生命保険数学 問題 1

1. 次の $[\quad]$ に当てはまる適切な一つの記号を書け。

(1) $v\ddot{a}_{\overline{n}|} = [\ a_{\overline{n}|}\ ]$ (2) $v^n\ddot{s}_{\overline{n}|} = [\ \ddot{a}_{\overline{n}|}\ ]$ (3) $[\ v\ ]\ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|}$

(4) $1 + a_{\overline{n}|} = [\ \ddot{a}_{\overline{n+1}|}\ ]$ (5) $1 + \ddot{s}_{\overline{n}|} = [\ s_{\overline{n+1}|}\ ]$ (6) $1 + v[\ \ddot{a}_{\overline{n-1}|}\ ] = \ddot{a}_{\overline{n}|}$

(7) $\ddot{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1 - v^{[\ n\ ]}}{[\ d\ ]}$ (8) $a_{\overline{n}|} = \dfrac{1 - v^{[\ n\ ]}}{[\ i\ ]}$ (9) $\bar{a}_{\overline{n}|} = \dfrac{1 - v^{[\ n\ ]}}{[\ \delta\ ]}$

(10) $\ddot{s}_{\overline{n}|} = \dfrac{(1+i)^{[\ n\ ]} - 1}{[\ d\ ]}$ (11) $\ddot{a}_{\infty} = \dfrac{1}{[\ d\ ]}$ (12) $a_{\infty} = \dfrac{1}{[\ i\ ]}$

(13) $\ddot{a}_{\overline{m}|} + v^{[\ m\ ]}\ddot{a}_{\overline{n}|} = [\ \ddot{a}_{\overline{m+n}|}\ ]$ (14) $v^n = 1 - d[\ \ddot{a}_{\overline{n}|}\ ]$

(15) $\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n}|} = [\ \ddot{s}^{(k)}_{\overline{1}|}\ ]a_{\overline{n}|} = [\ \ddot{a}^{(k)}_{\overline{1}|}\ ]\ddot{a}_{\overline{n}|}$ (16) $\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n}|} = [\ \ddot{s}^{(k)}_{\overline{1}|}\ ]s_{\overline{n}|} = [\ \ddot{a}^{(k)}_{\overline{1}|}\ ]\ddot{s}_{\overline{n}|}$

(17) $a^{(k)}_{\overline{n}|} = [\ s^{(k)}_{\overline{1}|}\ ]a_{\overline{n}|} = [\ a^{(k)}_{\overline{1}|}\ ]\ddot{a}_{\overline{n}|}$ (18) $s^{(k)}_{\overline{n}|} = [\ s^{(k)}_{\overline{1}|}\ ]s_{\overline{n}|} = [\ a^{(k)}_{\overline{1}|}\ ]\ddot{s}_{\overline{n}|}$

注意: $\ddot{a}_{\infty} = 1 + v + v^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} v^k$, $a_{\infty} = v + v^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} v^k$ と定める。

ヒント: (14)–(17) は $\ddot{a}^{(k)}_{\overline{1}|}$, $a^{(k)}_{\overline{1}|}$, $\ddot{s}^{(k)}_{\overline{1}|}$, $s^{(k)}_{\overline{1}|}$ のいずれかを入れよ。

2. 次の $[\quad]$ に当てはまる適切な式を書け。

(1) $(Ia)_{\overline{n}|} = v + 2v^2 + \cdots + nv^n = \dfrac{[\ 1-(n+1)v^n + nv^{n+1}\ ]}{id}$ (v の式)

(2) $i^{(k)} = k[\ \{(1+i)^{1/k} - 1\}\ ]$ (i の式) (3) $d^{(k)} = k[\ \{1 - (1-d)^{1/k}\}\ ]$ (d の式)

(4) $\ddot{a}^{(k)}_{\overline{n}|} = \dfrac{[\ 1 - v^n\ ]}{d^{(k)}}$ (v の式) (5) $\ddot{s}^{(k)}_{\overline{n}|} = \dfrac{[\ (1+i)^n - 1\ ]}{d^{(k)}}$ (i の式)

(6) 年始資産を A, 年末資産を B, 期中の利息収入を I とするとき、その年の利回り i は $i = \left[\ \dfrac{2I}{A+B-I}\ \right]$ となる (ハーディーの公式)。

3. $i = 0.02$ のとき、次の数値を求めよ。(有効数字で 4 桁 "くらい" まで求めよ。)

