割し、契約者の死亡に際しそれが起こった小期間の期末に死亡保険金 1 を支払う n 年契約の定期保険を表す:

$$A^{1\,(k)}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{nk} v^{t/k} P\left(\frac{t-1}{k} < \Lambda_x \le \frac{t}{k}\right) = \sum_{t=1}^{nk} v^{t/k}\left({}_{\frac{t-1}{k}}p_x - {}_{\frac{t}{k}}p_x\right). \tag{4.3}$$

② 生存保険

$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ で x 歳加入、n 年契約、生存保険金 1 の生存保険の純保険料を表す。これは n 年後の生存を条件に 1 支払う保険で以下のように表される。

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n\, {}_np_x. \tag{4.4}$$

ここで、定期保険 $A^{1}_{x:\overline{n}|}$ の x の上の 1 は n 年経過より前に x 歳の人の死亡が起こることを、生存保険 $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$ の $\overline{n}|$ の上の 1 は x 歳の人が死亡するより前に n 年経過することを表すと理解するとよい。

③ 養老保険

$A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$

で x 歳加入、n 年契約、死亡保険金 1 死亡時期末払い、生存保険金 1 の養老保険の純保険料を、

$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$

で x 歳加入、n 年契約、死亡保険金 1 死亡時即時払い、生存保険金 1 の養老保険の純保険料を表す。

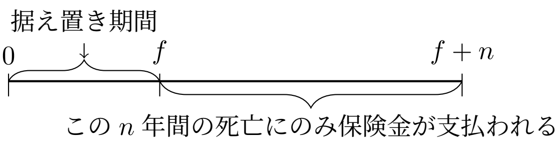
④ 終身保険

A_x で x 歳加入、終身契約、死亡保険金 1 死亡時期末払の終身保険の純保険料を、
$\overline{A}_x$ で x 歳加入、終身契約、死亡保険金 1 死亡時即時払の終身保険の純保険料を表す。

$$A_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\, {}_{t-1|}q_x, \qquad \overline{A}_x = \int_0^{\omega-x} v^t\, {}_tp_x \mu_{x+t}\, dt. \tag{4.5}$$

⑤ 据え置き保険

${}_{f|}A^{1}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、f 年据え置き、n 年終身契約、死亡保険金 1 期末払の据え置き定期保険の純保険料を表す。



このとき、保険金は f 年後から n 年間の死亡の際に支払われるので、

$${}_{f|}A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=f+1}^{f+n} v^t\, {}_{t-1|}q_x = v^f\, {}_fp_x \sum_{s=1}^{n} v^s\, {}_{s-1|}q_{x+f} = v^f\, {}_fp_x\, A^{1}_{x+f:\overline{n}|} \tag{4.6}$$

2 つ目の等号は $t = f + s$ とし、${}_{f+s-1|}q_x = \dfrac{d_{x+f+s-1}}{l_x} = \dfrac{l_{x+f}}{l_x} \cdot \dfrac{d_{x+f+s-1}}{l_{x+f}} = {}_fp_x \cdot {}_{s-1|}q_{x+f}$ となることを用いた。全く同様に、即時払いの定期保険や養老保険、終身保険の場合も据え置き保険が考えられる。

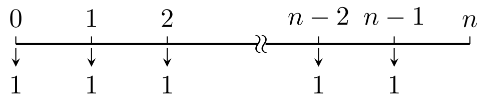
$$ {}_{f|}\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} = v^f\, {}_fp_x\, \overline{A}^{1}_{x+f:\overline{n}|}, \qquad {}_{f|}A_{x:\overline{n}|} = v^f\, {}_fp_x\, A_{x+f:\overline{n}|}, \qquad {}_{f|}\overline{A}_{x:\overline{n}|} = v^f\, {}_fp_x\, \overline{A}_{x+f:\overline{n}|},$$
$$ {}_{f|}A_x = v^f\, {}_fp_x\, A_{x+f}, \qquad {}_{f|}\overline{A}_x = v^f\, {}_fp_x\, \overline{A}_{x+f}.$$

生存保険の一時払い純保険料 $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n\, {}_np_x$ を用いて、据え置き保険は ${}_{f|}A^{1}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{f}|}}\, A^{1}_{x+f:\overline{n}|}$ などとも表される。

5　生命年金の現価

$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約、年金年額 1 期始払いの生命年金の現価を、
$a_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約、年金年額 1 期末払いの生命年金の現価を表す。

- $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ について
生存を条件に各保険年度期始に 1 支払うのでその現価は
次のように表わされる。



$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x + v^2{}_2p_x + \cdots + v^{n-1}{}_{n-1}p_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t{}_tp_x. \tag{5.1}$$

命題 5.1 次が成立する。

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} \ddot{a}_{\overline{t}|}\,{}_{t-1|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x. \tag{5.2}$$

　これは、生命年金は第 t 保険年度に死亡した場合に保険会社が支払う年金現価は $\ddot{a}_{\overline{t}|}$, n 年後生存した場合は $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ となるためと説明できるが、数式で証明しておこう。

証明: $\ddot{a}_{\overline{t}|} = \sum\limits_{l=0}^{t-1} v^l = \sum\limits_{k=1}^{t} v^{k-1}$ $(k = l+1$ とした$)$ に注意して、

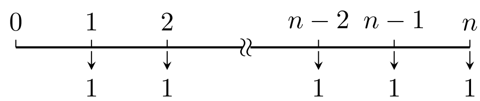
$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{n} \ddot{a}_{\overline{t}|}\,{}_{t-1|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{t} v^{k-1}{}_{t-1|}q_x + \sum_{k=1}^{n} v^{k-1}{}_np_x = \sum_{k=1}^{n}\sum_{t=k}^{n} v^{k-1}{}_{t-1|}q_x + \sum_{k=1}^{n} v^{k-1}{}_np_x \\ &= \sum_{k=1}^{n} v^{k-1}\left(\sum_{t=k}^{n} {}_{t-1|}q_x + {}_np_x\right) = \sum_{k=1}^{n} v^{k-1}{}_{k-1}p_x = \sum_{l=0}^{n-1} v^l{}_lp_x = \ddot{a}_{x:\overline{n}|}.\end{aligned}$$

ここで、第 k 年度から n 年度のいずれかに死亡する確率と n 年後も生存している確率の和が、k 年後も生存している確率に等しいこと、数式で表すと、

$$\sum_{t=k}^{n} {}_{t-1|}q_x + {}_np_x = ({}_{k-1}p_x - {}_kp_x) + ({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) + \cdots + ({}_{n-1}p_x - {}_np_x) + {}_np_x = {}_{k-1}p_x$$

を用いた。　□

- $a_{x:\overline{n}|}$ について
生存を条件に各保険年度期末に 1 支払うのでその現価は
次のように表わされる。



$$a_{x:\overline{n}|} = vp_x + v^2{}_2p_x + \cdots + v^{n-1}{}_{n-1}p_x + v^n{}_np_x = \sum_{t=1}^{n} v^t{}_tp_x. \tag{5.3}$$

命題 5.1 と同様に、生命年金は第 t 保険年度に死亡した場合に保険会社が支払う年金現価は $a_{\overline{t-1}|}$, n 年後生存した場合は $a_{\overline{n}|}$ となることから次を得る。

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=2}^{n} a_{\overline{t-1}|}\,{}_{t-1|}q_x + a_{\overline{n}|}\,{}_np_x. \tag{5.4}$$

ここで、第 1 年度に死亡した人は年金が受け取れないことに注意する。証明は (5.2) と同様である。

- 年 k 回払いの場合は、年金年額 1 より 1 回あたり $1/k$ に注意して、以下のように定義する。

$\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{t=0}^{nk-1} v^{\frac{t}{k}}\,{}_{\frac{t}{k}}p_x$ で x 歳加入、n 年契約、年金年額 1、年 k 回期始払いの生命年金の現価を、

$$a_{x:\overline{n}|}^{(k)} = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{nk} v^{\frac{t}{k}}\,{}_{\frac{t}{k}}p_x$$ で x 歳加入、n 年契約、年金年額 1、年 k 回期末払いの生命年金の現価を表す。

ここで、$k \to \infty$ とすれば連続払いの生命年金現価を得る。

$$\overline{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt.$$

(5.2), (5.4) と同様に次が成立する。

$$\overline{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \overline{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt + \overline{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x \tag{5.5}$$

証明は (5.2) と同様に重積分の積分順序の交換を用いてもできるが、次のように部分積分を用いてもできる。

$$\begin{aligned}\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt &= \int_0^n \frac{d}{dt}\left(\int_0^t v^s\,ds\right){}_tp_x\,dt = \Big[\overline{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\Big]_0^n - \int_0^n \overline{a}_{\overline{t}|}\left(-{}_tp_x\mu_{x+t}\right)dt \\ &= \overline{a}_{\overline{n}|}\,{}_np_x + \int_0^n \overline{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt. \qquad \square\end{aligned}$$

● 終身生命年金

$$\ddot{a}_x = \sum_{t=0}^{\omega-x} v^t\,{}_tp_x$$ で x 歳加入、終身契約、年金年額 1、期始払いの生命年金の現価を、

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x} v^t\,{}_tp_x$$ で x 歳加入、終身契約、年金年額 1、期末払いの生命年金の現価を表す。

連続払いの場合は $\overline{a}_x = \int_0^{\omega-x} v^t\,{}_tp_x\,dt$ と表す。

● 据え置き生命年金

${}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ で f 年据え置き期始払いの生命年金を表す。

このとき、生命年金は f 年後から n 年間支払われるので、

$${}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=f}^{f+n-1} v^t\,{}_tp_x = \sum_{s=0}^{n-1} v^{s+f}\,{}_{s+f}p_x = v^f\,{}_fp_x \sum_{s=0}^{n-1} v^s\,{}_sp_{x+f} = v^f\,{}_fp_x\,\ddot{a}_{x+f:\overline{n}|} = A_{x:\overline{f}|}^{\;\;1}\,\ddot{a}_{x+f:\overline{n}|}. \tag{5.6}$$

ここで $s = t - f$ とし命題 3.1 (2) を用いた。また、$A_{x:\overline{f}|}^{\;\;1}$ は生存保険の一時払い純保険料であった。全く同様に、期末払いや連続払いの生命年金についても据え置き生命年金が考えられる。

$$\begin{aligned} & & {}_{f|}a_{x:\overline{n}|} &= v^f\,{}_fp_x\,a_{x+f:\overline{n}|}, & {}_{f|}\overline{a}_{x:\overline{n}|} &= v^f\,{}_fp_x\,\overline{a}_{x+f:\overline{n}|}, \\ {}_{f|}\ddot{a}_x &= v^f\,{}_fp_x\,\ddot{a}_{x+f}, & {}_{f|}a_x &= v^f\,{}_fp_x\,a_{x+f}, & {}_{f|}\overline{a}_x &= v^f\,{}_fp_x\,\overline{a}_{x+f}.\end{aligned}$$

命題 5.2 次が成立する。

(1) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + a_{x:\overline{n-1}|}$, $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x\,\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$.

(2) $\ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{m}|} + v^m\,{}_mp_x\,\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{m}|} + {}_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$.

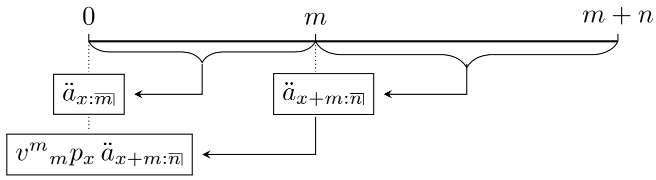
(3) $A^1_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_xA^{\;\;1}_{x+1:\overline{n-1}|}$.

(4) $A^1_{x:\overline{m+n}|} = A^1_{x:\overline{m}|} + v^m\,{}_mp_xA^{\;\;1}_{x+m:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{m}|} + {}_{m|}A^1_{x:\overline{n}|}$.

(5) $A_{x:\overline{m+n}|} = A^1_{x:\overline{m}|} + v^m\,{}_mp_xA_{x+m:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{m}|} + {}_{m|}A_{x:\overline{n}|}$.

証明: (1) 最初の式は明らか。第 2 式は (2) が示されれば $\ddot{a}_{x:\overline{1}|} = 1$ により従う。(3) も同様に (4) で $A^1_{x:\overline{1}|} = vq_x$ に注意すればよい。(5) は (4) の両辺に $A_{x:\overline{m+n}|}^{\;\;\;\;\;\;1}$ を加えればよい。

(2) については右図のように、m 年と n 年に分ける。前者の現価は $\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$ であり、後者について m 年経過時点で $\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$ でこの現価は $v^m{}_mp_x\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$ となる。



よって、その和と $\ddot{a}_{x:\overline{m+n}|}$ は一致する。

(4) も (2) と同様に m 年と n 年に分ければできる。数式による証明は演習問題とする。 $\square$

6 年払い純保険料

保険料を何年かにわたって年払いする場合を考える。毎回の保険料の額を同じくするとき平準年払いという。

x 歳加入の一時払い純保険料が A となる保険の保険料を m 年にわたって払い込むときの年払い保険料 P を求める。そのために、予定利率と予定死亡率が予定どおりとしたとき、保険会社の収入現価と支出現価が一致するという、収支相等の原則を用いる。

	0	1	2	$\cdots$	$m-1$	m
収入	Pl_x	Pl_{x+1}	Pl_{x+2}		Pl_{x+m-1}	0
支出	Al_x	0	0		0	0

よって、(支出現価) $= Al_x$ で

$$\begin{aligned}(\text{収入現価}) &= Pl_x + vPl_{x+1} + v^2Pl_{x+2} + \cdots + v^{m-1}Pl_{x+m-1}\\ &= Pl_x(1 + vp_x + v^2{}_2p_x + \cdots + v^{m-1}{}_{m-1}p_x)\\ &= Pl_x\ddot{a}_{x:\overline{m}|}.\end{aligned}$$

よって、(収入現価) $=$ (支出現価) より $P = \dfrac{A}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$.

これより、x 歳加入、n 年契約、死亡保険金 1 死亡時期末払いの定期保険の m 年平準年払純保険料 ${}_mP^{\ 1}_{x:\overline{n}|}$ は

$${}_mP^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{\ 1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}},\quad \text{特に全期払い込み } (m=n) \text{ のとき、} P^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{\ 1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$$

と表す。ただし $m \le n$ である。同様に以下の記号を用いる。

$$\begin{aligned}&{}_mP_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}},\quad {}_mP_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}},\quad {}_m\overline{P}^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}},\quad {}_m\overline{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}},\quad {}_mP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}},\quad {}_m\overline{P}_x = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}},\\ &P_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}},\quad P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}},\quad \overline{P}^{\ 1}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}},\quad \overline{P}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}},\quad P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x},\quad \overline{P}_x = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x}.\end{aligned}$$

年を k 回に分ける場合や連続払いの場合は同様の記号も用いる。

$$P^{\ 1\,(k)}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{\ 1\,(k)}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}},\quad P^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{(k)}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}},\quad \overline{P}^{\ 1\,(k)}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}},\quad \overline{P}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}},\quad \overline{P}^{\ 1\,(\infty)}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}^{\ 1}_{x:\overline{n}|}}{\overline{a}_{x:\overline{n}|}},\quad \overline{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\overline{a}_{x:\overline{n}|}}.$$

ここで $\lim_{k\to\infty} P^{\ 1\,(k)}_{x:\overline{n}|} = \lim_{k\to\infty} \overline{P}^{\ 1\,(k)}_{x:\overline{n}|} = \overline{P}^{\ 1\,(\infty)}_{x:\overline{n}|}$, $\lim_{k\to\infty} P^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \lim_{k\to\infty} \overline{P}^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \overline{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|}$ となっていることに注意する。

定理 6.1 (1) $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\,\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, $\quad P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d.$

(2) $A^{(k)}_{x:\overline{n}|} = 1 - d^{(k)}\,\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}$, $\quad P^{(k)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}^{(k)}_{x:\overline{n}|}} - d^{(k)}.$ $\qquad$ (3) $\overline{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - \delta\,\overline{a}_{x:\overline{n}|}$, $\quad \overline{P}^{(\infty)}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\overline{a}_{x:\overline{n}|}} - \delta.$

証明: (1) $\ddot{a}_{\overline{t}|} = \dfrac{1-v^t}{d}$ より $v^t = 1 - d\ddot{a}_{\overline{t}|}$. よって、

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t{}_{t-1|}q_x + v^n{}_np_x = \sum_{t=1}^{n}(1 - d\ddot{a}_{\overline{t}|})_{t-1|}q_x + (1 - d\ddot{a}_{\overline{n}|})_np_x$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_x + {}_n p_x - d\left\{\sum_{t=1}^{n} \ddot{a}_{\overline{t}|}\,{}_{t-1|}q_x + \ddot{a}_{\overline{n}|}\,{}_n p_x\right\} \\
&= 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}.
\end{aligned}
$$

ここで、(5.2) を用いた。後者は前者の式の両辺を $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ で割ればよい。
(2) は命題 2.2 (1) を用いて、(3) は $\overline{a}_{\overline{t}|} = \dfrac{1-v^t}{\delta}$ を用いて同様に証明できる。(3) は部分積分を用いて

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n e^{-\delta t}\frac{d}{dt}(-{}_t p_x)\,dt + v^n{}_n p_x = \Big[e^{-\delta t}(-{}_t p_x)\Big]_0^n - \int_0^n(-\delta)e^{-\delta t}(-{}_t p_x)\,dt + v^n{}_n p_x \\
&= -e^{-\delta n}{}_n p_x + 1 - \delta\overline{a}_{x:\overline{n}|} + v^n{}_n p_x = 1 - \delta\,\overline{a}_{x:\overline{n}|}
\end{aligned}
$$

とも証明できる。　　□

定理 6.1 と同様に終身保険や終身年金ついても以下が成立する。

$$
A_x = 1 - d\,\ddot{a}_x, \qquad P_x = \frac{1}{\ddot{a}_x} - d, \qquad \overline{A}_x = 1 - \delta\,\overline{a}_x, \qquad \overline{P}_x^{(\infty)} = \frac{1}{\overline{a}_x} - \delta.
$$

問題 6.1 (1) A_x を P_x と d を用いて表せ。
(2) $A = A_{x+1:\overline{n-1}|}$, $a = a_{x:\overline{n-1}|}$, $p = p_x$ とするとき、i を A, a, p を用いて表せ。
(3) $P = P_{x:\overline{n}|}$, $a = a_{x+1:\overline{n-1}|}$ のとき、q_x を P, a, v を用いて表せ。

7　計算基数

様々な保険料や生命年金を計算するために必要となる計算基数を導入する。その数値表は例えば、[F], 上, pp.226 – にある。

$$
\begin{aligned}
&D_x = v^x l_x, && N_x = D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{\omega-1}, && S_x = N_x + N_{x+1} + \cdots + N_{\omega-1}, \\
&C_x = v^{x+1} d_x, && M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{\omega-1}, && R_x = M_x + M_{x+1} + \cdots + M_{\omega-1}, \\
&\overline{C}_x = v^{x+\frac{1}{2}} d_x, && \overline{M}_x = \overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \cdots + \overline{C}_{\omega-1}, && \overline{R}_x = \overline{M}_x + \overline{M}_{x+1} + \cdots + \overline{M}_{\omega-1}.
\end{aligned}
$$

ここで、$x \geq \omega$ なら $D_x = 0$, $C_x = 0$, $\overline{C}_x = 0$, $\cdots$, に注意する。
以下、計算基数を用いて様々な保険料や生命年金を表そう。
(1)
$$
\begin{aligned}
A^{1}_{x:\overline{n}|} &= vq_x + v^2{}_{1|}q_x + \cdots + v^n{}_{n-1|}q_x = v\frac{d_x}{l_x} + v^2\frac{d_{x+1}}{l_x} + \cdots + v^n\frac{d_{x+n-1}}{l_x} \\
&= \frac{vd_x + v^2 d_{x+1} + \cdots + v^n d_{x+n-1}}{l_x} \qquad (\text{分母・分子に } v^x \text{ を掛けて}) \\
&= \frac{v^{x+1}d_x + v^{x+2}d_{x+1} + \cdots + v^{x+n}d_{x+n-1}}{v^x l_x} \\
&= \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{(C_x + \cdots + C_{\omega-1}) - (C_{x+n} + \cdots + C_{\omega-1})}{D_x} \\
&= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}
$$

$$
A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = v^n{}_n p_x = \frac{v^n l_{x+n}}{l_x} = \frac{v^{x+n}l_{x+n}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}.
$$

$$
A_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}.
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= 1 + vp_x + \cdots + v^{n-1}{}_{n-1}p_x = 1 + v\frac{l_{x+1}}{l_x} + \cdots + v^{n-1}\frac{l_{x+n-1}}{l_x} \\
&= \frac{l_x + vl_{x+1} + \cdots + v^{n-1}l_{x+n-1}}{l_x} = \frac{v^x l_x + v^{x+1}l_{x+1} + \cdots + v^{x+n-1}l_{x+n-1}}{v^x l_x} \\
&= \frac{D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{(D_x + \cdots + D_{\omega-1}) - (D_{x+n} + \cdots + D_{\omega-1})}{D_x}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

同様に $a_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$.