(1) $v = 0.980\overset{4}{\cancel{39}}\cdots$ (2) $d = 0.0196\overset{1}{\cancel{07}}\cdots$ (3) $\ddot{a}_{\overline{8}|} = 7.47\overset{2}{\cancel{19}}\cdots$ (4) $\ddot{s}_{\overline{6}|} = 6.434\cancel{3}\cdots$

(5) $i^{(4)} = 0.01985\cancel{1}\cdots$ (6) $d^{(2)} = 0.0197\ 0\cancel{4}\cdots$ (7) $a^{(4)}_{\overline{8}|} = 7.380\cancel{1}$ (8) $s^{(2)}_{\overline{6}|} = 6.33\underset{40}{\cancel{45}}\cdots$

生命保険数学 問題2

(※): 補足あり

1. 次の[　　]に当てはまる適切な一つの記号を書け。

(1) $_nq_x = \dfrac{l_x - [\ l_{x+n}\ ]}{l_x}$

(2) $_nq_x = 1 - [\ _np_x\ ]$

(3) $_{f|}q_x = \dfrac{[\ d_{x+f}\ ]}{l_x}$

(4) $_{f|}q_x = {}_fp_x \cdot [\ q_{x+f}\ ]$

(5) $_nq_x = q_x + {}_{1|}q_x + \cdots + {}_{[\ n-1\ ]|}q_x$

(6) $\displaystyle\int_0^1 l_{x+t}\mu_{x+t}\,dt = [\ d_x\ ]$

(7) $_tq_x = \displaystyle\int_0^{[\ t\ ]} {}_sp_x [\ \mu_{x+s}\ ]\,ds$

(8) $\mathring{e}_x = \displaystyle\int_0^{[\ \omega-x\ ]} [\ _sp_x\ ]\,ds$

(9) $L_x = \displaystyle\int_0^1 [\ l_{x+s}\ ]\,ds$

(10) $[\ T_x\ ] = \displaystyle\int_x^{\omega} l_t\,dt$

(11) $m_x = \dfrac{[\ d_x\ ]}{L_x}$ (中央死亡率)

(12) $\mathring{e}_x = \dfrac{[\ T_x\ ]}{l_x}$

2. 次の[　　]に当てはまる適切な式を書け。

(13) $\dfrac{d}{dx}l_x = [\ -l_x\mu_x\ ]$

(14) $_tp_x = \exp\left(-\left[\ \int_0^t \mu_{x+s}\,ds\ \right]\right)$

(15) $\dfrac{d}{dt}{}_tp_x = [\ -{}_tp_x\,\mu_{x+t}\ ]$

(16) $\dfrac{d}{dx}{}_tp_x = [\ _tp_x(\mu_x - \mu_{x+t})\ ]$

3. $\mu_t = \dfrac{1}{\omega - t}$ $(0 \le t < \omega)$ のとき、次を求めよ。$n, \omega, x \in \mathbf{N} : 0 < n < \omega - x$ とする。

(17) $_tp_x = \dfrac{\omega - x - t}{\omega - x}$ (※)

(18) $_{f|}q_x = \dfrac{1}{\omega - x}$

(19) $_{f|n}q_x = {}_fp_x \cdot {}_nq_{x+f} = \dfrac{n}{\omega - x}$

(20) $_nm_x := \dfrac{l_x - l_{x+n}}{T_x - T_{x+n}} = \dfrac{1}{\omega - x - \frac{n}{2}}$.

(21) $\mathring{e}_x = \dfrac{\omega - x}{2}$

(22) $_n\mathring{e}_x = n\left(1 - \dfrac{n}{2(\omega - x)}\right)$. (※)

(23) $e_x = \dfrac{\omega - x - 1}{2}$.

(24) $_{n|}e_x = {}_np_x\, e_{x+n} = \dfrac{(\omega - x - n)(\omega - x - n - 1)}{2(\omega - x)}$

(25) X でこの死力での x 歳の人の余命を表す確率変数とするとき、その分散 $V(X)$.

(※)

$V(X) = \dfrac{1}{12}(\omega - x)^2$.

4. x 歳の人数が l_x 人となる社会を考える。このとき、x 歳と $x+n$ 歳の間で死亡するものの平均年齢を x, n, l_x, l_{x+n}, T_x, T_{x+n} の式で表せ。

(※)

$x + \dfrac{T_x - T_{x+n} - n\,l_{x+n}}{l_x - l_{x+n}}$.