(3) (1), (2) より以下を得る。証明のない式の証明は演習問題とする。

$$ {}_{f|}A^{1}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{f}|}} A^{1}_{x+f:\overline{n}|} = \frac{D_{x+f}}{D_x}\frac{M_{x+f} - M_{x+f+n}}{D_{x+f}} = \frac{M_{x+f} - M_{x+f+n}}{D_x}, \quad {}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_{x+f} - N_{x+f+n}}{D_x}$$

$$ {}_{m}P^{1}_{x:\overline{n}|} = \frac{A^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}, \quad {}_{m}P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}, \quad {}_{m}P_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}},$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}, \qquad \ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}, \qquad P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}, \qquad \cdots.$$

(4) $\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|}$ については以下のように近似を用いる。

$$\begin{aligned}
\overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} \underbrace{v^t}_{\boxed{=v^{k-\frac{1}{2}}\text{ と近似する}}}\,{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt \\
&= \sum_{k=1}^{n} v^{k-\frac{1}{2}} \underbrace{\int_{k-1}^{k} {}_tp_x\mu_{x+t}\,dt}_{\boxed{= {}_{k-1|}q_x}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} v^{k-\frac{1}{2}}\frac{d_{x+k-1}}{l_x} = \frac{v^{\frac{1}{2}}d_x + v^{1+\frac{1}{2}}d_{x+1} + \cdots + v^{n-1+\frac{1}{2}}d_{x+n-1}}{l_x} \\
&= \frac{\overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \cdots + \overline{C}_{x+n-1}}{D_x} = \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}$$

また、$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$ となる。

命題 7.1 (1) $vD_x - D_{x+1} = C_x$, 特に、$vN_x - N_{x+1} = M_x$.
(2) $M_x = D_x - d\,N_x$, 特に、$R_x = N_x - d\,S_x$.

証明: (1) $l_x - l_{x+1} = d_x$ の両辺に v^{x+1} を掛ければよい。後者は x を $x, x+1, \ldots$ とした前者の式を考え、加えれば得られる。
(2) (1) の後者で $N_x - D_x = N_{x+1}$ に注意すると

$$M_x = vN_x - (N_x - D_x) = D_x - (1-v)N_x = D_x - d\,N_x.$$

後者は (1) の後者と同様に $x, x+1, \ldots$ とした前者の式を考え、両辺を加えれば得られる。 □

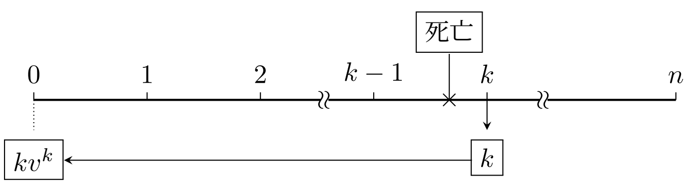
命題 7.1 を用いると定理 6.1 (1) を容易に示すことができる。実際、

$$\begin{aligned}
A_{x:\overline{n}|} &= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} = \frac{D_x - d\,N_x - (D_{x+n} - d\,N_{x+n}) + D_{x+n}}{D_x} \\
&= \frac{D_x}{D_x} - d\,\frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}. \qquad \square
\end{aligned} \tag{7.1}$$

8 保険金変動保険、変動年金

累加定期保険

$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約、第 k 年度の死亡保険金 k 死亡時期末払いの定期保険の一時払い純保険料を表す。



$$(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} kv^k\,{}_{k-1|}q_x = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}. \tag{8.1}$$

ここで、計算基数による表示は以下のように導出される。

$$
\begin{aligned}
(IA)^{\,1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=1}^{n} k\frac{v^k d_{x+k-1}}{l_x} = \frac{C_x + 2C_{x+1} + \cdots + nC_{x+n-1}}{D_x} \\
&= \frac{M_x + M_{x+1} + \cdots + M_{x+n-1} - nM_{x+n}}{D_x} = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}.
\end{aligned}
$$

ここで 2 行目の最初の等式は

$$
\begin{aligned}
C_x + 2C_{x+1} \cdots + nC_{x+n-1} &= C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} && (\text{この行の右辺} = M_x - M_{x+n}) \\
&\qquad + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} && (\text{この行の右辺} = M_{x+1} - M_{x+n}) \\
&\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots && \qquad \vdots \\
&\qquad\qquad\qquad + C_{x+n-1} && (\text{この行の右辺} = M_{x+n-1} - M_{x+n}) \\
&= M_x + M_{x+1} + \cdots + M_{x+n-1} - nM_{x+n}
\end{aligned}
$$

を用いた。

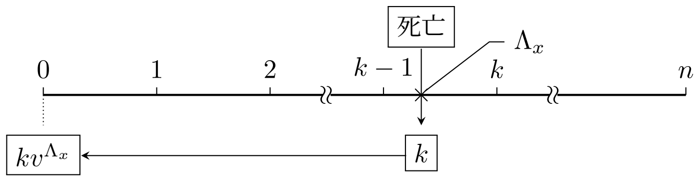
例題 8.1 (保険料返還付保険) x 歳加入、n 年契約の生存保険、生存保険金 1 で保険料は n 年平準年払いとし、保険料払込期間中の死亡については、既払込保険料を死亡年度末に返還する。この純保険料 P を求めよ。

解: 第 k 年度の死亡についてはそれまでに保険料を k 回支払っているので kP 返還され、n 年契約生存保険金 1 なので、

$$
P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} kPv^k{}_{k-1|}q_x + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = P(IA)^{\,1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}.
$$

$$
\text{故に}\quad P = \frac{A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (IA)^{\,1}_{x:\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n} - (R_x - R_{x+n} - nM_{x+n})}. \qquad \square
$$

即時払いの累加定期保険



$(I\overline{A})^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約、第 k 年度の死亡保険金 k を即時に支払う定期保険の一時払い純保険料を表す。

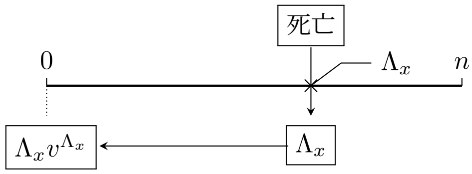
Λ_x で x 歳の人の余命を表すと、保険会社の払う保険金の現価 Y は

$$
Y = \begin{cases} kv^{\Lambda_x}, & k-1 < \Lambda_x \le k, \quad k = 1, \cdots, n, \\ 0, & \Lambda_x > n, \end{cases}
$$

と表される。Λ_x の確率密度関数は $f(t) = {}_tp_x\mu_{x+t}$ $(0 < t < \omega - x)$ であったから、

$$
(I\overline{A})^{\,1}_{x:\overline{n}|} = E[Y] = \sum_{k=1}^{n} E[kv^{\Lambda_x}, k-1 < \Lambda_x \le k] = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} kv^t{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt = \frac{\overline{R}_x - \overline{R}_{x+n} - n\overline{M}_{x+n}}{D_x}. \tag{8.2}
$$

となる。ここで、計算基数による表示は $\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ のときと同様に $\displaystyle\int_{k-1}^{k} v^t{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt = \frac{\overline{C}_{x+k-1}}{D_x}$ に注意し、(8.1) と同様に導出する。



$(\overline{I}\,\overline{A})^{\,1}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約で、$x+t$ 歳での死亡については死亡保険金 t を即時に支払う定期保険の一時払い純保険料を表す。

保険金の現価は $Y = \begin{cases} \Lambda_x v^{\Lambda_x}, & 0 < \Lambda_x \le n, \\ 0, & \Lambda_x > n \end{cases}$ と表されるので

$$
(\overline{I}\,\overline{A})^{\,1}_{x:\overline{n}|} = E[Y] = E[\Lambda_x v^{\Lambda_x}, 0 < \Lambda_x \le n] = \int_0^n tv^t{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt \tag{8.3}
$$

となる。

累減定期保険

$(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約で死亡保険金が第 1 年度は n, 第 2 年度は $n-1$, 第 n 年度は 1 となるの期末払累減定期保険の一時払い純保険料を表す。

$$\begin{aligned}(DA)^{1}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)v^{k}{}_{k-1|}q_x \\ &= \frac{nC_x+(n-1)C_{x+1}+\cdots+C_{x+n-1}}{D_x} = \frac{nM_x-(R_{x+1}-R_{n+x+1})}{D_x}. \end{aligned} \tag{8.4}$$

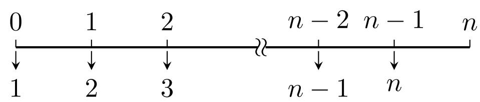
x 歳加入の累加の終身保険で n 年度以降死亡保険金が n であるものを $(I_{\overline{n}|}A)_x$, 累減の終身保険で n 年度以降死亡保険金が 1 であるものを $(D_{\overline{n}|}A)_x$ と表す。

$$(I_{\overline{n}|}A)_x = \sum_{k=1}^{n}kv^{k}{}_{k-1|}q_x + \sum_{k=n+1}^{\omega-x}nv^{k}{}_{k-1|}q_x = \frac{R_x-R_{x+n}}{D_x}. \tag{8.5}$$

$$(D_{\overline{n}|}A)_x = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)v^{k}{}_{k-1|}q_x + \sum_{k=n+1}^{\omega-x}v^{k}{}_{k-1|}q_x = \frac{nM_x-(R_{x+1}-R_{n+x})}{D_x}. \tag{8.6}$$

問題 8.1 $(DA)^{1}_{x:\overline{n}|}$, $(I_{\overline{n}|}A)_x$, $(D_{\overline{n}|}A)_x$ の計算基数による表示がそれぞれ (8.4), (8.5), (8.6) の右辺で表せることを示せ。

累加生命年金



$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約、第 k 年度の年金額 k の期始払累加生命年金の現価を表す。

$$(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n}kv^{k-1}{}_{k-1}p_x = \frac{S_x-S_{x+n}-nN_{x+n}}{D_x}. \tag{8.7}$$

ここで、計算基数 による表示は (8.1) と同様に以下のように導出される。

$$\begin{aligned}(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=1}^{n}k\frac{v^{k-1}l_{x+k-1}}{l_x} = \frac{D_x+2D_{x+1}+\cdots+nD_{x+n-1}}{D_x} \\ &= \frac{N_x+N_{x+1}+\cdots+N_{x+n-1}-nN_{x+n}}{D_x} = \frac{S_x-S_{x+n}-nN_{x+n}}{D_x}.\end{aligned}$$

期末払いのときは次のようになる。

$$(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n}kv^{k}{}_{k}p_x = \frac{S_{x+1}-S_{x+n+1}-nN_{x+n+1}}{D_x}. \tag{8.8}$$

連続払いのときは次の二つがある。

$$\begin{aligned}(I\bar{a})_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=1}^{n}k\int_{k-1}^{k}v^{t}{}_{t}p_x\,dt = \int_0^n \lfloor t+1\rfloor v^{t}{}_{t}p_x\,dt, \\ (\bar{I}\,\bar{a})_{x:\overline{n}|} &= \int_0^n tv^{t}{}_{t}p_x\,dt.\end{aligned}$$

累減生命年金

$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約で年金額が第 1 年度は n, 第 2 年度は $n-1$, 第 n 年度は 1 となる期始払累減生命年金の現価を表す。

$$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)v^{k-1}{}_{k-1}p_x$$

$$= \frac{nD_x + (n-1)D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{nN_x - (S_{x+1} - S_{x+n+1})}{D_x}. \tag{8.9}$$

x 歳加入の期始払累加の終身年金で n 年度以降年金額が n であるものを $(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x$ で、累減の終身年金で n 年度以降年金額が 1 であるものを $(D_{\overline{n}|}\ddot{a})_x$ と表す。

$$(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \sum_{k=1}^{n} kv^{k-1}{}_{k-1}p_x + \sum_{k=n+1}^{\omega-x} nv^{k-1}{}_{k-1}p_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x}, \tag{8.10}$$

$$(D_{\overline{n}|}\ddot{a})_x = \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)v^{k-1}{}_{k-1}p_x + \sum_{k=n+1}^{\omega-x} v^k{}_{k-1}p_x = \frac{nN_x - (S_{x+1} - S_{x+n})}{D_x}. \tag{8.11}$$

命題 8.1 次が成立する。

(1) $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n}(I\ddot{a})_{\overline{t}|}\,{}_{t-1|}q_x + (I\ddot{a})_{\overline{n}|}\,{}_np_x$, $(Ia)_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=2}^{n}(Ia)_{\overline{t-1}|}\,{}_{t-1|}q_x + (Ia)_{\overline{n}|}\,{}_np_x$.

(2) $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + nA_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} - d(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|}$.

(3) $(I\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + vp_x(I\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1}|}$.

(4) $(I\ddot{a})_{x:\overline{m+n}|} = (I\ddot{a})_{x:\overline{m}|} + v^m{}_mp_x\{m\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|} + (I\ddot{a})_{x+m:\overline{n}|}\}$.

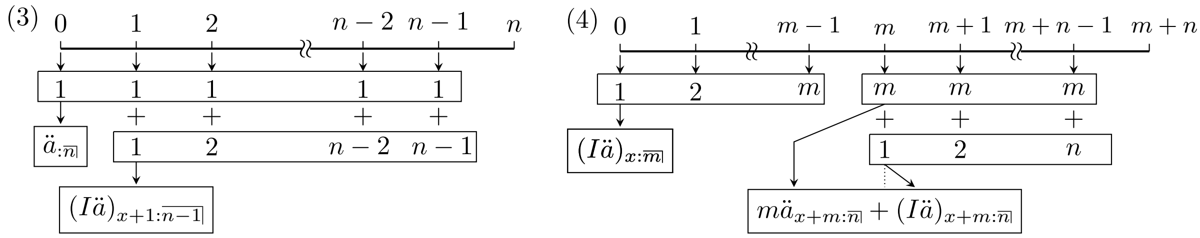
(5) $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{n}|} + vp_x(IA)^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}$.

(6) $(IA)^{1}_{x:\overline{m+n}|} = (IA)^{1}_{x:\overline{m}|} + v^m{}_mp_x\{mA^{1}_{x+m:\overline{n}|} + (IA)^{1}_{x+m:\overline{n}|}\}$.

証明: (1) 前者は第 t 年度に死亡した場合の年金支給現価が $(I\ddot{a})_{\overline{t}|}$ であり、n 年後生存した場合は $(I\ddot{a})_{\overline{n}|}$ となることから成立する。後者も同様。証明は命題 5.1 および (5.4) と同様にできる。

(2) 命題 7.1(2) $R_x = N_x - dS_x$ を用いて命題 6.1(1) の別証明 (7.1) と同様にすれば示せる。

(3) 第 k 年度の年金金額を $1 + (k-1)$ とし左下の図のように、各年度の 1 の部分の現価が $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$, それ以外の第 2 年度の期始の価値が $(I\ddot{a})_{x+1:\overline{n-1}|}$ となるため、主張の式を得る。

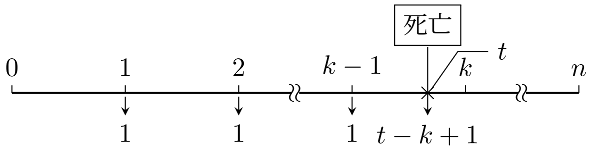


(4) 右上の図ように前半の m 年と後半の n 年に分け、前半の現価が $(I\ddot{a})_{x:\overline{m}|}$, 後半は第 k 年度の年金額を m と $k-m$ に分けると m の部分が $m\ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$, $k-m$ の部分が $(I\ddot{a})_{x+m:\overline{n}|}$ となることにより主張の式を得る。

(5), (6) はそれぞれ (3), (4) と同様に保険金を分解すれば証明できる。 □

完全年金

$\mathring{a}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳加入、n 年契約、年金年額 1 期末払いの生命年金で年度途中に死亡したとき前年度末から死亡時までの端数期間に比例した額が死亡直後に支払われる年金を表す。



図のように $k-1 \le t < k$ で死亡した場合の受け取る金額の現価は $a_{\overline{k-1}|} + (t-k+1)v^t$ なので

$$\begin{aligned}
\mathring{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\{a_{\overline{k-1}|} + (t-k+1)v^t\}{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt + a_{\overline{n}|}{}_np_x \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left\{a_{\overline{k-1}|}{}_{k-1|}q_x + \int_{k-1}^{k}(t-k+1)v^t{}_tp_x\mu_{x+t}\,dt\right\} + a_{\overline{n}|}{}_np_x \\
&= a_{x:\overline{n}|} + (\bar{I}\,\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} - (I\bar{A})^{1}_{x:\overline{n}|} + A^{1}_{x:\overline{n}|},
\end{aligned}$$

ただし $a_{\overline{0|}} = 0$ とする、となる。最後の等号では (5.4) を用いた。2 行目の式の積分で $t - k + 1 \fallingdotseq \frac{1}{2}$ $(k-1 \leq t \leq k)$ と近似して、近似式

$$\mathring{a}_{x:\overline{n|}} \fallingdotseq a_{x:\overline{n|}} + \frac{1}{2}\overline{A}^{\,1}_{x:\overline{n|}}$$

を得る。

9 純保険料式責任準備金

責任準備金は将来の保険金の支払いに対して、最低これだけは準備しておかなければいけない額を表す。以下、${}_tV^P$ で過去法による責任準備金を、${}_tV^F$ で将来法による責任準備金を表すが、一般に両者は一致することが示される。

- **過去法**

$${}_tV^P = (\text{一契約当たりの過去の収入の } t \text{ 年度末での価値}) - (\text{一契約当たりの過去の支出の } t \text{ 年度末での価値})$$

- **将来法**

$${}_tV^F = (\text{一契約当たりの将来の支出の } t \text{ 年度末での価値}) - (\text{一契約当たりの将来の収入の } t \text{ 年度末での価値})$$

責任準備金の計算に当たり次を原則とする:

死亡保険金等の死亡に関するものは支払われたと考え、

生存給付金等の支払い及び保険料収入は責任準備金計算の時点直後に行われると考える。

例 9.1 (年払い養老保険の場合) x 歳加入、n 年契約、死亡保険金 1 死亡時期末払い、生存保険金 1 の養老保険の全期平準年払いの場合に t 年度末での責任準備金 (${}_tV_{x:\overline{n|}}$ と表す) を過去法 (${}_tV^P$) と将来法 (${}_tV^F$) の場合にそれぞれ求め、それが一致することを示そう。以下、$P = P_{x:\overline{n|}}$ とかく。

(過去法)	0	1	2	$t-1$	t
収入	Pl_x	Pl_{x+1}	Pl_{x+2}	Pl_{x+t-1}	0
支出	0	d_x	d_{x+1}	d_{x+t-2}	d_{x+t-1}

これより

$$\begin{aligned}
{}_tV^P &= \frac{1}{l_{x+t}}\left\{(1+i)^t Pl_x + (1+i)^{t-1}Pl_{x+1} + (1+i)^{t-2}Pl_{x+2} + \cdots + (1+i)Pl_{x+t-1}\right\} \\
&\quad - \frac{1}{l_{x+t}}\left\{(1+i)^{t-1}d_x + (1+i)^{t-2}d_{x+1} + \cdots + (1+i)d_{x+t-2} + d_{x+t-1}\right\} \\
&= P\frac{(1+i)^t l_x + (1+i)^{t-1}l_{x+1} + (1+i)^{t-2}l_{x+2} + \cdots + (1+i)l_{x+t-1}}{l_{x+t}} \qquad \text{(分母分子に } v^{x+t} \text{ を掛け、} \\
&\quad - \frac{(1+i)^{t-1}d_x + (1+i)^{t-2}d_{x+1} + \cdots + (1+i)d_{x+t-2} + d_{x+t-1}}{l_{x+t}} \qquad \text{計算基数にすると)} \\
&= P\frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots + D_{x+t-1}}{D_{x+t}} - \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+t-2} + C_{x+t-1}}{D_{x+t}} \\
&= P_{x:\overline{n|}}\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}.
\end{aligned}$$

(将来法)	t	$t+1$	$t+2$	$n-1$	n
収入	Pl_{x+t}	Pl_{x+t+1}	Pl_{x+t+2}	Pl_{x+n-1}	0
支出	0	d_{x+t}	d_{x+t+1}	d_{x+n-2}	$d_{x+n-1} + l_{x+n}$

これより

$${}_tV^F = \frac{1}{l_{x+t}}\left\{vd_{x+t} + v^2 d_{x+t+1} + \cdots + v^{n-t-1}d_{x+n-2} + v^{n-t}(d_{x+n-1} + l_{x+n})\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\frac{1}{l_{x+t}}\left\{Pl_{x+t}+vPl_{x+t+1}+v^2Pl_{x+t+2}+\cdots+v^{n-t-1}Pl_{x+n-1}\right\}\\
&=\frac{vd_{x+t}+v^2d_{x+t+1}+\cdots+v^{n-t}d_{x+n-1}+v^{n-t}l_{x+n}}{l_{x+t}} \qquad \text{(分母分子に } v^{x+t} \text{ を掛け、}\\
&\quad -P\frac{l_{x+t}+vl_{x+t+1}+\cdots+v^{n-t-1}l_{x+n-1}}{l_{x+t}} \qquad \text{計算基数にすると)}\\
&=\frac{C_{x+t}+C_{x+t+1}+\cdots+C_{x+n-1}D_{x+n}}{D_{x+t}}-P\frac{D_{x+t}+D_{x+t+1}+\cdots+D_{x+n-1}}{D_{x+t}}\\
&=\frac{M_{x+t}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}}-P_{x:\overline{n}|}\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}.
\end{aligned}
$$

特に、${}_tV^F=A_{x+t:\overline{n-t}|}-P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ となっている。

${}_tV^P={}_tV^F$ の証明:

$$
\begin{aligned}
{}_tV^P-{}_tV^F&=P_{x:\overline{n}|}\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}-\frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}-\left\{\frac{M_{x+t}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}}-P_{x:\overline{n}|}\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}\right\}\\
&=P_{x:\overline{n}|}\frac{N_x-N_{x+t}+N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}-\frac{M_x-M_{x+t}+M_{x+t}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}}\\
&=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+t}}\left\{P_{x:\overline{n}|}-\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}\right\}=0.
\end{aligned}
$$

以上より、

$$
{}_tV_{x:\overline{n}|}=\begin{cases} P_{x:\overline{n}|}\dfrac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}-\dfrac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}, & \text{(過去法)},\\ A_{x+t:\overline{n-t}|}-P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & \text{(将来法)}.\end{cases} \tag{9.1}
$$

注意 9.1 (1) 将来法の式に定理 6.1 (1) を用いると、次を得る。

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x:\overline{n}|}&=A_{x+t:\overline{n-t}|}-P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}=1-d\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}-\left\{\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}-d\right\}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\\
&=1-\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}.
\end{aligned} \tag{9.2}
$$

(2) 過去法の式から

$$
{}_tV_{x:\overline{n}|}=\frac{P_{x:\overline{n}|}-P^1_{x:\overline{t}|}}{P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}}, \quad \text{特に、} \quad P_{x:\overline{n}|}={}_tV_{x:\overline{n}|}P_{x:\overline{t}|}+(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})P^1_{x:\overline{t}|} \tag{9.3}
$$

を得る。実際、次のように示される。

$$
\begin{aligned}
{}_tV_{x:\overline{n}|}&=P_{x:\overline{n}|}\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}-\frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}=P_{x:\overline{n}|}\frac{1}{\dfrac{D_{x+t}}{N_x-N_{x+t}}}-\frac{\dfrac{M_x-M_{x+t}}{N_x-N_{x+t}}}{\dfrac{D_{x+t}}{N_x-N_{x+t}}}\\
&=P_{x:\overline{n}|}\frac{1}{P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}}-\frac{P^1_{x:\overline{t}|}}{P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}}=\frac{P_{x:\overline{n}|}-P^1_{x:\overline{t}|}}{P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

問題 9.1 (1) x 歳加入、n 年契約、死亡保険金 1 死亡時期末払いの定期保険の全期平準年払いの場合に t 年度末での責任準備金 (${}_tV^1_{x:\overline{n}|}$ と表す) を過去法 (${}_tV^P$) と将来法 (${}_tV^F$) をそれぞれ以下になることを確かめ、それが一致することを示せ。

$$
{}_tV^P=P^1_{x:\overline{n}|}\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}}-\frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}, \quad \text{(過去法)}, \qquad {}_tV^F=A^1_{x+t:\overline{n-t}|}-P^1_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, \quad \text{(将来法)}.
$$

(2) 例題 8.1(保険料返還付保険) の x 歳加入、n 年契約の生存保険、生存保険金 1 で保険料は n 年平準年払いとし、保険料払い込み期間中の死亡については、既払い込み保険料を死亡年度末に返還する保険について、t 年

度末での責任準備金を過去法 (${}_tV^P$) と将来法 (${}_tV^F$) をそれぞれ以下になることを確かめ、それが一致することを示せ。ただし、例題 8.1 で求めた年払い純保険料を P とする。

$$
\begin{aligned}
{}_tV^P &= P\left\{\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{R_x - R_{x+t} - tM_{x+t}}{D_{x+t}}\right\}, \quad (\text{過去法}) \\
{}_tV^F &= P\left\{tA^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} + (IA)^{1}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right\} + A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t}|}}, \quad (\text{将来法}).
\end{aligned}
$$

例 9.2 (一時払い養老保険の場合) x 歳加入、n 年契約、死亡保険金 1 死亡時期末払い、生存保険金 1 の養老保険の一時払いの場合に t 年度末での責任準備金を過去法 (${}_tV^P$) と将来法 (${}_tV^F$) の場合にそれぞれ求め、それが一致することを示そう。

(過去法)	0	1	2	$t-1$	t
収入	$A_{x:\overline{n}|}\,l_x$	0	0	0	0
支出	0	d_x	d_{x+1}	d_{x+t-2}	d_{x+t-1}

これより

$$
\begin{aligned}
{}_tV^P &= \frac{1}{l_{x+t}}(1+i)^t A_{x:\overline{n}|}\,l_x - \frac{1}{l_{x+t}}\left\{(1+i)^{t-1}d_x + (1+i)^{t-2}d_{x+1} + \cdots + (1+i)d_{x+t-2} + d_{x+t-1}\right\} \\
&= A_{x:\overline{n}|}\frac{D_x}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}.
\end{aligned}
$$

(将来法)	t	$t+1$	$t+2$	$n-1$	n
収入	0	0	0	0	0
支出	0	d_{x+t}	d_{x+t+1}	d_{x+n-2}	$d_{x+n-1} + l_{x+n}$

これより

$$
\begin{aligned}
{}_tV^F &= \frac{1}{l_{x+t}}\left\{vd_{x+t} + v^2 d_{x+t+1} + \cdots + v^{n-t-1}d_{x+n-2} + v^{n-t}(d_{x+n-1} + l_{x+n})\right\} - 0 \\
&= \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} = A_{x+t:\overline{n-t}|}.
\end{aligned}
$$

${}_tV^P = {}_tV^F$ **の証明**:

$$
\begin{aligned}
{}_tV^P - {}_tV^F &= A_{x:\overline{n}|}\frac{D_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+t}} \\
&= \frac{D_x}{D_{x+t}}\left\{A_{x:\overline{n}|} - \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}\right\} = 0. \qquad \square
\end{aligned}
$$

- **責任準備金の再帰式 (Fackler の再帰式)**

全期平準年払養老保険 ($P_{x:\overline{n}|}$) を例に、${}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}$ と ${}_tV_{x:\overline{n}|}$ の関係式を考える。右図のような関係にあることから、

$$({}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|})l_{x+t-1}(1+i) = d_{x+t-1} + {}_tV_{x:\overline{n}|}\,l_{x+t}$$

を得る。両辺を $l_{x+t-1}(1+i)$ で割って、

	$t-1$	t
責準	${}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}\,l_{x+t-1}$	${}_tV_{x:\overline{n}|}\,l_{x+t}$
収入	$P_{x:\overline{n}|}\,l_{x+t-1}$	0
支出	0	d_{x+t-1}

$$ {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|} = vq_{x+t-1} + vp_{x+t-1}\,{}_tV_{x:\overline{n}|} \tag{9.4}$$

を、また両辺に v^{x+t} を掛け計算基数で表し、

$$({}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} + P_{x:\overline{n}|})D_{x+t-1} = C_{x+t-1} + {}_tV_{x:\overline{n}|}D_{x+t} \tag{9.5}$$

を得る。このような責任準備金の t についての再帰式を Fackler の再帰式という。

この再帰式を用いて責任準備金の過去法、将来法の式 (9.1) を導くこともできる。実際、${}_0V_{x:\overline{n}|}=0$ に注意して、(9.5) で

$$
\begin{array}{lr}
t=1\text{ として} & (0+P_{x:\overline{n}|})D_x = C_x + \cancel{{}_tV_{x:\overline{n}|}D_{x+1}} \\
t=2\text{ として} & (\cancel{{}_1V_{x:\overline{n}|}}+P_{x:\overline{n}|})D_{x+1} = C_{x+1} + \cancel{{}_tV_{x:\overline{n}|}D_{x+2}} \\
\vdots & \vdots \\
t=t\text{ として} & (\cancel{{}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}}+P_{x:\overline{n}|})D_{x+t-1} = C_{x+t-1} + {}_tV_{x:\overline{n}|}D_{x+t}
\end{array}
$$

これらを加えると $P_{x:\overline{n}|}(D_x+D_{x+1}+\cdots+D_{x+t-1}) = C_x+C_{x+2}+\cdots+C_{x+t-1}+{}_tV_{x:\overline{n}|}D_{x+t}$. よって、

$$
P_{x:\overline{n}|}(N_x-N_{x+t}) = M_x - M_{x+t} + {}_tV_{x:\overline{n}|}D_{x+t} \quad \text{より} \quad {}_tV_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}\frac{N_x-N_{x+t}}{D_{x+t}} - \frac{M_x-M_{x+t}}{D_{x+t}}.
$$

一方、${}_nV_{x:\overline{n}|}=1$ に注意して、(9.5) で

$$
\begin{array}{lr}
t=t+1\text{ として} & ({}_tV_{x:\overline{n}|}+P_{x:\overline{n}|})D_{x+t} = C_{x+t} + \cancel{{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}D_{x+t+1}} \\
t=t+2\text{ として} & (\cancel{{}_{t+1}V_{x:\overline{n}|}}+P_{x:\overline{n}|})D_{x+t+1} = C_{x+t+1} + \cancel{{}_{t+2}V_{x:\overline{n}|}D_{x+t+2}} \\
\vdots & \vdots \\
t=n\text{ として} & (\cancel{{}_{n-1}V_{x:\overline{n}|}}+P_{x:\overline{n}|})D_{x+n-1} = C_{x+n-1} + 1\cdot D_{x+n}
\end{array}
$$

これらを加えると ${}_tV_{x:\overline{n}|}D_{x+t}+P_{x:\overline{n}|}(N_{x+t}-N_{x+n}) = M_{x+t}-M_{x+n}+D_{x+n}$ より、

$$
{}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{M_{x+t}-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_{x+t}} - P_{x:\overline{n}|}\frac{N_{x+t}-N_{x+n}}{D_{x+t}}.
$$

● **危険保険料と貯蓄保険料** (9.4) より

$$
\begin{aligned}
P_{x:\overline{n}|} &= v(1-q_{x+t-1})\,{}_tV_{x:\overline{n}|} + vq_{x+t-1} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|} \\
&= vq_{x+t-1}(1-{}_tV_{x:\overline{n}|}) + v\,{}_tV_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}.
\end{aligned}
$$

この ${}_tP^r = vq_{x+t-1}(1-{}_tV_{x:\overline{n}|})$ を危険保険料、${}_tP^s = v\,{}_tV_{x:\overline{n}|}-{}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}$ を貯蓄保険料という。

例題 9.3 x 歳加入、n 年契約の生存保険、生存保険金 1 で保険料は n 年平準年払いとし、保険料払い込み期間中の死亡についてはその年度末の純保険料式責任準備金を死亡年度末に支払うとする。この年払い純保険料 P を求めよ。

解: t 年度末の責任準備金を ${}_tV$ とし、その再起式を考える。

$$
\begin{aligned}
({}_{t-1}V+P)l_{x+t-1}(1+i) &= {}_tV\,d_{x+t-1} + {}_tV\,l_{x+t} \\
&= {}_tV\,l_{x+t-1}.
\end{aligned}
$$

	$t-1$	t
責準	${}_{t-1}V\,l_{x+t-1}$	${}_tV\,l_{x+t}$
収入	$P\,l_{x+t-1}$	0
支出	0	${}_tV\,d_{x+t-1}$

この両辺に v^t を掛けて $v^{t-1}({}_{t-1}V+P) = v^t\,{}_tV$ を得る。これを ${}_0V=0,\ {}_nV=1$ に注意して、$t=1,2,\ldots,n$ について加えると

$$
P(1+v+\cdots+v^{n-1}) = v^n, \qquad \text{すなわち} \qquad P = \frac{v^n}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}. \qquad \square
$$

10 計算基礎の変更

この節では予定利率 i や予定死亡率 q_x を変更すると保険料がどのように変化するか考える。

10.1 予定利率の変更

$i < i'$ のとき保険料がどのように変化するか考える。i' に対応する値に $'$ を付けるものとする。$v > v'$ に注意すると次の 3 つは自明であろう。

1. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_x > \sum_{t=0}^{n-1} (v')^t {}_tp_x = \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}$.
2. $A^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q_x > A^{1}_{x:\overline{n}|}{}'$.
3. $A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = v^n {}_np_x > A_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}{}'$, 特に 2 と合わせ $A_{x:\overline{n}|} > A'_{x:\overline{n}|}$.

追加の仮定として、q_x が x の増加関数とすると、次が成立する。

4. $P^{1}_{x:\overline{n}|} > P^{1}_{x:\overline{n}|}{}'$.　　5. $P_{x:\overline{n}|} > P'_{x:\overline{n}|}$.　　6. ${}_tV_{x:\overline{n}|} > {}_tV'_{x:\overline{n}|}$.

すべての大小関係が同じであるため、4–6 は丸暗記でよいと思うが、一応証明しておこう。

4–6 の証明: 4. まず、$v'A^{1}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} - vA^{1}_{x:\overline{n}|}{}'\ddot{a}_{x:\overline{n}|} > 0$ を示す。

$$
\begin{aligned}
&v'A^{1}_{x:\overline{n}|}\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} - vA^{1}_{x:\overline{n}|}{}'\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(v^k {}_{k-1|}q_x v'(v')^{l-1} {}_{l-1}p_x - (v')^k {}_{k-1|}q_x v v^{l-1} {}_{l-1}p_x) \\
&= \sum_{1\le k<l\le n} \{v^k {}_{k-1|}q_x (v')^l {}_{l-1}p_x - (v')^k {}_{k-1|}q_x v^l {}_{l-1}p_x + v^l {}_{l-1|}q_x (v')^k {}_{k-1}p_x - (v')^l {}_{l-1|}q_x v^k {}_{k-1}p_x\} \\
&= \sum_{1\le k<l\le n} (vv')^k {}_{k-1}p_x {}_{l-1}p_x \{(v')^{l-k} q_{x+k-1} - v^{l-k} q_{x+k-1} + v^{l-k} q_{x+l-1} - (v')^{l-k} q_{x+l-1}\} \\
&= \sum_{1\le k<l\le n} (vv')^k {}_{k-1}p_x {}_{l-1}p_x \{(v')^{l-k} - v^{l-k}\}\{q_{x+k-1} - q_{x+l-1}\} > 0.
\end{aligned}
$$

ここで仮定より $k < l$ なら、$(v')^{l-k} < v^{l-k}$ かつ $q_{x+k-1} < q_{x+l-1}$ となることを用いた。よって、$v'P^{1}_{x:\overline{n}|} > vP^{1}_{x:\overline{n}|}{}' > v'P^{1}_{x:\overline{n}|}{}'$ より主張は従う。
5. 4 より $P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1}$ が i の減少関数であること示せばよいが、以下から明らかである。

$$
P_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} = \frac{v^n {}_np_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{{}_np_x}{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t-n} {}_tp_x} = \frac{{}_np_x}{\sum_{t=0}^{n-1} (1+i)^{n-t} {}_tp_x}.
$$

6. ${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ より $\dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} < \dfrac{\ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}}$ を示せばよい。

$$
\begin{aligned}
&\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-t-1}\sum_{l=0}^{n-1}\{v^k {}_kp_{x+t}(v')^l {}_lp_x - (v')^k {}_kp_{x+t} v^l {}_lp_x\} \\
&= \sum_{0\le k<l\le n-t-1} \{v^k {}_kp_{x+t}(v')^l {}_lp_x - (v')^k {}_kp_{x+t} v^l {}_lp_x + v^l {}_lp_{x+t}(v')^k {}_kp_x - (v')^l {}_lp_{x+t} v^k {}_kp_x\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-t-1}\sum_{l=n-t}^{n-1}\{v^k {}_kp_{x+t}(v')^l {}_lp_x - (v')^k {}_kp_{x+t} v^l {}_lp_x\} \\
&= \sum_{0\le k<l\le n-t-1} \{v^k(v')^l - v^l(v')^k\}\{{}_kp_{x+t}{}_lp_x - {}_kp_x{}_lp_{x+t}\} + \sum_{k=0}^{n-t-1}\sum_{l=n-t}^{n-1} {}_kp_{x+t}{}_lp_x\{v^k(v')^l - v^l(v')^k\} \\
&= \sum_{0\le k<l\le n-t-1} (vv')^k {}_kp_{x+t}{}_kp_x\{(v')^{l-k} - v^{l-k}\}\{{}_{l-k}p_{x+k} - {}_{l-k}p_{x+t+k}\} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n-t-1}\sum_{l=n-t}^{n-1} (vv')^k {}_kp_{x+t}{}_lp_x\{(v')^{l-k} - v^{l-k}\}
\end{aligned}
$$

$< 0.$

最後の不等号は、$p_{x+k+m} > p_{x+k+t+m}$, $m = 0, 1, \cdots, l-k-1$, より ${}_{l-k}p_{x+k} > {}_{l-k}p_{x+t+k}$ となることを用いた。 $\square$

10.2 予定死亡率の変更

Ⓐ x 歳の死亡確率が $q_x > q'_x$ のとき保険料がどのように変化するか考える。q'_x に対応する値に $'$ を付けるものとする。$p_x < p'_x$ に注意すると次が従う。

A1. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}$ より $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} < \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}$. (${}_kp_x < {}_kp'_x$ からとしてもよい。)

A2. $A^{1}_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_xA^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} = vq_x + v(1-q_x)A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} = vq_x(1 - A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}) + vA^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}$ で $A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} < 1$ より、$A^{1}_{x:\overline{n}|} > A^{1}_{x:\overline{n}|}{}'$. 特に、A1 とより $P^{1}_{x:\overline{n}|} > P^{1}_{x:\overline{n}|}{}'$.

A3. $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n p_{x\,n-1}p_{x+1}$ より $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} < A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}{}'$. また、$P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \dfrac{v^n {}_np_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \dfrac{v^n p_{x\,n-1}p_{x+1}}{1 + vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}} < P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}{}'$.

後者には $A, B, C > 0$ と $0 < p < p'$ に対して $\dfrac{Ap}{B + Cp} < \dfrac{Ap'}{B + Cp'}$ となることを用いた。

A4. $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ と A1 より $A_{x:\overline{n}|} > A'_{x:\overline{n}|}$.

$P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d$ と A1 より $P_{x:\overline{n}|} > P'_{x:\overline{n}|}$. (A1 とからとしてもよい。)

A5. ${}_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ と A1 より ${}_tV_{x:\overline{n}|} < {}_tV'_{x:\overline{n}|}$, $t = 1, \cdots, n-1$.

Ⓑ 次に $x+t$ 歳 ($1 \le t \le n-2$, B2, B3 については $1 \le t \le n-1$) の死亡確率が $q_{x+t} > q'_{x+t}$ のとき保険料がどのように変化するか考える。q'_{x+t} に対応する値に $'$ を付けるものとする。

B1. $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{t}|} + v^t {}_tp_x\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$ と A1 ($q_{x+t} > q'_{x+t}$ から $\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} < \ddot{a}'_{x+t:\overline{n-t}|}$ となることを用いる) より $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} < \ddot{a}'_{x:\overline{n}|}$ を得る。

B2. $A^{1}_{x:\overline{n}|} = A^{1}_{x:\overline{t}|} + v^t {}_tp_xA^{1}_{x+t:\overline{n-t}|}$ と A2 より $A^{1}_{x:\overline{n}|} > A^{1}_{x:\overline{n}|}{}'$. 特に、B1 とより $P^{1}_{x:\overline{n}|} > P^{1}_{x:\overline{n}|}{}'$.

B3. $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n {}_tp_xp_{x+t\,n-t-1}p_{x+t+1}$ より $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} < A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}{}'$. $P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} < P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}{}'$ は問題 10.1 とする。

B4. $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ と B1 より $A_{x:\overline{n}|} > A'_{x:\overline{n}|}$.

$P_{x:\overline{n}|} = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d$ と B1 より $P_{x:\overline{n}|} > P'_{x:\overline{n}|}$. (B1 と前半からとしてもよい。)

B5. ${}_jV_{x:\overline{n}|}$ については、$j = 1, \cdots, t$ のとき ${}_tV_{x:\overline{n}|} > {}_tV'_{x:\overline{n}|}$, $j = t+1, \cdots, n-1$ のとき ${}_tV_{x:\overline{n}|} < {}_tV'_{x:\overline{n}|}$.

B5 の証明: $j = t+1, \cdots, n-1$ のとき ${}_jV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ で $\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}$ は $q_{x+t} > q'_{x+t}$ の影響を受けないので、B1 より ${}_tV_{x:\overline{n}|} < {}_tV'_{x:\overline{n}|}$.
$j = 1, \cdots, t$ のとき $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{j}|} + v^j {}_jp_x\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}$ より

$$\begin{aligned}
{}_jV_{x:\overline{n}|} - {}_jV'_{x:\overline{n}|} &= \frac{\ddot{a}'_{x+j:\overline{n-j}|}}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - \frac{\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{v^j {}_jp_x\ddot{a}'_{x+j:\overline{n-j}|}}{v^j {}_jp_x\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - \frac{v^j {}_jp_x\ddot{a}_{x+j:\overline{n-j}|}}{v^j {}_jp_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \\
&= \frac{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{j}|}}{v^j {}_jp_x\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{j}|}}{v^j {}_jp_x\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \qquad (\ddot{a}_{x:\overline{j}|} \text{ は } q_{x+t} \text{ の影響がないことに注意}) \\
&= \frac{\ddot{a}_{x:\overline{j}|}}{v^j {}_jp_x}\left(\frac{-1}{\ddot{a}'_{x:\overline{n}|}} - \frac{-1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}\right) > 0. \qquad (\text{B1 を用いた。})
\end{aligned}$$

問題 10.1 $p_{x+t} < p'_{x+t}$ のとき $P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} < P_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}{}'$ を示せ。ヒント: $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \ddot{a}_{x:\overline{t+1}|} + v^{t+1} {}_{t+1}p_x\ddot{a}_{x+t+1:\overline{n-t-1}|}$ と A3 で用いた不等式を用いよ。

11　営業保険料

(1) 年払営業保険料

Sprague の方法 $\cdots$ 経費の実際の支払形態に基づいて付加する基準を考え、それらを収支相等の保険料算式に取り入れる方法

以下、養老保険 (x 歳加入, m 年払込, n 年契約, 死亡保険金 1 死亡時即時払い, 生存保険金 1) を例に考える。

新契約費　: 新契約時にのみ保険金額 1 に対し α　(例えば $\alpha = 0.025$ or 2.5%)

集金経費　: 保険料払込のつど営業保険料 1 に対し β　(例えば $\beta = 0.03$ or 3%)

維持費　(a) 保険料払込中は毎年始に保険金額 1 に対し γ　(例えば $\gamma = 0.003$ or 3‰)

　　　　(b) 保険料払済後に毎年始に保険金額 1 に対し γ' (例えば $\gamma' = 0.002$ or 2‰)

(α を**予定新契約費率**, β を**予定集金経費率**, γ, γ' を**予定維持費率**という。)

この営業保険料を ${}_m\overline{P}^*_{x:\overline{n|}}$ で表すと

$${}_m\overline{P}^*_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x:\overline{m|}} = \overline{A}_{x:\overline{n|}} + \alpha + \beta \cdot {}_m\overline{P}^*_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x:\overline{m|}} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{m|}} + \gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{m|}}).$$

これより

$$\begin{aligned}{}_m\overline{P}^*_{x:\overline{n|}} &= \frac{\overline{A}_{x:\overline{n|}} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{m|}} + \gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{m|}})}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{m|}}} \\ &= {}_m\overline{P}_{x:\overline{n|}}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta}\right) + \frac{\alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{m|}} + \gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{m|}})}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}\end{aligned}$$

このとき、以下に注意する。

- 全期払込のときは $m = n$ なので γ' の項がない。
- 死亡時期末払の養老保険なら $\overline{P}, \overline{A}$ を P, A に置きかえればよい。

いずれにせよ、$P^* = P(1+k) + C$ と表せる。

(2) 一時払営業保険料

通常 (1) で $\beta = \gamma = 0$ (一時払なのでこれらの経費はない) とすればよいので、

$$\overline{A}^*_{x:\overline{n|}} = \overline{A}_{x:\overline{n|}} + \alpha + \gamma'\ddot{a}_{x:\overline{n|}}$$

となる。

以上のことは定期保険やその他のより複雑な保険についても同様に取り扱いが出来る。以下の例は [F], 下による。

例 11.1 x 歳加入, n 年満期全期払込の養老保険で, 新契約費は契約時に年払営業保険料 1 に対し α_1, 更に主として募集者に対する継続手数料支給のため第 2 年度 α_2, 第 3 年度以降第 10 年度までは α_3, 第 11 年度以降は α_4 とする。また、保険金支給経費として (β や γ 以外に) 死亡あるいは満期時に保険金額 1 に対し γ_1 が保険金支払い時に必要であるとすると、

$$\begin{aligned}\overline{P}^*_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} = \overline{A}_{x:\overline{n|}} &+ \{\alpha_1 + \alpha_2(\ddot{a}_{x:\overline{2|}} - \ddot{a}_{x:\overline{1|}}) + \alpha_3(\ddot{a}_{x:\overline{10|}} - \ddot{a}_{x:\overline{2|}}) + \alpha_4(\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - \ddot{a}_{x:\overline{10|}})\}\overline{P}^*_{x:\overline{n|}} \\ &+ \beta\overline{P}^*_{x:\overline{n|}}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n|}} + \gamma_1\overline{A}_{x:\overline{n|}}.\end{aligned}$$

これを解いて

$$\overline{P}^*_{x:\overline{n|}} = \frac{(1+\gamma_1)\overline{A}_{x:\overline{n|}} + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{(1-\beta-\alpha_4)\ddot{a}_{x:\overline{n|}} - (\alpha_3-\alpha_4)\ddot{a}_{x:\overline{10|}} - (\alpha_2-\alpha_3)\ddot{a}_{x:\overline{2|}} - (\alpha_1-\alpha_2)}$$

となる。

例 11.2 (既払込保険料返還付保険の営業保険料) x 歳加入, n 年契約の生存保険、生存保険金 1 で保険料支払い期間中の死亡には既払込保険料を死亡した年度末に返還する保険を考える。この年払い純保険料 P に対し営業保険料 P^* が $P^* = P(1+k)+C$ と表せるとする。このとき、

$$P\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P^*(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = \{P(1+k)+C\}(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$$

より

$$P = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} + C(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - (1+k)(IA)^{1}_{x:\overline{n}|}} = \frac{D_{x+n} + C(R_x + R_{x+n} - nM_{x+n})}{(N_x - N_{x+n}) - (1+k)(R_x + R_{x+n} - nM_{x+n})}.$$

よって、次を得る。

$$P^* = P(1+k) + C = \frac{(1+k)D_{x+n} + C(N_x - N_{x+n})}{(N_x - N_{x+n}) - (1+k)(R_x + R_{x+n} - nM_{x+n})}.$$

生命年金のときは、年金支給開始時点における現価を生命保険における生存保険金とみなして付加保険料を定める方法が用いられる。

例題 11.3 (年金原資) x 歳の被保険者は f 年年払で、f 年後開始の年金年額 1 の期始払 n 年有期生命年金を契約した。新契約費については年金原資の α, 集金費は保険料の β, 維持費については保険料払込期間は年金原資の γ, 保険料払込期間終了後は年金年額 1 に対して γ' としたとき、この年払営業保険料 P^* を求めよ。

注意. **年金原資**とは生命年金の即時開始年金の一時払保険料を表す。年金開始期間中の維持費を含む場合もあるが、ここではその維持費は含まないものとして解答する。年金原資に維持費を含む場合は年金原資を $F = \ddot{a}_{x+f:\overline{n}|} + \gamma'\ddot{a}_{x+f:\overline{n}|}$ とし、(11.1) で $\gamma' = 0$ として解けばよい。

解: 年金原資を F とする。このとき $F = \ddot{a}_{x+f:\overline{n}|}$ となるので、条件から

$$\begin{aligned} P^*\ddot{a}_{x:\overline{f}|} &= FA_{x:\overset{1}{\overline{f}|}} + \alpha F + \beta P^*\ddot{a}_{x:\overline{f}|} + \gamma F\ddot{a}_{x:\overline{f}|} + \gamma'{}_{f|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} \qquad (11.1)\\ &= (A_{x:\overset{1}{\overline{f}|}} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{f}|} + \gamma' v^f{}_f p_x)F + \beta P^*\ddot{a}_{x:\overline{f}|}. \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{f}|}} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{f}|} + \gamma' v^f{}_f p_x}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{f}|}} \times F \\ &= \frac{D_{x+f} + \alpha D_x + \gamma(N_x - N_{x+f}) + \gamma' D_{x+f}}{(1-\beta)(N_x - N_{x+f})} \times \frac{N_{x+f} - N_{x+f+n}}{D_{x+f}}. \qquad \square \end{aligned}$$

12 実務上の責任準備金

① チルメル式責任準備金

営業保険料 P^* と純保険料 P^{net} に対しその差 P^{L} を付加保険料という。

$$P^* = P^{\mathrm{net}} + P^{\mathrm{L}}$$

責任準備金の計算において第 1 年度の付加保険料を平準の場合より多くし (初年度は経費が多くかかるため)、そのかわり翌年の第 2 年度から第 h 年度 $(2 \le h \le n)$ は付加保険料を少なくし、全体として釣り合いのとれたものにする方法を考える。

これを n 年契約の全期平準年払養老保険 $P_{x:\overline{n}|}$ を例に説明する。第 k 年度の純保険料 P_k を次のように設定する。($P_3, \ldots, P_n$ は便宜的な記号で、実際は P_1, P_2 のみ用いる。)

$$P_1 < P_{x:\overline{n}|} < P_2 = \cdots = P_h, \quad P_{h+1} = \cdots = P_n = P_{x:\overline{n}|},$$

$$P_2 - P_1 = \alpha \quad (\text{この } \alpha \text{ をチルメル割合という})$$

とするとき、

$$P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x:\overline{h}|} = P_1 + P_2(\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - 1) = P_2\ddot{a}_{x:\overline{h}|} - \alpha$$

$$\text{より} \qquad P_2 = P_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}, \quad P_1 = P_{x:\overline{n}|} - \alpha\left(1 - \frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right).$$

このときの責任準備金を ${}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|}$ と表し、チルメル式責任準備金という。特に $h = n$ のときは全期チルメル式といい、単に ${}_tV^{[z]}_{x:\overline{n}|}$ と表す。将来法で $1 \leq t \leq h$ のとき

$$\begin{aligned}
{}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|} &= A_{x+t:\overline{n-t}|} - \{P_2\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|} + P_{x:\overline{n}|}(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|})\} \\
&= A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \alpha\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}} \\
&= {}_tV_{x:\overline{n}|} - \alpha\frac{\ddot{a}_{x+t:\overline{h-t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}.
\end{aligned}$$

注意 12.1 (1) 上式で $t = 0$ とすると「${}_0V^{[hz]}_{x:\overline{n}|} = -\alpha$」となる。これは保険料徴収前に α を支出してしまったことに対応している。もちろん正しくは ${}_0V^{[hz]}_{x:\overline{n}|} = 0$ である。
(2) $t > 0$ に対して ${}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|} < 0$ となることを避けるべきである。このような場合、解約があると会社が損失を被ることとなる。
(3) 上記では営業保険料が P^* であれば $P^* - P_1$ が第 1 年度の付加保険料、$P^* - P_2$ が第 2 年度から第 h 年度までの付加保険料となる。

● チルメル式責任準備金の再帰式

右図のような関係にあることから、

$$({}_{t-1}V^{[hz]}_{x:\overline{n}|} + P_2)l_{x+t-1}(1+i) = d_{x+t-1} + {}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|}\,l_{x+t},$$

$$\therefore \quad {}_{t-1}V^{[hz]}_{x:\overline{n}|} + P_2 = vq_{x+t-1} + vp_{x+t-1}\,{}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|}.$$

これより

$$P_2 = vq_{x+t-1}(1 - {}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|}) + v\,{}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}.$$

$2 \leq t \leq h$ のとき

	$t-1$	t
責準	${}_{t-1}V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}\,l_{x+t-1}$	${}_tV^{[hz]}_{x:\overline{n}|}\,l_{x+t}$
収入	$P_2\,l_{x+t-1}$	0
支出	0	d_{x+t-1}

となる。この右辺第 1 項が P_2 の危険保険料、第 2 項が貯蓄保険料を表す。同様に $t = 1$ のときは

$$0 + P_1 = vq_x + vp_x\,{}_1V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}$$

なることから次の P_1 の危険保険料と貯蓄保険料の分解式を得る。

$$P_1 = vq_x(1 - {}_1V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}) + v\,{}_1V^{[hz]}_{x:\overline{n}|}.$$

② **初年度定期式責任準備金**

n 年契約の m 年平準年払養老保険 ${}_mP_{x:\overline{n}|}$ を例に説明する。その全期チルメル式責任準備金を ${}^m_tV^{[z]}_{x:\overline{n}|}$ で表す。ここで ${}^m_1V^{[z]}_{x:\overline{n}|} = 0$ となるチルメル割合 α を求めよう。このとき、

$${}^m_tV^{[z]}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - \left({}_mP_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}, \qquad 1 \leq t \leq m, \tag{12.1}$$

より

$${}^m_1V^{[z]}_{x:\overline{n}|} = A_{x+1:\overline{n-1}|} - \left({}_mP_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|} = 0,$$

$$\therefore \qquad \alpha = \left(\frac{A_{x+1:\overline{n-1}|}}{\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|}} - {}_mP_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \left({}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} - {}_mP_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x:\overline{m}|}.$$

よって、

$$\begin{aligned} P_2 &= {}_mP_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|}, && (12.2)\\ P_1 &= P_2 - \alpha = {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} - \left({}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|} - {}_mP_{x:\overline{n}|}\right)\ddot{a}_{x:\overline{m}|} \\ &= -{}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|}(\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - 1) + A_{x:\overline{n}|} = -{}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|}\,vp_x\ddot{a}_{x+1:\overline{m-1}|} + A_{x:\overline{n}|} \\ &= -vp_xA_{x+1:\overline{m-1}|} + vq_x + vp_x\,A_{x+1:\overline{n-1}|} \\ &= vq_x = A^{\ 1}_{x:\overline{1}|}. && (12.3) \end{aligned}$$

(12.3) は第 1 年度の純保険料 P_1 は 1 年定期保険の保険料と一致する、すなわち、第 1 年度の死亡保険金の支払いのためだけに用い、2 年度以降新たに責任準備金を積むため P_2 が $x+1$ 歳加入の $m-1$ 年平準年払保険料 (12.2) となっている。実際に、(12.1) に (12.2) を代入することで以下の関係式を得る。

$${}^{m}_{t}V^{[z]}_{x:\overline{n}|} = A_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|}\,\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} = {}^{m-1}_{t-1}V^{[z]}_{x+1:\overline{n-1}|}, \qquad 1 \le t \le m. \qquad (12.4)$$

③ 充足保険料式責任準備金

付加保険料率 $\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ を安全割増や営業利益を含まないものとし、これを考慮した責任準備金を充足保険料式責任準備金という。また、この営業保険料を充足保険料という[*1]。

上記の付加保険料率に対応した n 年契約の m 年平準年払いの養老保険 ${}_mP^*_{x:\overline{n}|}$ を例に説明する。第 t 年度末 $(1 \le t \le m)$ において

$$\begin{aligned} &(\text{将来の支出の現価}) = A_{x+t:\overline{n-t}|} + \beta\,{}_mP^*_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \gamma\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \gamma'(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}), \\ &(\text{将来の収入の現価}) = {}_mP^*_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \end{aligned}$$

で

$${}_mP^*_{x:\overline{n}|} = \frac{A_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|})}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = \frac{1}{1-\beta}\,{}_mP_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{m}|} + \gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|})}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

より、充足保険料式責任準備金 ${}^{m}_{t}V^{[A]}_{x:\overline{n}|}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} {}^{m}_{t}V^{[A]}_{x:\overline{n}|} &= A_{x+t:\overline{n-t}|} + \beta\,{}_mP^*_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \gamma\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \gamma'(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}) \\ &\quad -{}_mP^*_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} \\ &= A_{x+t:\overline{n-t}|} - \left({}_mP_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \gamma'\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right), \quad 1 \le t \le m-1, \\ {}^{m}_{t}V^{[A]}_{x:\overline{n}|} &= A_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma'\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, \qquad t \ge m. \end{aligned}$$

④ 調整保険料式責任準備金

充足保険料で γ と γ' のみ考慮し、$\alpha = \beta = 0$ としたものを調整純保険料とよび ${}_mP^{[I]}_{x:\overline{n}|}$ で表すと

$${}_mP^{[I]}_{x:\overline{n}|} = {}_mP_{x:\overline{n}|} + P^{[\gamma]}, \qquad \text{ただし} \qquad P^{[\gamma]} = \gamma + \gamma'\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}.$$

このとき、調整保険料式責任準備金 ${}^{m}_{t}V^{[I]}_{x:\overline{n}|}$ は次のようになる。

$${}^{m}_{t}V^{[I]}_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|} - {}_mP_{x:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \gamma'\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \dfrac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right), & 1 \le t \le m-1, \\ A_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma'\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}, & t \ge m. \end{cases}$$

[*1] アクチュアリー試験では初年度定期式責任準備金は頻繁に出題されるが、次の充足保険料式や調整保険料式はまれにしか出題されないので最初は省略してよいと思う。

次に γ と γ' の部分だけ考え、その将来支出から、$P^{[\gamma]}$ の将来収入を引いたものを**事業費責任準備金**とよび ${}^m_tV^{[\gamma]}_{x:\overline{n|}}$ と表す。

$$\begin{aligned}{}^m_tV^{[\gamma]}_{x:\overline{n|}} &= \gamma\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} + \gamma'(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}}) - P^{[\gamma]}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t|}} \\ &= \gamma'\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}\right), \quad 1 \le t \le m, \\ {}^m_tV^{[\gamma]}_{x:\overline{n|}} &= \gamma'\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}, \qquad t \ge m.\end{aligned}$$

特に、${}^m_tV^{[I]}_{x:\overline{n|}} = {}^m_tV_{x:\overline{n|}} + {}^m_tV^{[\gamma]}_{x:\overline{n|}}$ となっている。${}^m_tV^{[I]}_{x:\overline{n|}}$ を**調整保険料式責任準備金**という。[*2]

13　解約その他諸変更

①　解約返戻金

契約者が何等かの理由で解約を申し出る場合、解約返戻金が返金される[*3]。例えば解約返戻金 ${}_tW$ は責任準備金を基準にして $\sigma \ge 0$ を用いて

$${}_tW = {}_tV - \sigma\frac{\max\{0, 10-t\}}{10}$$

という式で定める。(問題を解く際はその問題文の指示に従って下さい。)

②　保険料振替貸付

契約者が一時的に保険料の払込が困難になった場合、一定の条件のもと保険料振替貸付が行われる。払込遅延があった時点での貸付金総額を ${}_tL$, 年払保険料を P, 貸付金に対する利率を i' (予定利率 i と同じである必要はない) とすると、

$$({}_tL + P)(1+i') \le {}_tW$$

が満足されるかぎり、貸付が可能である。ただし、貸付があった後に死亡、満期あるいは解約があれば、支払金から貸付金が差し引かれることに注意する。

③　払済保険

保険金額の減額を条件に、保険金の支払条件や保険期間を変更せずに以後の保険料の払込を中止するような変更した場合、変更後のそのような保険を払済保険という。元の保険が養老保険 $P_{x:\overline{n|}}$ の場合、払済保険金額 S は

$${}_tW = S(A_{x+t:\overline{n-t|}} + \gamma'\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}})$$

で定められる。ここで、γ' は保険金額 1 あたりの払済後の維持費率である。これらの数値は問題に書かれているので問題文をよく読むことが必須となる。

④　延長保険

払済保険では保険金額を減額したが、死亡保険金額はもとのままとし変更後の保険をある定められた期間の定期保険として契約を継続するような保険を考える。変更後のそのような保険を延長保険という。延長期間 T はもとの死亡保険金が S_1 であるとすると

$${}_tW \ge S_1(A^{1}_{x+t:\overline{T|}} + \gamma'_1\ddot{a}_{x+t:\overline{T|}}) \tag{13.1}$$

となる最大の T である。ここで、もし $T = n-t$ としても (13.1) が成り立てば満期日に次で定まる生存保険金 S'_2 を支払う。

$${}_tW = S_1(A^{1}_{x+t:\overline{n-t|}} + \gamma'_1\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}) + S'_2(A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t|}}} + \gamma'_2\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}). \tag{13.2}$$

[*2] [F], 下, p.24 には、これをわが国では純保険料式責任準備金と称しているとある。

[*3] この節については詳しくは [F], 下 をお読み下さい。

ここで、γ_1' は死亡保険金額 1、γ_2' は生存保険金額 1 あたりの払済後の維持費率である。($\gamma' = \gamma_1' + \gamma_2'$ となる。) ここで、もし契約上の貸し付け ${}_tL$ がある場合には、それを変更時点で回収する意味で

$$ {}_tW - {}_tL \geq (S_1 - {}_tL)(A_{\overset{1}{x+t}:\overline{T|}} + \gamma_1' \ddot{a}_{x+t:\overline{T|}}) \tag{13.3} $$

なる最大の T として、もし $T = n - t$ としても (13.3) が成り立てば

$$ {}_tW - {}_tL = (S_1 - {}_tL)(A_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t|}} + \gamma_1' \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}) + S_2'(A_{x+t:\overset{1}{\overline{n-t|}}} + \gamma_2' \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}) $$

と S_2' を定める。

⑤ 転換

転換とは、契約者が以前に購入した保険契約を無駄にすることなく、保険種類や保険金額の変更をできるようにした制度である。それには次の 2 つの方法が考えられる。

(1) 元の契約の責任準備金 (解約返戻金ではない) を用いて新しい契約と同一の保険期間の払済保険を購入し、新契約の保険料は、新保険金額から払済保険金額を差し引いた金額に対して計算する。

(2) 元の契約の責任準備金を利用して新しい契約の保険料の一部に充当し、その分新しい保険料を減らす。

転換の問題は問題文にどちらを用いるか具体的に書かれているので、それに従って解けばよい。ただし、純保険料であれば (1), (2) の両者は一致するが、付加保険料がある場合は必ずしも一致しない。

14 連合生命確率

ここでは、複数の人が関わる生命確率を考える。(x) で「x 歳の人」を表す。また、それぞれの人が死亡する確率は独立であるとし、特に断らない限りその人の余命は年齢にのみ依存すると仮定する。

以下、説明をするための便宜的な記号として、Λ_k で (x_k) の余命を表す確率変数とする。ここで各 Λ_k は連続型であり、仮定より $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ は独立であることに注意する。

① 共存に関する連合生命確率

${}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}$ で t 年後に $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ の共存が成立している確率、
すなわち、すべての人が生存している確率を、
${}_tq_{x_1x_2\cdots x_m}$ で t 年後に $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ の共存が成立していない確率、
すなわち、少なくとも一人は死んでいる確率を表す。

このとき、$\Lambda_{(1)} = \min\{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_m\}$ は $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ の共存が壊れる時刻となるので、次を得る。

$$ \begin{aligned} {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m} &= P(\Lambda_{(1)} \geq t) = P(\Lambda_1 \geq t, \Lambda_2 \geq t, \cdots, \Lambda_m \geq t) = P(\Lambda_1 \geq t)P(\Lambda_2 \geq t) \cdots P(\Lambda_m \geq t) \\ &= {}_tp_{x_1} {}_tp_{x_2} \cdots {}_tp_{x_m}, \\ {}_tq_{x_1x_2\cdots x_m} &= P(\Lambda_{(1)} < t) = 1 - P(\Lambda_{(1)} \geq t) = 1 - {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}, \\ {}_{t|}q_{x_1x_2\cdots x_m} &= P(t \leq \Lambda_{(1)} < t+1) = {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m} - {}_{t+1}p_{x_1x_2\cdots x_m}. \end{aligned} $$

② 最終生存者に関する連合生命確率

${}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}$ で t 年後に $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ の最終生存者が生きている確率、
すなわち、少なくとも一人は生存している確率を、
${}_tq_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}$ で t 年後に $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ の最終生存者が死亡している確率を表す。

このとき、$\Lambda_{(m)} = \max\{\Lambda_1, \cdots, \Lambda_m\}$ は $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ の最終生存者の余命となるので、次を得る。

$$ {}_tq_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} = P(\Lambda_{(m)} < t) = P(\Lambda_1 < t, \Lambda_2 < t, \cdots, \Lambda_m < t) = P(\Lambda_1 < t)P(\Lambda_2 < t) \cdots P(\Lambda_m < t) $$

$$
\begin{aligned}
&= {}_tq_{x_1}{}_tq_{x_2}\cdots{}_tq_{x_m},\\
{}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} &= P(\Lambda_{(m)}\geq t)=1-P(\Lambda_{(m)}<t)=1-{}_tq_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}},\\
{}_{t|}q_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} &= P(t\leq \Lambda_{(m)}<t+1)={}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}-{}_{t+1}p_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}.
\end{aligned}
$$

ここで、2 人の場合

$$
{}_tp_{\overline{xy}}=1-{}_tq_{\overline{xy}}=1-{}_tq_x{}_tq_y=1-(1-{}_tp_x)(1-{}_tp_y)={}_tp_x+{}_tp_y-{}_tp_{xy}, \tag{14.1}
$$

同様に 3 人の場合

$$
{}_tp_{\overline{xyz}}={}_tp_x+{}_tp_y+{}_tp_z-\big({}_tp_{xy}+{}_tp_{xz}+{}_tp_{yz}\big)+{}_tp_{xyz} \tag{14.2}
$$

となることに注意する。これより据置死亡確率についても次を得る。

$$
\begin{aligned}
{}_{t|}p_{\overline{xy}} &= {}_{t|}p_x+{}_{t|}p_y-{}_{t|}p_{xy},\\
{}_{t|}p_{\overline{xyz}} &= {}_{t|}p_x+{}_{t|}p_y+{}_{t|}p_z-\big({}_{t|}p_{xy}+{}_{t|}p_{xz}+{}_{t|}p_{yz}\big)+{}_{t|}p_{xyz}.
\end{aligned}
$$

問題 14.1　4 人の (x) について、${}_tp_{\overline{xxxx}}$ を ${}_tp_x$ の多項式として表せ。また、${}_tq_{xxxx}$ を ${}_tq_x$ の多項式として表せ。

次のように、共存、最終生存者に関する連合生命確率ついて次のような記号も用いられる。
${}_tp_{x,\overline{yz}}$ で t 年後 (x) と $(y),(z)$ の最終生存者がともに生存する確率を表す。

$$
{}_tp_{x,\overline{yz}}={}_tp_x{}_tp_{\overline{yz}}={}_tp_x\big({}_tp_y+{}_tp_z-{}_tp_{yz}\big)={}_tp_{xy}+{}_tp_{xz}-{}_tp_{xyz}.
$$

同様に据え置き死亡確率について

$$
{}_{t|}q_{x,\overline{yz}}={}_tp_{x,\overline{yz}}-{}_{t+1}p_{x,\overline{yz}}={}_{t|}q_{xy}+{}_{t|}q_{xz}-{}_{t|}q_{xyz}.
$$

③　連合生命に関する死力

死力が $\mu_{x+t}=-\dfrac{d}{dt}\{\log{}_tp_x\}=-\dfrac{1}{{}_tp_x}\dfrac{d}{dt}{}_tp_x$ を満たすことに注意し、共存に関する死力、最終生存者に関する死力をそれぞれ

$$
\mu_{x_1+t,x_2+t,\cdots,x_m+t}=-\frac{d}{dt}\left\{\log{}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}\right\}=-\frac{1}{{}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}}\frac{d}{dt}{}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}, \tag{14.3}
$$

$$
\mu_{\overline{x_1+t,x_2+t,\cdots,x_m+t}}=-\frac{d}{dt}\left\{\log{}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}\right\}=-\frac{1}{{}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}}\frac{d}{dt}{}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} \tag{14.4}
$$

と定める。通常の一人についての死力の場合と同様に次が成立する。証明は省略する。

命題 14.1　次が成立する。

$$
{}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}=\exp\left\{-\int_0^t\mu_{x_1+s,x_2+s,\cdots,x_m+s}\,ds\right\},\qquad {}_tq_{x_1x_2\cdots x_m}=\int_0^t{}_sp_{x_1x_2\cdots x_m}\mu_{x_1+s,x_2+s,\cdots,x_m+s}\,ds,
$$

$$
{}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}=\exp\left\{-\int_0^t\mu_{\overline{x_1+s,x_2+s,\cdots,x_m+s}}\,ds\right\},\qquad {}_tq_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}=\int_0^t{}_sp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}\mu_{\overline{x_1+s,x_2+s,\cdots,x_m+s}}\,ds,
$$

$$
{}_{t|}q_{x_1x_2\cdots x_m}=\int_t^{t+1}{}_sp_{x_1x_2\cdots x_m}\mu_{x_1+s,x_2+s,\cdots,x_m+s}\,ds,\quad {}_{t|}q_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}=\int_t^{t+1}{}_sp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}\mu_{\overline{x_1+s,x_2+s,\cdots,x_m+s}}\,ds.
$$

共存の死力について ${}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}={}_tp_{x_1}{}_tp_{x_2}\cdots{}_tp_{x_m}$ であるから、積の微分の公式と (14.3) より次を得る。

命題 14.2　$\mu_{x_1+t,x_2+t,\cdots,x_m+t}=\mu_{x_1+t}+\mu_{x_2+t}+\cdots+\mu_{x_m+t}$.

最終生存者の死力については定理 3.3 (1) より

$$\frac{d}{dt}{}_tq_x = \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) = {}_tp_x\mu_{x+t}$$

となるので、${}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} = 1 - {}_tq_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}} = 1 - {}_tq_{x_1}{}_tq_{x_2}\cdots{}_tq_{x_m}$ の両辺を t について微分することで、次を得る。$m = 2, 3$ の場合を述べたが、もちろん一般の m 人の場合も同様の式が成り立つ。

命題 14.3 (1) ${}_tp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{x+t,y+t}} = {}_tp_x\mu_{x+t}{}_tq_y + {}_tq_x{}_tp_y\mu_{y+t}$,
(2) ${}_tp_{\overline{xyz}}\mu_{\overline{x+t,y+t,z+t}} = {}_tp_x\mu_{x+t}{}_tq_y{}_tq_z + {}_tq_x{}_tp_y\mu_{y+t}{}_tq_z + {}_tq_x{}_tq_y{}_tp_z\mu_{z+t}$.

④ 条件つき連合生命確率

$(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ の死亡する順序を問題とする生命確率を考える。
<u>(x) と (y) の場合:</u> 以下の記号を導入する。

${}_tq^{\,1}_{xy}$ で (x) の死亡が t 年以内に起こり、その時点で (y) は生存している確率を、
${}_{t|}q^{\,1}_{xy}$ で (x) の死亡が t 年から $t+1$ 年までの間に起こり、その時点で (y) は生存している確率を表す。
${}_tq^{\,2}_{xy}$ で (x) の死亡が t 年以内に起こり、その時点で (y) は死亡している生存している確率を、
${}_{t|}q^{\,2}_{xy}$ で (x) の死亡が t 年から $t+1$ 年までの間に起こり、その時点で (y) は死亡している確率を表す。

命題 14.4 次が成立する。

(1) ${}_tq^{\,1}_{xy} = \displaystyle\int_0^t {}_sp_x\mu_{x+s}{}_sp_y\,ds$, (2) ${}_{t|}q^{\,1}_{xy} = \displaystyle\int_t^{t+1} {}_sp_x\mu_{x+s}{}_sp_y\,ds$

(3) ${}_tq^{\,2}_{xy} = \displaystyle\int_0^t {}_sp_x\mu_{x+s}{}_sq_y\,ds$, (4) ${}_{t|}q^{\,2}_{xy} = \displaystyle\int_t^{t+1} {}_sp_x\mu_{x+s}{}_sq_y\,ds$

(1) の式は「(x) が s 年 $(0 < s < t)$ 生存し死力によって $x + s$ 歳で死亡するがその時点で (y) は生存している」、(3) も同様に「(x) が s 年 $(0 < s < t)$ 生存し死力によって $x + s$ 歳で死亡するがその時点で (y) は死亡している」とすると覚えやすい。(2), (4) も同様である。

証明: (1) Λ_x, Λ_y でそれぞれ $(x), (y)$ の余命の余命を表すとき、Λ_x と Λ_y は独立なので、その同時密度関数は ${}_up_x\mu_{x+u}{}_vp_y\mu_{y+v}$ となる。よって、

$$\begin{aligned}
{}_tq^{\,1}_{xy} &= P(0 \le \Lambda_x < t, \Lambda_x < \Lambda_y) \\
&= \iint_D {}_up_x\mu_{x+u}{}_sp_y\mu_{y+s}\,duds \quad ただし\ \ D = \{(u,s); 0 \le u < t, u < s\} \\
&= \int_0^t {}_up_x\mu_{x+u}\left(\int_u^\infty {}_sp_y\mu_{y+s}\,ds\right)du = \int_0^t {}_up_x\mu_{x+u}\left(\Big[-{}_sp_y\Big]_u^\infty\right)du \\
&= \int_0^t {}_up_x\mu_{x+u}\{0 - (-{}_up_y)\}\,du = \int_0^t {}_up_x\mu_{x+u}{}_up_y\,du.
\end{aligned}$$

(2)–(4) はそれぞれ ${}_{t|}q^{\,1}_{xy} = P(t \le \Lambda_x < t+1, \Lambda_x < \Lambda_y)$,

$$ {}_tq^{\,2}_{xy} = P(0 \le \Lambda_y < \Lambda_x < t), \qquad {}_{t|}q^{\,2}_{xy} = P(t \le \Lambda_x < t+1, 0 \le \Lambda_y < \Lambda_x)$$

に注意すれば同様に証明できるので、演習問題とする。 □

<u>3 人の場合:</u>
(i) ${}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z}$ で (y) の死亡が t 年から $t+1$ 年までの間に起こり、その時点で (x) は死亡し、(z) は生存している確率を表す。このとき、$\Lambda_x, \Lambda_y, \Lambda_z$ でそれぞれ $(x), (y), (z)$ の余命を表すとき、命題 14.4 の証明と同様に

$${}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = P(t \le \Lambda_y < t+1, \Lambda_x < \Lambda_y < \Lambda_z) = \int_t^{t+1} {}_up_y\mu_{y+u}{}_uq_x{}_up_z\,du$$

が示させる。これは、「(y) が u 年 $(t < u < t+1)$ 生存し死力によって $y+u$ 歳で死亡するがその時点で (x) は死亡しており、(z) は生存している」と覚えるとよい。

(ii) ${}_{t|}q_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}}$ で (z) の死亡が t 年から $t+1$ 年までの間に起こり、その時点で (x), (y) の順にともに死んでいる確率を表す。このとき、

$$ {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} = P(t \le \Lambda_z < t+1, \Lambda_x < \Lambda_y < \Lambda_z) = \int_t^{t+1} {}_up_z\mu_{z+u}\,{}_uq_{x\overset{2}{y}}\,du. $$

命題 14.5 次が成立する。

$$ {}_tq_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}} = P(0 \le \Lambda_z < t, \Lambda_x < \Lambda_y < \Lambda_z) = \int_0^t {}_up_z\mu_{z+u}\,{}_uq_{x\overset{2}{y}}\,du = \int_0^t {}_sp_y\mu_{y+s}\,{}_sq_x\,{}_sp_z\,{}_{t-s}q_{z+s}\,ds. $$

左の積分は「(z) が u 年 $(0 < u < t)$ 生存し $x+u$ 歳で死亡するがその時点で $(x), (y)$ の順にともに死亡している」、右の積分は「(y) が u 年 $(0 < u < t)$ 生存し $y+u$ 歳で死亡するがその時点で (x) は死亡、(z) は生存している、$z+u$ 歳になった (z) もその後 $t-u$ 年以内に死亡する」と理解でき等しいとわかるが、その積分が一致することを数式で証明しておこう。

証明: 2 つの積分値が一致することのみ示す。

$$ \int_0^t {}_up_z\mu_{z+u}\,{}_uq_{x\overset{2}{y}}\,du = \int_0^t {}_up_z\mu_{z+u}\left(\int_0^u {}_sp_y\mu_{y+s}\,{}_sq_x\,ds\right)du = \int_0^t \left(\int_s^t {}_up_z\mu_{z+u}\,du\right){}_sp_y\mu_{y+s}\,{}_sq_x\,ds. $$

ここで右辺の括弧内の積分で ${}_up_z = {}_sp_z\,{}_{u-s}p_{z+s}$ と書き直し $\tau = u-s$ と変数変換すると

$$ \int_s^t {}_up_z\mu_{z+u}\,du = {}_sp_z\int_s^t {}_{u-s}p_{z+s}\mu_{z+s+u-s}\,du = {}_sp_z\int_0^{t-s} {}_\tau p_{z+s}\mu_{z+s+\tau}\,d\tau = {}_sp_z\,{}_{t-s}q_{z+s}. $$

これを代入して $\displaystyle\int_0^t {}_sp_y\mu_{y+s}\,{}_sq_x\left(\int_s^t {}_up_z\mu_{z+u}\,du\right)ds = \int_0^t {}_sp_y\mu_{y+s}\,{}_sq_x\,{}_sp_z\,{}_{t-s}q_{z+s}\,ds$ を得る。 □

(iii) ${}_tq_{x\overset{2}{y}z}$ で $(x), (y), (z)$ のうち (y) の死亡が t までに 2 番目に起こる確率を表す。

例題 14.1 $(x), (y), (z)$ の死力がそれぞれ c_1, c_2, c_3 のとき ${}_tq_{x\overset{2}{y}z}$ を求めよ。

解: ${}_tp_x = \exp\Big(-\displaystyle\int_0^t \mu_{x+s}\,ds\Big) = e^{-c_1t}$, ${}_tp_y = e^{-c_2t}$, ${}_tp_z = e^{-c_3t}$ より、

$$ \begin{aligned} {}_tq_{x\overset{2}{y}z} &= {}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} + {}_tq_{x\overset{2}{y}\underset{1}{z}} = \int_0^t {}_up_y\mu_{y+u}\,{}_uq_x\,{}_up_z\,du + \int_0^t {}_up_y\mu_{y+u}\,{}_up_x\,{}_uq_z\,du \\ &= \quad (\text{上記を代入し計算する。演習問題とする}) \\ &= \frac{c_2}{c_1+c_2}\{1-e^{-(c_1+c_2)t}\} + \frac{c_2}{c_2+c_3}\{1-e^{-(c_2+c_3)t}\} - \frac{2c_2}{c_1+c_2+c_3}\{1-e^{-(c_1+c_2+c_3)t}\}. \end{aligned} $$
□

(iv) ${}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2:3}{y}z}$ で (y) の死亡が t 年から $t+1$ 年までの間に 2 番目または 3 番目に起こり、(x) は最初に死んでいる確率を表す。

$$ {}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2:3}{y}z} = {}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} + {}_tq_{\underset{1}{x}\overset{3}{y}\underset{2}{z}}. $$

(v) ${}_tp_{\frac{[r]}{x_1x_2\cdots x_m}}$ で t 年後に $(x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$ のうちちょうど r 人が生存している確率を表す。次が成立することに注意する。

$$ \begin{aligned} {}_tp_{\frac{[2]}{xyz}} &= {}_tp_x\,{}_tp_y\,{}_tq_z + {}_tp_x\,{}_tq_y\,{}_tp_z + {}_tq_x\,{}_tp_y\,{}_tp_z, \\ {}_tq_{\overset{2}{x}yzw} &= \int_0^t {}_sp_x\mu_{x+s}\,{}_sp_{\frac{[2]}{yzw}}\,ds, \\ {}_{t|}q_{\overset{k}{x_1}x_2\cdots x_n} &= \int_t^{t+1} {}_sp_{x_1}\mu_{x_1+s}\,{}_sp_{\frac{[n-k]}{x_2\cdots x_n}}\,ds \end{aligned} $$

(vi) ${}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,r}$ で t 年後に $(x_1),(x_2),\ldots,(x_m)$ のうち少なくとも r 人が生存している確率を表す。

$$ {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,r} = \sum_{k=r}^{m} {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,[k]}. $$

注意: ${}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,m} = {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}$, ${}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}^{\,1} = {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}$ となっている。通常は右辺を用いる。

⑤ 最終生存者および共存に関する条件つき連合生命確率

(i) ${}_{t|}q_{\overset{1}{x},\overline{yz}}$ で (x) の死亡が t 年から $t+1$ 年までの間に起こり、その時点で (y) と (z) の最終生存者は生存している確率を表す。

$$ \begin{aligned} {}_{t|}q_{\overset{1}{x},\overline{yz}} &= \int_t^{t+1} {}_sp_x\mu_{x+s}\,{}_sp_{\overline{yz}}\,ds = \int_t^{t+1} {}_sp_x\mu_{x+s}({}_sp_y + {}_sp_z - {}_sp_{yz})\,ds \\ &= {}_{t|}q_{\overset{1}{x}y} + {}_{t|}q_{\overset{1}{x}z} - {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yz}. \end{aligned} $$

(ii) ${}_{t|}q_{\overset{1}{\overline{xy}},z}$ で (x) と (y) の最終生存者の死亡が t 年から $t+1$ 年までの間に起こり、その時点で (z) は生存している確率を表す。命題 14.3 (1) より

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{\overline{xy}},z} = \int_t^{t+1} {}_sp_{\overline{xy}}\mu_{\overline{x+s,y+s}}\,{}_sp_z\,ds = \int_t^{t+1} ({}_sp_x\mu_{x+s}\,{}_sq_y + {}_sq_x\,{}_sp_y\mu_{y+s})\,{}_sp_z\,ds = {}_{t|}q_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z} + {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z}. $$

(iii) ${}_{t|}q_{\overset{1}{\overparen{xy}},z}$ で (x) と (y) の共存が t 年から $t+1$ 年までの間に壊れ、その時点で (z) は生存している確率を表す。

$$ {}_{t|}q_{\overset{1}{\overparen{xy}},z} = \int_t^{t+1} {}_sp_{xy}\mu_{x+s,y+s}\,{}_sp_z\,ds = \int_t^{t+1} {}_sp_x\,{}_sp_y(\mu_{x+s} + \mu_{y+s})\,{}_sp_z\,ds = {}_{t|}q_{\overset{1}{x}yz} + {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}z}. $$

ここで、$\overparen{xy}$ は $(x),(y)$ の共存を表す。

問題 14.2 次を示せ。

(i) ${}_{t|}q_{\overset{2}{x},\overline{yz}} = {}_{t|}q_{\overset{3}{x}yz}$. ただし、${}_{t|}q_{\overset{2}{x},\overline{yz}}$ で (x) の死亡が t 年から $t+1$ 年までの間に起こり、その時点で (y) と (z) の最終生存者は死亡している確率を表す。

(ii) ${}_{t|}q_{\overset{2}{\overline{xy}},z} = {}_{t|}q_{\overset{3}{x}yz} + {}_{t|}q_{x\overset{3}{y}z}$. ただし、${}_{t|}q_{\overset{2}{\overline{xy}},z}$ で (x) と (y) の最終生存者の死亡が t 年から $t+1$ 年までの間に起こり、その時点で (z) は死亡している確率を表す。

(iii) ${}_{t|}q_{\overset{2}{\overparen{xy}},z} = {}_{t|}q_{\overset{2}{x}y\underset{1}{z}} + {}_{t|}q_{x\overset{2}{y}\underset{1}{z}}$. ただし、${}_{t|}q_{\overset{2}{\overparen{xy}},z}$ で (x) と (y) の共存が t 年から $t+1$ 年までの間に壊れ、その時点で (z) は死亡している確率を表す。

15 連合生命に関する保険と年金

この部分は今まで学んだ記号とほぼ同じなので、容易に暗記できると思います。

- 連生保険と連生年金

(1) 連生生存保険 $A_{x_1x_2\cdots x_m:\overset{1}{\overline{n}|}} = v^n\,{}_np_{x_1x_2\cdots x_m}$.

(2) 連生定期保険

期末払 $A_{\overset{1}{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_{t-1|}q_{x_1x_2\cdots x_m}$,

即時払 $\overline{A}_{\overset{1}{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n}|} = \displaystyle\int_0^n v^t\,{}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}\mu_{x_1+t,x_2+t,\cdots,x_m+t}\,dt$.

(3) 連生養老保険

$$ A_{x_1x_2\cdots x_m:\overline{n}|} = A_{\overset{1}{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n}|} + A_{x_1x_2\cdots x_m:\overset{1}{\overline{n}|}}, \qquad \overline{A}_{x_1x_2\cdots x_m:\overline{n}|} = \overline{A}_{\overset{1}{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n}|} + A_{x_1x_2\cdots x_m:\overset{1}{\overline{n}|}}. $$

(4) 連生生命年金

期始払 $\ddot{a}_{x_1x_2\cdots x_m:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}$, 期末払 $a_{x_1x_2\cdots x_m:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tp_{x_1x_2\cdots x_m}$.

定理 6.1 と同様に次が成立する。

$$A_{x_1x_2\cdots x_m:\overline{n|}} = 1 - d\ddot{a}_{x_1x_2\cdots x_m:\overline{n|}}.$$

• 最終生存者についての生命保険と年金

$$A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overset{1}{\overline{n|}}} = v^n {}_np_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}},$$

$$A_{\overset{1}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}, \qquad \overline{A}_{\overset{1}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}:\overline{n|}} = \int_0^n v^t {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}\mu_{\overline{x_1+t,x_2+t,\cdots,x_m+t}}\,dt,$$

$$A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n|}} = A_{\overset{1}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}:\overline{n|}} + A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overset{1}{\overline{n|}}}, \qquad \overline{A}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n|}} = \overline{A}_{\overset{1}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}:\overline{n|}} + A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overset{1}{\overline{n|}}},$$

$$\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}, \qquad a_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tp_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}.$$

次が成り立つ： $A_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n|}} = 1 - d\ddot{a}_{\overline{x_1x_2\cdots x_m}:\overline{n|}}$.

また、平準年払の場合は $P_{xy:\overline{n|}} = \dfrac{A_{xy:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n|}}}$, $P_{\overline{xy}:\overline{n|}} = \dfrac{A_{\overline{xy}:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n|}}}$ などと定義する。責任準備金は以下のようになる。

$$ {}_tV_{xy:\overline{n|}} = A_{x+t,y+t:\overline{n-t|}} - P_{xy:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t|}},$$

$$ {}_tV_{\overline{xy}:\overline{n|}} = \begin{cases} A_{\overline{x+t,y+t}:\overline{n-t|}} - P_{\overline{xy}:\overline{n|}}\ddot{a}_{\overline{x+t,y+t}:\overline{n-t|}}, & (x), (y) \text{ の共存中}, \\ A_{x+t:\overline{n-t|}} - P_{\overline{xy}:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}, & (x) \text{ のみが生存}, \\ A_{y+t:\overline{n-t|}} - P_{\overline{xy}:\overline{n|}}\ddot{a}_{y+t:\overline{n-t|}}, & (y) \text{ のみが生存}. \end{cases}$$

ちょうど r 人が生存している場合の生命年金は $a_{\overset{[r]}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tp_{\overset{[r]}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}}$,

r 人以上が生存している場合の生命年金は $a_{\overset{r}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tp_{\overset{r}{\overline{x_1x_2\cdots x_m}}}$ などの記号を用いる。

• 計算基数

$$D_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)}l_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)}l_xl_y, \qquad N_{xy} = D_{xy} + D_{x+1,y+1} + \cdots,$$

$$C_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+1}d_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+1}(l_xl_y - l_{x+1}l_{y+1}), \qquad M_{xy} = C_{xy} + C_{x+1,y+1} + \cdots,$$

$$\overline{C}_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}}d_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}}(l_xl_y - l_{x+1}l_{y+1}), \qquad \overline{M}_{xy} = \overline{C}_{xy} + \overline{C}_{x+1,y+1} + \cdots$$

などと定義する。これを用いると

$$\ddot{a}_{xy:\overline{n|}} = \frac{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}{D_{xy}}, \qquad A_{xy:\overline{n|}} = \frac{M_{xy} - M_{x+n,y+n} + D_{x+n,y+n}}{D_{xy}},$$

$$ {}_m\overline{P}_{\overset{1}{xy}:\overline{n|}} = \frac{\overline{A}_{\overset{1}{xy}:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{xy:\overline{m|}}} = \frac{\overline{M}_{xy} - \overline{M}_{x+n,y+n}}{N_{xy} - N_{x+m,y+m}}$$

などと表される。

注意 15.1 最終生存者に関する計算基数 $D_{\overline{xy}}$ のような記号は使わないようである。このため、例えば $A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}}$ の場合 (14.1) より

$$\begin{aligned} {}_{t-1|}q_{\overline{xy}} &= {}_{t-1}p_{\overline{xy}} - {}_tp_{\overline{xy}} = {}_{t-1}p_x + {}_{t-1}p_y - {}_{t-1}p_{xy} - \left({}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}\right) \\ &= {}_{t-1|}q_x + {}_{t-1|}q_y - {}_{t-1|}p_{xy} \end{aligned}$$

となることに注意して

$$A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q_{\overline{xy}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \left({}_{t-1|}q_x + {}_{t-1|}q_y - {}_{t-1|}p_{xy}\right)$$

$$= A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} + A^{\ 1}_{y:\overline{n}|} - A^{\ 1}_{\overline{xy}:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{M_y - M_{y+n}}{D_y} - \frac{M_{xy} - M_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$

と表す。

● 条件つき連生保険

まず、次に注意する。

$$_{t|}q^{\ 1}_{xy} = \int_t^{t+1} {}_up_x\mu_{x+u}{}_up_y\,du \fallingdotseq \int_t^{t+1} {}_up_x\mu_{x+u}\,du\,{}_{t+\frac{1}{2}}p_y = {}_{t|}q_x\ {}_{t+\frac{1}{2}}p_y = \frac{d_{x+t}l_{y+t+\frac{1}{2}}}{l_xl_y}.$$

これを踏まえて

$$C^{\ 1}_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+1}d_xl_{y+\frac{1}{2}}, \qquad M^{\ 1}_{xy} = C^{\ 1}_{xy} + C^{\ \ \ 1}_{x+1,y+1} + \cdots,$$
$$\overline{C}^{\ 1}_{xy} = v^{\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}}d_xl_{y+\frac{1}{2}}, \qquad \overline{M}^{\ 1}_{xy} = \overline{C}^{\ 1}_{xy} + \overline{C}^{\ \ \ 1}_{x+1,y+1} + \cdots$$

などと定義する。これを用いて

$$A^{\ 1}_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n v^t\,{}_{t-1|}q^{\ 1}_{xy} = \frac{M^{\ 1}_{xy} - M^{\ \ \ 1}_{x+n,y+n}}{D_{xy}},$$
$$\overline{A}^{\ 1}_{xy:\overline{n}|} = \int_0^n v^t\,{}_tp_x\mu_{x+t}{}_tp_y\,dt = \frac{\overline{M}^{\ 1}_{xy} - \overline{M}^{\ \ \ 1}_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$

などと表される。ただし、$C^{\ 2}_{xy}$ の記号も用いないようなので、$A^{\ 2}_{xy:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^n v^t\,{}_{t-1|}q^{\ 2}_{xy}$ については

$$_{t-1|}q^{\ 2}_{xy} = \int_{t-1}^t {}_sp_x\mu_{x+s}{}_sq_y\,ds = \int_{t-1}^t {}_sp_x\mu_{x+s}(1 - {}_sp_y)\,ds = {}_{t-1|}q_x - {}_{t-1|}q^{\ 1}_{xy}$$

に注意して

$$A^{\ 2}_{xy:\overline{n}|} = A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} - A^{\ 1}_{xy:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} - \frac{M^{\ 1}_{xy} - M^{\ \ \ 1}_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$$

と表すこととなる。

● 年払保険料について

特に断らない限り、**年払保険料は契約が消滅するまで**として考える。次の 2 つの例の年払保険料を考えよう。

(1)　$A^{\ 1}_{xy:\overline{n}|}$ の場合: この保険は (x) が (y) に先だって死亡すれば保険金 1 を支払って消滅し、また (y) が先に死亡すれば保険金を支払うことなく消滅することになるので、この契約は $(x), (y)$ が共存する限り継続する。従って、年払保険料は $P^{\ 1}_{xy:\overline{n}|}$ は次のようになる。

$$P^{\ 1}_{xy:\overline{n}|} = \frac{A^{\ 1}_{xy:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} = \frac{M^{\ 1}_{xy} - M^{\ \ \ 1}_{x+n,y+n}}{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}.$$

また、t 年度末の責任準備金は次のようになる。

$$_tV^{\ 1}_{xy:\overline{n}|} = A^{\ \ \ 1}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|} - P^{\ 1}_{xy:\overline{n}|}\ddot{a}_{x+t,y+t:\overline{n-t}|}$$

(2)　$A^{\ 2}_{xy:\overline{n}|}$ の場合: この保険は (x) が (y) の死亡の後に死亡すれば保険金 1 を支払って消滅し、また (x) が先に死亡すれば保険金を支払うことなく消滅することになるので、この契約は (x) の死亡により消滅する。従って、年払保険料は $P^{\ 2}_{xy:\overline{n}|}$ は次のようになる。

$$P^{\ 2}_{xy:\overline{n}|} = \frac{A^{\ 2}_{xy:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} - A^{\ 1}_{xy:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{\dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x} - \dfrac{M^{\ 1}_{xy} - M^{\ \ \ 1}_{x+n,y+n}}{D_{xy}}}{\dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}}.$$

また、t 年度末の責任準備金は (y) の生存中と死亡後を分けて考え、次のようになる。

$$
{}_tV_{\overset{2}{x}y:\overline{n|}} = \begin{cases} A_{\overset{2}{x+t},y+t:\overline{n-t|}} - P_{\overset{2}{x}y:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}, & (y)\text{ の生存中}, \\ A_{\overset{1}{x+t}:\overline{n-t|}} - P_{\overset{2}{x}y:\overline{n|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t|}}, & (y)\text{ の死亡後} \end{cases}
$$

例題 15.1 ([F], 下, p.144 (2)) 契約から m 年以内は (x) の死亡時に (y) が生存しているときに、また m 年後 $(x),(y)$ が生存しているときは (x) の死亡に際し、保険金 1 が年度末に支払われる。一方保険料は契約が消滅するまで払込まれるとしたとき、この保険の年払純保険料を求めよ。

解: 一時払保険料は $A_{\overset{1}{x}y:\overline{m|}} + v^m{}_mp_{xy}A_{x+m}$.
契約が消滅する条件は、m 年度までは $(x),(y)$ の共存であり、$m+1$ 年度以降は $(x),(y)$ の m 年度末の共存とそれ以降の (x) の生存であるため、年払保険料 P は

$$
P = \frac{A_{\overset{1}{x}y:\overline{m|}} + v^m{}_mp_{xy}A_{x+m}}{\ddot{a}_{xy:\overline{m|}} + v^m{}_mp_{xy}\ddot{a}_{x+m}}. \qquad \square
$$

例題 15.2 ([F], 下, p.117 (8)) (y) と (x) の共存中および (y) の死亡後 g 年間は (x) の生存を条件に支払われる期末払年金の現価を求めよ。

解: 第 t 年度に年金が支払われる条件は

$1 \le t \le g$ については (x) の生存、$t \ge g+1$ については (x) が生存かつ $t-g$ 年前に (y) が生存する

ことであるから、求める期末払年金の現価 a は

$$
a = a_{x:\overline{g|}} + \sum_{t=g+1}^{\infty} v^t{}_tp_x{}_{t-g}p_y.
$$

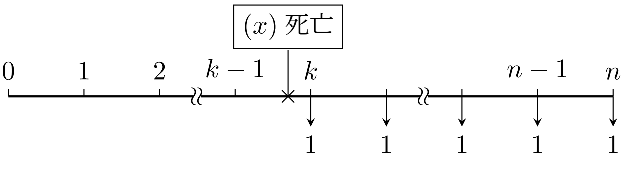
ここで、右辺第 2 項で $s=t-g$ と置換すると ${}_{s+g}p_x = {}_gp_x{}_sp_{x+g}$ より

$$
\begin{aligned}
a &= a_{x:\overline{g|}} + \sum_{s=1}^{\infty} v^{s+g}{}_{s+g}p_x{}_sp_y = a_{x:\overline{g|}} + v^g{}_gp_x\sum_{s=1}^{\infty} v^s{}_sp_{x+g}{}_sp_y \\
&= a_{x:\overline{g|}} + v^g{}_gp_xa_{x+g,y}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

16 遺族年金と復帰年金

● 遺族年金

$a_{x|y:\overline{n|}}$ で (x) の死亡後 (y) の生存を条件に年度末に年金年額 1 を n 年度末まで支払う遺族年金の現価を表す。



$$
a_{x|y:\overline{n|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t{}_tq_x{}_tp_y = \sum_{t=1}^{n} v^t(1-{}_tp_x){}_tp_y = a_{y:\overline{n|}} - a_{xy:\overline{n|}}. \tag{16.1}
$$

これは (x) が第 k 年度に死亡すれば、(y) はその年度末に $n-k+1$ 年満期の期始払生命年金を受け取るとみなせるので、もう一つの表現

$$
a_{x|y:\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} v^k{}_{k-1|}q_x{}_kp_y\ddot{a}_{y+k:\overline{n-k+1|}} \tag{16.2}
$$

を得る。(16.2) の右辺が (16.1) の第 2 式に等しいことを証明しよう。命題 5.2 (2) から

$$v^k {}_kp_y \ddot{a}_{y+k:\overline{n-k+1}|} = \ddot{a}_{y:\overline{n+1}|} - \ddot{a}_{y:\overline{k}|} = \sum_{t=k}^{n} v^t {}_tp_y \tag{16.3}$$

となることに注意して

$$\sum_{k=1}^{n} v^k {}_{k-1|}q_x {}_tp_y \ddot{a}_{y+k:\overline{n-k+1}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_{k-1|}q_x \sum_{t=k}^{n} v^t {}_tp_y = \sum_{t=1}^{n}\sum_{k=1}^{t} {}_{k-1|}q_x v^t {}_tp_y = \sum_{t=1}^{n} {}_tq_x v^t {}_tp_y$$

と示される。　□

同様に次のような記号を用いる。

$$a_{x|y} = \sum_{t=1}^{\infty} v^t {}_tq_x {}_tp_y (= a_y - a_{xy}) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k {}_{k-1|}q_x {}_kp_y \ddot{a}_{y+k},$$

$$\overline{a}_{x|y:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tq_x {}_tp_y \, dt (= \overline{a}_{y:\overline{n}|} - \overline{a}_{xy:\overline{n}|}) = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} {}_tp_y \overline{a}_{y+t:\overline{n-t}|} dt. \tag{16.4}$$

問題 16.1　(16.4) について $\displaystyle\int_0^n v^t {}_tq_x {}_tp_y \, dt = \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} {}_tp_y \overline{a}_{y+t:\overline{n-t}|} dt$ を示せ。

● 復帰年金

遺族年金で被保険者が単に $(x), (y)$ だけではなく、連生や最終生存者、さらに条件をつけた場合を考察する。

(1) $a_{x|yz:\overline{n}|}$ で (x) の死亡後 $(y), (z)$ の共存を条件にその年度末から n 年度末まで年金年額 1 を支払う、

$a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|}$ で (x) の死亡後 $(y), (z)$ の最終生存者の生存を条件にその年度末から n 年度末まで支払う年金の現価を表す。

$$a_{x|yz:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tq_x {}_tp_{yz} = a_{yz:\overline{n}|} - a_{xyz:\overline{n}|},$$

$$\begin{aligned} a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tq_x {}_tp_{\overline{yz}} = a_{\overline{yz}:\overline{n}|} - a_{x,\overline{yz}:\overline{n}|} \\ &= a_{y:\overline{n}|} + a_{z:\overline{n}|} - a_{yz:\overline{n}|} - (a_{xy:\overline{n}|} + a_{xz:\overline{n}|} - a_{xyz:\overline{n}|}). \end{aligned}$$

ここで (x) の代わりに $(x), (w)$ の共存 xw や最終生存者 $\overline{xw}$ など、また $(x), (w)$ や $(y), (z)$ についても 3 名以上で考えることもできる。

(2) $a_{x:\overline{m}||y:\overline{n}|}$ で (x) が m 年以内に死亡すればその年度末から、また m 年後 (x) が生存するときもその年度末から (y) の生存を条件に n 年度末まで年金年額 1 を支払う。

$$a_{x:\overline{m}||y:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{m} v^t {}_{t-1|}q_x {}_tp_y \ddot{a}_{y+t:\overline{n-t+1}|} + v^m {}_mp_x {}_mp_y \ddot{a}_{y+m:\overline{n-m+1}|}.$$

このとき、次が成立する。

$$a_{x:\overline{m}||y:\overline{n}|} = a_{y:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{m-1}|} \tag{16.5}$$

証明:　(16.3) と同様に命題 5.2 (2) から

$$\begin{aligned} a_{x:\overline{m}||y:\overline{n}|} &= \sum_{t=1}^{m} {}_{t-1|}q_x (\ddot{a}_{y:\overline{n+1}|} - \ddot{a}_{y:\overline{t}|}) + {}_mp_x (\ddot{a}_{y:\overline{n+1}|} - \ddot{a}_{y:\overline{m}|}) \\ &= \left(\sum_{t=1}^{m} {}_{t-1|}q_x + {}_mp_x\right)(\ddot{a}_{y:\overline{n+1}|} - \ddot{a}_{y:\overline{m}|}) + \sum_{t=1}^{m} {}_{t-1|}q_x (\ddot{a}_{y:\overline{m}|} - \ddot{a}_{y:\overline{t}|}) \\ &= 1 \cdot (\ddot{a}_{y:\overline{n+1}|} - \ddot{a}_{y:\overline{m}|}) + \sum_{t=1}^{m-1} {}_{t-1|}q_x \sum_{k=t}^{m-1} v^k {}_kp_y \quad \text{(上式第 2 項で } t = m \text{ のとき } \ddot{a}_{y:\overline{m}|} - \ddot{a}_{y:\overline{t}|}\text{=0 より)} \end{aligned}$$

$$= \ddot{a}_{y:\overline{n+1}|} - \ddot{a}_{y:\overline{m}|} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{t=1}^{k} {}_{t-1|}q_x v^k {}_kp_y = a_{y:\overline{n}|} - a_{y:\overline{m-1}|} + \sum_{k=1}^{m-1} {}_kq_x v^k {}_kp_y$$
$$= a_{y:\overline{n}|} - a_{y:\overline{m-1}|} + a_{y:\overline{m-1}|} - a_{xy:\overline{m-1}|} = a_{y:\overline{n}|} - a_{xy:\overline{m-1}|}. \qquad \square$$

(3) 条件つき連生年金

$a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|}$ で (x) が (y) に先だって死亡すれば (z) の生存を条件に (x) が死亡した年度末より n 年度末まで年金年額 1 を支払う。

$$a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tq_{\overset{1}{x}y} {}_tp_z = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q_{\overset{1}{x}y} {}_tp_z \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|}.$$

$a_{\overset{2}{x}y|z:\overline{n}|}$ で (x) が (y) の死亡の後に死亡すれば (z) の生存を条件に (x) が死亡した年度末より n 年度末まで年金年額 1 を支払う。

$$a_{\overset{2}{x}y|z:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tq_{\overset{2}{x}y} {}_tp_z = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q_{\overset{2}{x}y} {}_tp_z \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|}.$$

問題 16.2 $a_{\overset{1}{x}y|z:\overline{n}|} + a_{\overset{2}{x}y|z:\overline{n}|} = a_{x|z:\overline{n}|}$ を示せ。

[F], 下, 12 章には連合生命に関する問題が多数あります。必ず目を通しておいてください。

17 多重脱退

脱退理由が死亡だけでなく、複数ある場合を考える。ただし、一度脱退したら元に戻ることはないと仮定する。

便宜的に脱退理由が A, B, C の 3 つあるモデルを考える。l_x で x 歳の人数を、d_x^A, d_x^B, d_x^C でそれぞれ A 脱退、B 脱退、C 脱退する人数を表す。$l_x - l_{x+1} = d_x^A + d_x^B + d_x^C$ が成立する。また、次を仮定する。

(1) A, B, C の脱退はそれぞれ独立に起こる。

(2) 脱退は一年を通して一様に起こる。(脱退力を考える場合は除く。)

ここで、$\Lambda_A, \Lambda_B, \Lambda_C$ でそれぞれ A 脱退、B 脱退、C 脱退するまでの年数とする。このとき、上記の仮定は以下のようになる。

(1) $\Lambda_A, \Lambda_B, \Lambda_C$ は独立な確率変数である。

(2) $P(\Lambda_A \le t) = q_x^{A*}t,\ P(\Lambda_B \le t) = q_x^{B*}t,\ P(\Lambda_C \le t) = q_x^{C*}t\ (0 \le t \le 1)$ となる。

$q_x^{A*}, q_x^{B*}, q_x^{C*}$ をそれぞれ x 歳での絶対 A 脱退率、絶対 B 脱退率、絶対 C 脱退率という。絶対 A 脱退率とは他の理由 B, C が存在しないときの A の脱退率を表す。すなわち $q_x^{A*} = P(\Lambda_A < 1)$ である。

まず x 歳での A 脱退率 $q_x^A = \dfrac{d_x^A}{l_x}$ を絶対脱退率を用いて表そう。

命題 17.1 次が成立する。

$$q_x^A = q_x^{A*}\Big(1 - \frac{1}{2}q_x^{B*} - \frac{1}{2}q_x^{C*} + \frac{1}{3}q_x^{B*}q_x^{C*}\Big) \tag{17.1}$$

証明: $\Lambda_A, \Lambda_B, \Lambda_C$ の密度関数をそれぞれ $f_{\Lambda_A}(s), f_{\Lambda_B}(t), f_{\Lambda_C}(u)$ とする。1 年以内に A 脱退するとは、B, C の脱退より先に A 脱退すると考えられるから、$\Lambda_A, \Lambda_B, \Lambda_C$ が独立であることに注意して、

$$q_x^A = P(\Lambda_A < 1, \Lambda_A < \Lambda_B, \Lambda_A < \Lambda_C) = \iiint_D f_{\Lambda_A}(s) f_{\Lambda_B}(t) f_{\Lambda_C}(u)\, dsdtdu \qquad D : 0 \le s < 1, s < t, s < u$$
$$= \int_0^1 f_{\Lambda_A}(s)\bigg(\int_s^\infty f_{\Lambda_B}(t)\,dt \int_s^\infty f_{\Lambda_C}(u)\,du\bigg)ds = \int_0^1 q_x^{A*} P(\Lambda_B > s) P(\Lambda_C > s)\,ds$$
$$= \int_0^1 q_x^{A*}(1 - q_x^{B*}s)(1 - q_x^{C*}s)\,ds = q_x^{A*}\Big(1 - \frac{1}{2}q_x^{B*} - \frac{1}{2}q_x^{C*} + \frac{1}{3}q_x^{B*}q_x^{C*}\Big). \qquad \square$$

同様に次が成立する。

$$q_x^B = q_x^{B*}\Big(1 - \frac{1}{2}q_x^{A*} - \frac{1}{2}q_x^{C*} + \frac{1}{3}q_x^{A*}q_x^{C*}\Big), \qquad q_x^C = q_x^{C*}\Big(1 - \frac{1}{2}q_x^{A*} - \frac{1}{2}q_x^{B*} + \frac{1}{3}q_x^{A*}q_x^{B*}\Big). \tag{17.2}$$

系 17.2 次が成立する。

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = 1 - q_x^A - q_x^B - q_x^C = (1 - q_x^{A*})(1 - q_x^{B*})(1 - q_x^{C*}).$$

この式は (17.1), (17.2) を第 3 式に代入して計算すれば示せるが、

$$p_x = P(\Lambda_A > 1, \Lambda_B > 1, \Lambda_C > 1) = P(\Lambda_A > 1)P(\Lambda_B > 1)P(\Lambda_C > 1),$$

すなわち A 脱退、B 脱退、C 脱退のいずれもしない確率と解釈できる。

また、(17.1), (17.2) から次の近似式が導出される。これは丸暗記してほしい。

$$q_x^{A*} = \frac{q_x^A}{1 - \frac{1}{2}q_x^B - \frac{1}{2}q_x^C}, \qquad q_x^{B*} = \frac{q_x^B}{1 - \frac{1}{2}q_x^A - \frac{1}{2}q_x^C}, \qquad q_x^{C*} = \frac{q_x^C}{1 - \frac{1}{2}q_x^A - \frac{1}{2}q_x^B}.$$

脱退事由が A, B の 2 つの場合は脱退率を絶対脱退率で表す場合

$$q_x^A = q_x^{A*}\Big(1 - \frac{1}{2}q_x^{B*}\Big), \qquad q_x^B = q_x^{B*}\Big(1 - \frac{1}{2}q_x^{A*}\Big),$$

絶対脱退率を脱退率で表す近似式は

$$q_x^{A*} = \frac{q_x^A}{1 - \frac{1}{2}q_x^B}, \qquad q_x^{B*} = \frac{q_x^B}{1 - \frac{1}{2}q_x^A}$$

となる。

例 17.1 (死亡解約脱退残存表) 2 重脱退の例として死亡と解約がある。x 歳の人数を l_x, x 歳で死亡者数を d_x, x 歳で解約する人数を w_x と表す。$l_x - l_{x+1} = d_x + w_x$ に注意する。このとき、x 歳の死亡率は $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$, 解約率は $q_x^w = \dfrac{w_x}{d_x}$ で絶対死亡率 q_x^* は

$$q_x^* = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}q_x^w} = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}w_x}$$

となる。この $l_x - \dfrac{1}{2}w_x$ は死亡に関する経過契約といわれる。

● 脱退力

A の脱退力 μ_x^A を

$$\mu_x^A = \frac{1}{l_x}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{d_{x+\Delta t}^A - d_x^A}{\Delta t}$$

と定義する。μ_x^B, μ_x^C も同様に定義する。$l_x - l_{x+\Delta t} = d_{x+\Delta t}^A - d_x^A + d_{x+\Delta t}^B - d_x^B + d_{x+\Delta t}^C - d_x^C$ より

$$\mu_x = \mu_x^A + \mu_x^B + \mu_x^C$$

に注意する。よって、

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= \exp\Big\{-\int_0^t (\mu_{x+s}^A + \mu_{x+s}^B + \mu_{x+s}^C)\,ds\Big\},\\
q_x^A &= \int_0^1 {}_tp_x\mu_{x+t}^A\,dt, \qquad q_x^{A*} = 1 - \exp\Big\{-\int_0^1 \mu_{x+s}^A\,ds\Big\}
\end{aligned}
$$

となる。

18　定常状態にある集団

前節までは同時に出生した l_0 人の閉集団 (新規加入のない集団) を考えていた。この節では新規加入のある**開集団**を扱う。 この開集団における各世代の人口分布が時間の経過に対して不変であるとき**定常状態**にあるという。

以下、ちょうど x 歳の人が l_x 人存在する定常状態にある開集団を考える。また、人は一年を通じて一様に誕生すると仮定する。

以下の記号を導入する。

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t}\,dt = \int_x^{x+1} l_u\,du \qquad \text{で } x \text{ 歳の人の総数、すなわち、} x \text{ 歳以上 } x+1 \text{ 歳未満の人数}$$

$$T_x = \int_0^{\omega-x} l_{x+t}\,dt = \int_x^{\omega} l_u\,du \qquad \text{で } x \text{ 歳以上の人口}$$

とする。特に T_0 は集団の総人口となる。ここで ω は集団の寿命 ($l_\omega = 0$) であった。このとき、

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\,dt = \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x}\,dt = \frac{T_x}{l_x} \tag{18.1}$$

を得る。また、次が成立する。

$$x \text{ 歳以上 } x+n \text{ 歳未満で死亡する人の平均死亡年齢は} \qquad x + \frac{T_x - T_{x+n} - nl_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}, \tag{18.2}$$

$$x \text{ 歳以上 } x+n \text{ 歳の人の平均年齢は} \qquad \frac{1}{T_x - T_{x+n}} \int_x^{x+n} tl_t\,dt. \tag{18.3}$$

証明: Λ_x を (x) の余命とすると $P(\Lambda_x < n) = {}_nq_x = \dfrac{l_x - l_{x+n}}{l_x}$. また、

$$\begin{aligned}
E[\Lambda_x, \Lambda_x < n] &= \int_0^n s\,{}_sp_x\mu_{x+s}\,ds = \int_0^n s\frac{d}{ds}(-{}_sp_x)\,ds \\
&= -\Big[-s\,{}_sp_x\Big]_0^n + \int_0^n {}_sp_x\,ds = -n\,{}_np_x + \int_0^n {}_sp_x\,ds \\
&= -\frac{nl_{x+n}}{l_x} + \int_0^n \frac{l_{x+s}}{l_x}\,ds = -\frac{nl_{x+n}}{l_x} + \frac{1}{l_x}(T_x - T_{x+n}).
\end{aligned}$$

よって、x 歳以上 $x+n$ 歳未満で死亡する人の平均死亡年齢 $= x + E[\Lambda_x|\Lambda_x < n]$ より

$$x + E[\Lambda_x|\Lambda_x < n] = x + \frac{E[\Lambda_x, \Lambda_x < n]}{P(\Lambda_x < n)} = x + \frac{T_x - T_{x+n} - nl_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}.$$

Y で人口の分布に従う確率変数とすると $P(Y > t) = \dfrac{T_t}{T_0}$. すなわち、$Y$ の確率密度関数は $f_Y(t) = \dfrac{l_t}{T_0}$. よって、$x$ 歳以上 $x+n$ 歳の人の平均年齢 $= E[Y|x \le Y < x+n]$ より

$$E[Y|x \le Y < x+n] = \frac{E[Y, x \le Y < x+n]}{P(x \le Y < x+n)} = \frac{\displaystyle\int_x^{x+n} t\frac{l_t}{T_0}\,dt}{\dfrac{T_x - T_{x+n}}{T_0}} = \frac{1}{T_x - T_{x+n}} \int_x^{x+n} tl_t\,dt. \qquad \square$$

中央死亡率

x 歳の中央死亡率を m_x, x 歳以上 $x+n$ 歳未満の中央死亡率を ${}_nm_x$ とする:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}, \qquad {}_nm_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{T_x - T_{x+n}}.$$

ここで x 歳の死亡が 1 年を通じて一様に起こる ($l_{x+t} = l_x - td_x$ と表せる) とき

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{\frac{l_x + l_{x+1}}{2}} = \frac{d_x}{l_x - \frac{1}{2}d_x} = \frac{q_x}{1 - \frac{1}{2}q_x} \quad \text{より} \quad q_x = \frac{2m_x}{2+m_x},\ p_x = \frac{2-m_x}{2+m_x}.$$

同様に l_t $(x \leq t < x+n)$ が直線となるとき $T_x - T_{x+n} = \displaystyle\int_0^n l_{x+t}\,dt$ は台形の面積となるので

$$_nm_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{\frac{n}{2}(l_x + l_{x+n})} = \frac{l_x - l_{x+n}}{n\Big\{l_x - \frac{1}{2}(l_x - l_{x+n})\Big\}} = \frac{_nq_x}{n\Big(1 - \frac{1}{2}{}_nq_x\Big)} \quad \text{より} \quad {}_nq_x = \frac{n \cdot {}_nm_x}{1 + \frac{n}{2} \cdot {}_nm_x}.$$

多重脱退の場合、脱退理由が A, B, C であるとし、l_x で x 歳の人数を、d_x^A, d_x^B, d_x^C でそれぞれ x 歳で A 脱退、B 脱退、C 脱退する人数を表し、脱退の独立性や一様性など前節と同じ仮定をおく。このとき理由 A による中央死亡率を m_x^A とすると、上記と同様に

$$m_x^A = \frac{d_x^A}{L_x} = \frac{d_x^A}{\frac{l_x + l_{x+1}}{2}} = \frac{d_x^A}{l_x - \frac{1}{2}(d_x^A + d_x^B + d_x^C)} = \frac{q_x^A}{1 - \frac{1}{2}(q_x^A + q_x^B + q_x^C)}.$$

また、絶対脱退率について

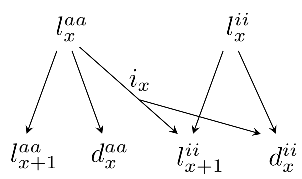
$$q_x^{A*} = \frac{q_x^A}{1 - \frac{1}{2}(q_x^B + q_x^C)} = \frac{d_x^A}{l_x - \frac{1}{2}(d_x^B + d_x^C)} = \frac{d_x^A}{L_x + \frac{1}{2}d_x^A} = \frac{m_x^A}{1 + \frac{1}{2}m_x^A}, \quad \text{特に} \quad m_x^A = \frac{2q_x^{A*}}{2 - q_x^{A*}}$$

が成り立つ。

19　就業者、就業不能者に関する様々な生命確率

就業者の母集団からの脱退が「死亡」と「就業不能」で、就業不能者の母集団からの脱退が「死亡」のみの場合を考える。以下のような記号を導入する。

l_x^{aa} で x 歳の就業者数 (a は active を表す) を
d_x^{aa} で x 歳で就業者数として死亡した人数を
i_x で x 歳で就業者から就業不能者となった人数を
l_x^{ii} で x 歳の就業不能者数 (i は invalid を表す) を
d_x^{ii} で x 歳で就業不能者として死亡した人数を表す。



以下が成立する。

$$l_x = l_x^{aa} + l_x^{ii},$$
$$d_x = d_x^{aa} + d_x^{ii},$$
$$l_x^{aa} = l_{x+1}^{aa} + d_x^{aa} + i_x,$$
$$l_x^{ii} + i_x = l_{x+1}^{ii} + d_x^{ii}.$$

これを踏まえ、以下の確率を考える。

就業者の死亡率	$q_x^{aa} = \dfrac{d_x^{aa}}{l_x^{aa}},$	
就業者の就業不能率	$q_x^{(i)} = \dfrac{i_x}{l_x^{aa}},$	$p_x^{aa} + q_x^{(i)} + q_x^{aa} = 1,$
就業者の生存率	$p_x^{aa} = \dfrac{l_{x+1}^{aa}}{l_x^{aa}},$	($p_x^{aa} + q_x^{aa} < 1$ に注意。)
上記の絶対確率	$q_x^{aa*} = \dfrac{d_x^{aa}}{l_x^{aa} - \frac{1}{2}i_x},$	$q_x^{(i)*} = \dfrac{i_x}{l_x^{aa} - \frac{1}{2}d_x^{aa}}.$
就業不能者の死亡率	$q_x^{ii} = \dfrac{d_x^{ii}}{l_x^{ii}},$	必ずしも $q_x^{ii} \leq 1$ とは限らないことに注意。

就業不能者の絶対死亡率を q_x^i で表す。

x 歳以上 $x+1$ 歳未満で就業不能だった人数は x 歳になった時点で就業不能だった l_x^{ii} 人と就業者から就業不能となった i_x 人であるがこの i_x 人は年間を通じで一様に脱退 (流入) するので、x 歳の就業不能者は $l_x^{ii}+\dfrac{1}{2}i_x$ と考えられる。このうちの d_x^{ii} 人が死亡するので、以下を得る。

$$q_x^i=\frac{d_x^{ii}}{l_x^{ii}+\dfrac{1}{2}i_x}. \tag{19.1}$$

この $\{q_x^i\}_x$ から、$q_x^i=\dfrac{d_x^i}{l_x^i}$, $l_{x+1}^i=l_x^i-d_x^i$ を満たすように $\{l_x^i,d_x^i\}_x$ を定める。そのうえで ${}_tp_x^i=\dfrac{l_{x+t}^i}{l_x^i}$, ${}_{t|}q_x^i=\dfrac{d_{x+t}^i}{l_x^i}$ なども定義される。

問題 19.1 (1) $q_x^{aa*},q_x^{(i)*}$ を用いて $q_x^{aa},q_x^{(i)}$ を表す式を述べよ。
(2) $l_x^{aa},l_x^{ii},q_x^{(i)},q_x^i$ を用いて d_x^{ii} と l_{x+1}^{ii} を表せ。

以下、いろいろな生命確率を導入する。
(1) ${}_tp_x^{aa}$ で x 歳の就業者が就業者のまま t 年後も生存する確率を表す。

$${}_tp_x^{aa}=\frac{l_{x+t}^{aa}}{l_x^{aa}}.$$

(2) q_x^a で x 歳の就業者が 1 年以内に (就業不能となってもよい) 死亡する確率を表す。

$$q_x^a=\frac{d_x^{aa}+\dfrac{1}{2}i_xq_x^i}{l_x^{aa}}. \tag{19.2}$$

この分子の $\dfrac{1}{2}i_xq_x^i$ は (19.1) と同様に就業者から就業不能へ年間を通じで一様に脱退するのでその平均 $\dfrac{1}{2}i_x$ に q_x^i を掛けたものがその死亡者数となることによる。
(3) p_x^{ai} で x 歳の就業者が 1 年以内に就業不能となり生存する確率を表す。

$$\begin{aligned}p_x^{ai}&=\frac{i_x-\dfrac{1}{2}i_xq_x^i}{l_x^{aa}} && \left(\frac{1}{2}i_xq_x^i\text{ は }x\text{ で就業者から就業不能となり死亡した人数に注意}\right)\\&=\frac{l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}p_x^i}{l_x^{aa}}. && \left(\begin{array}{c}(x+1\text{ 歳の就業不能者})-(\ x\text{ 歳の就業不能者の生き残り})\\=(\text{就業者が就業不能となり生きている人数})\end{array}\right)\end{aligned}$$

1 行目の右辺と 2 行目の右辺が等しいことを数式で証明しよう。

$$\begin{aligned}i_x-\frac{1}{2}i_xq_x^i&=l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}-d_x^{ii}-\frac{1}{2}i_xq_x^i \qquad (d_x^{ii}\text{ に (19.1) を用いた})\\&=l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}-\left(l_x^{ii}+\frac{1}{2}i_x\right)q_x^i-\frac{1}{2}i_xq_x^i\\&=l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}p_x^i. \qquad \square\end{aligned}$$

(4) ${}_tp_x^{ai}$ で x 歳の就業者が t 年以内に就業不能になり $x+t$ 歳で生存する確率を表す。(3) の 2 行目の式と同様に

$${}_tp_x^{ai}=\frac{l_{x+t}^{ii}-l_x^{ii}{}_tp_x^i}{l_x^{aa}}.$$

(5) ${}_tp_x^a$ で x 歳の就業者が t 年後生存する確率を表す。

$${}_tp_x^a={}_tp_x^{aa}+{}_tp_x^{ai}=\frac{l_{x+t}^{aa}+l_{x+t}^{ii}-l_x^{ii}{}_tp_x^i}{l_x^{aa}}=\frac{l_{x+t}-l_x^{ii}{}_tp_x^i}{l_x^{aa}}.$$

ここで (2) の q_x^a と (5) の p_x^a ($t=1$ としたもの) について $p_x^a+q_x^a=1$ となることを示しておこう。

$$\begin{aligned}
p_x^a+q_x^a &= \frac{1}{l_x^{aa}}\Big(l_{x+1}^{aa}+l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}p_x^i+d_x^{aa}+\frac{1}{2}i_xq_x^i\Big) \\
&= \frac{1}{l_x^{aa}}\Big\{l_{x+1}^{aa}+l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}+d_x^{aa}+\Big(l_x^{ii}+\frac{1}{2}i_x\Big)q_x^i\Big\} \qquad \text{((19.1) を代入)} \\
&= \frac{1}{l_x^{aa}}\Big\{l_{x+1}^{aa}+l_{x+1}^{ii}-l_x^{ii}+d_x^{aa}+d_x^{ii}\Big\} = \frac{1}{l_x^{aa}}\Big\{l_{x+1}-l_x^{ii}+d_x\Big\} \\
&= \frac{1}{l_x^{aa}}(l_x-l_x^{ii}) = 1. \quad \square
\end{aligned}$$

${}_tq_x^a$ で x 歳の就業者が t 年以内に死亡する確率を表す。${}_tp_x^a+{}_tq_x^a=1$ となる。

(6) q_x^{ai} で x 歳の就業者が 1 年以内に就業不能になり死亡する確率を表す。(3) と同様に次がわかる。

$$q_x^{ai}=\frac{\frac{1}{2}i_xq_x^i}{l_x^{aa}}=\frac{d_x^{ii}-l_x^{ii}q_x^i}{l_x^{aa}}.$$

第 2 式と第 3 式が等しいこと (2 つ目の等号) も (3) と同様に (19.1) を用いて示すことができる。

(7) ${}_{t|}q_x^{ai}$ で x 歳の就業者が就業不能者として第 t 年度 (t 年から $t+1$ 年まで) に死亡する確率を表す。これは $x+t$ 歳で死亡する就業不能者数は d_{x+t}^{ii} でその内 x 歳の時点で就業不能だった人数は $l_x^{ii}\,{}_{t|}q_x^i$ であるから次を得る。

$${}_{t|}q_x^{ai}=\frac{d_{x+t}^{ii}-l_x^{ii}\,{}_{t|}q_x^i}{l_x^{aa}}.$$

脱退力 以下のような記号を導入する。

μ_x^{ad} で就業者の死力, μ_x^{id} で就業不能者の死力, μ_x^{ai} で就業者の就業不能への瞬間発生率.

このとき、以下が成立する。

$$\begin{aligned}
&{}_tp_x^{aa}=\exp\Big\{-\int_0^t(\mu_{x+s}^{ad}+\mu_{x+s}^{ai})\,ds\Big\}, \qquad {}_tp_x^i=\exp\Big\{-\int_0^t\mu_{x+s}^{id}\,ds\Big\}, \\
&{}_tp_x^{ai}=\int_0^t {}_sp_x^{aa}\mu_{x+s}^{ai}\,{}_{t-s}p_x^i\,ds. \qquad (19.3)
\end{aligned}$$

(19.3) の右辺は「s 年まで就業者として生存し、$x+s$ 歳で就業不能になり、残り $t-s$ 年の期間は就業不能者として生存する。」と理解すれば覚えやすい。

20 就業者、就業不能者に関する年金と諸給付

以下のような、就業者、就業不能者に関する計算基数を導入する。

$$\begin{aligned}
&D_x^{aa}=v^xl_x^{aa}, \quad C_x^{aa}=v^{x+1}d_x^{aa}, \quad C_x^{(i)}=v^{x+1}i_x, \quad D_x^{ii}=v^xl_x^{ii}, \quad C_x^{ii}=v^{x+1}d_x^{ii}, \\
&N_x^{aa}=\sum_{t=0}^{\infty}D_{x+t}^{aa}, \quad M_x^{aa}=\sum_{t=0}^{\infty}C_{x+t}^{aa}, \quad M_x^{(i)}=\sum_{t=0}^{\infty}C_{x+t}^{(i)}, \quad N_x^{ii}=\sum_{t=0}^{\infty}D_{x+t}^{ii}, \quad M_x^{ii}=\sum_{t=0}^{\infty}C_{x+t}^{ii}, \\
&D_x^i=v^xl_x^i, \quad C_x^i=v^{x+1}d_x^i, \quad N_x^i=\sum_{t=0}^{\infty}D_{x+t}^i, \quad M_x^i=\sum_{t=0}^{\infty}C_{x+t}^i, \\
&\overline{C}_x^{aa}=v^{x+\frac{1}{2}}d_x^{aa}, \quad \overline{C}_x^{(i)}=v^{x+\frac{1}{2}}i_x, \quad \overline{C}_x^{ii}=v^{x+\frac{1}{2}}d_x^{ii}, \quad \overline{C}_x^{i}=v^{x+\frac{1}{2}}d_x^{i}, \quad \cdots.
\end{aligned}$$

就業不能に関する各種年金について

(1) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa}$ で x 歳の就業者が就業期間中、年額 1 支払われる期始払い n 年有期年金の現価を表す。

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa}=\sum_{t=0}^{n-1}v^t\,{}_tp_x^{aa}=\frac{N_x^{aa}-N_{x+n}^{aa}}{D_x^{aa}}.$$

(2) $\ddot{a}^{i}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳の就業不能者が生存する限り年額 1 支払われる期始払い n 年有期年金の現価を表す。

$$\ddot{a}^{i}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp^i_x = \frac{N^i_x - N^i_{x+n}}{D^i_x}.$$

(3) $\ddot{a}^{a}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳の就業者が生存する限り年額 1 支払われる期始払い n 年有期年金の現価を表す。

$$\begin{aligned}\ddot{a}^{a}_{x:\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp^a_x = \sum_{t=0}^{n-1} v^t \frac{l_{x+t} - l^{ii}_x {}_tp^i_x}{l^{aa}_x} \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} v^t \frac{l_{x+t}}{l^{aa}_x} - \frac{l^{ii}_x}{l^{aa}_x} \sum_{t=0}^{n-1} v^t {}_tp^i_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D^{aa}_x} - \frac{D^{ii}_x}{D^{aa}_x} \cdot \frac{N^i_x - N^i_{x+n}}{D^i_x}.\end{aligned}$$

(4) $a^{ai}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳の就業者が就業不能となった年度末より生存中契約時点から n 年度末まで年額 1 を支払う年金の現価を表す。

$$a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_tp^{ai}_x = \sum_{t=1}^{n} v^t ({}_tp^a_x - {}_tp^{aa}_x) = a^a_{x:\overline{n}|} - a^{aa}_{x:\overline{n}|}.$$

(5) $a^{a(i:\overline{m}|)}_{x:\overline{n}|}$ $(m < n)$ で x 歳の就業者が m 年以内に就業不能となったとき、その年度末より生存中契約時点から n 年度末まで年額を 1 支払う年金の現価を表す。

$$a^{a(i:\overline{m}|)}_{x:\overline{n}|} = a^{ai}_{x:\overline{n}|} - v^m {}_mp^{aa}_x a^{ai}_{x+m:\overline{n-m}|}.$$

この右辺の第 2 項は $m+1$ 年度以降に就業不能になった場合には年金が支払われないことによる。

問題 20.1 (1) $\sum_{t=1}^{k} {}_{t-1}p^{aa}_x p^{ai}_{x+t-1} {}_{k-t}p^i_{x+t} = {}_kp^{ai}_x$ を示せ。

(2) $a^{ai}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1}p^{aa}_x p^{ai}_{x+t-1} \ddot{a}^i_{x+t:\overline{n-t+1}|}$ を示せ。ヒント: $v^t \ddot{a}^i_{x+t:\overline{n-t+1}|} = \sum_{k=t}^{n} v^k {}_{k-t}p^i_{x+t}$ に注意し問題の式に代入し、$\sum$ の順序を交換した上で、(1) を用いよ。

(3) $a^{a(i:\overline{m}|)}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{m} v^t {}_{t-1}p^{aa}_x p^{ai}_{x+t-1} \ddot{a}^i_{x+t:\overline{n-t+1}|}$ $(m < n)$ を示せ。

就業不能に関する給付について

(1) $\overline{A}^{(i)}_{x:\overline{n}|}$ で x 歳の就業者が n 年以内に就業不能となったとき一時給付金 1 を即時に支払う契約の一時払純保険料を表す。

$$\overline{A}^{(i)}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t {}_tp^{aa}_x \mu^{ai}_{x+t}\, dt = \frac{\overline{M}^{(i)}_x - \overline{M}^{(i)}_{x+n}}{D^{aa}_x}.$$

同様に、以下のような死亡給付がある。

$$\overline{A}^{aa}_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} = \int_0^n v^t {}_tp^{aa}_x \mu^{ad}_{x+t}\, dt = \frac{\overline{M}^{aa}_x - \overline{M}^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_x}, \qquad A^{aa}_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t \frac{d^{aa}_{x+t-1}}{l^{aa}_x} = \frac{M^{aa}_x - M^{aa}_{x+n}}{D^{aa}_x},$$

$$\overline{A}^{i}_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} = \int_0^n v^t {}_tp^{i}_x \mu^{id}_{x+t}\, dt = \frac{\overline{M}^{i}_x - \overline{M}^{i}_{x+n}}{D^{i}_x}, \qquad A^{i}_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} = \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q^i_x = \frac{M^{i}_x - M^{i}_{x+n}}{D^{i}_x}.$$

(2) $A^{ai}_{\substack{1\\x:\overline{n}|}}$ で就業者 (x) が就業不能となり、n 年以内に死亡したとき死亡保険金 1 をその年度末に支払う契約の一時払純保険料を表す。

$$\begin{aligned}A^{ai}_{\substack{1\\x:\overline{n}|}} &= \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q^{ai}_x = \sum_{t=1}^{n} v^t \frac{d^{ii}_{x+t-1} - l^{ii}_x {}_{t-1|}q^i_x}{l^{aa}_x} \\ &= \sum_{t=1}^{n} v^t \frac{d^{ii}_{x+t-1}}{l^{aa}_x} - \frac{l^{ii}_x}{l^{aa}_x} \sum_{t=1}^{n} v^t {}_{t-1|}q^i_x = \frac{M^{ii}_x - M^{ii}_{x+n}}{D^{aa}_x} - \frac{D^{ii}_x}{D^{aa}_x} \cdot \frac{M^i_x - M^i_{x+n}}{D^i_x}.\end{aligned}$$

例 20.1 (保険料払込免除特約) 就業者 (x) が全期払込 n 年満期養老保険に加入している。この保険に特約を付けて m 年以内 ($m < n$ とする) に就業不能になったとき、それ以降の保険料払込を免除する。いま養老保険の年払 (営業) 保険料を P' とするとき、この特約の一時払保険料は

$$P' a_{x:\overline{n-1}|}^{a(i:\overline{m}|)}$$

となる。この特約を年払いとする場合、その払込期間を m 年とすると、次のようになる。

$$P^D = \frac{P' a_{x:\overline{n-1}|}^{a(i:\overline{m}|)}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}^{aa}}.$$

責任準備金は就業者と就業不能者に分けて

$${}_tV = \begin{cases} P' a_{x+t:\overline{n-t-1}|}^{a(i:\overline{m-t}|)} - P^D \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}^{aa}, & \text{就業者の場合}, \\ P' a_{x+t:\overline{n-t-1}|}^{i}, & \text{就業不能となった者の場合}. \end{cases}$$

21　災害および疾病に関する保険

略す。