ヒント: 0 歳の人の余命を表す確率変数を X とするとき $E[X|x \le X < x+n]$ を求めよ。

（問題2 補足）

3 (17) $${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\omega-x-s}ds\right) = \frac{\omega-x-t}{\omega-x}.$$

(22) $${}_n\mathring{e}_x = \int_0^n {}_tp_x\,dt = \int_0^n \frac{\omega-x-t}{\omega-x}dt$$
$$= \frac{1}{2(\omega-x)}\left\{(\omega-x)^2-(\omega-x-n)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2(\omega-x)}\left\{2(\omega-x)-n\right\}\cdot n = n\left(1-\frac{n}{2(\omega-x)}\right).$$

(25) $$E(X) = \mathring{e}_x = \frac{\omega-x}{2}.$$

$E(X^2) = \int_0^\infty 2t\,P(X>t)\,dt$ を用いれば

$(P(X>0)$ のとき)

$$E(X^2) = \int_0^{\omega-x} 2t\,{}_tp_x\,dt$$
$$= \int_0^{\omega-x} 2t\cdot\frac{\omega-x-t}{\omega-x}dt = \int_0^{\omega-x}\left\{2t-\frac{2t^2}{\omega-x}\right\}dt$$
$$= \left[t^2-\frac{2t^3}{3(\omega-x)}\right]_0^{\omega-x} = \frac{1}{3}(\omega-x)^2$$
$$\therefore V(X) = E(X^2)-\left(E(X)\right)^2 = \frac{1}{12}(\omega-x)^2.$$

4 ヒント を用いる: $$P(x \le X < x+n) = \frac{l_x-l_{x+n}}{l_0}.$$

$$E(X,\ x\le X<x+n) = \int_x^{x+n} t\,{}_tp_0\,\mu_t\,dt = \int_x^{x+n} t\,\frac{d}{dt}(-{}_tp_0)\,dt$$
$$= \left[-t\,{}_tp_0\right]_x^{x+n} + \int_x^{x+n} {}_tp_0\,dt = x\,{}_xp_0-(x+n)\,{}_{x+n}p_0+\frac{1}{l_0}\int_x^{x+n} l_t\,dt$$
$$= \frac{x\,l_x-(x+n)\,l_{x+n}}{l_0}+\frac{T_x-T_{x+n}}{l_0}$$
$$\therefore E(X \mid x\le X<x+n) = \frac{E(X,\ x\le X<x+n)}{P(x\le X<x+n)}$$
$$= x+\frac{T_x-T_{x+n}-n\,l_{x+n}}{l_x-l_{x+n}}$$

生命保険数学 問題3

(※) 補足あり

1. 次の [　　] に当てはまる適切な式、記号又は数値を書け。

(1) $A^1_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} [\ v^t\ ] \cdot {}_{t-1|}q_x$

(2) $A^1_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_x [\ A^1_{x+1:\overline{n-1}|}\ ]$

(3) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = 1 + vp_x \cdot [\ \ddot{a}_{x+1:\overline{n-1}|}\ ]$

(4) $A^1_{x:\overline{m+n}|} - A^1_{x:\overline{m}|} = A_{x:\overset{1}{\overline{m}|}} \cdot [\ A^1_{x+m:\overline{n}|}\ ]$

(5) $\ddot{a}_{x:\overline{m+n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = [\ {}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{m}|}\ ]$

(6) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} [\ \ddot{a}_{\overline{t}|}\ ] \cdot {}_{t-1|}q_x + [\ \ddot{a}_{\overline{n}|}\ ] \cdot {}_np_x$

(7) ${}_mP^1_{x:\overline{n}|} = \dfrac{A^1_{x:\overline{n}|}}{[\ \ddot{a}_{x:\overline{m}|}\ ]}$

(8) $a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=2}^{n} [\ a_{\overline{t-1}|}\ ] \cdot {}_{t-1|}q_x + [\ a_{\overline{n}|}\ ] \cdot {}_np_x$

(9) $[\ {}_m\bar{P}^{(m)}_{x:\overline{n}|}\ ] = \dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$

(10) $\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n [\ \bar{a}_{\overline{t}|}\ ]\, {}_tp_x\mu_{x+t}\,dt + [\ \bar{a}_{\overline{n}|}\ ] \cdot {}_np_x$

(11) $A_{x:\overline{n}|} = 1 - d [\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ ]$

(12) $vN_x - [\ N_{x+1}\ ] = M_x$

(13) $M_x = [\ D_x\ ] - dN_x$

(14) $R_x = [\ N_x\ ] - dS_x$

(15) $[\ P_{x:\overline{n}|}\ ] = \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} - d$

(16) $1 = \dfrac{1}{A_{x:\overline{n}|}} - \dfrac{d}{[\ P_{x:\overline{n}|}\ ]}$

(17) $\bar{A}_{x:\overline{n}|} = 1 - [\ \delta\ ] \cdot \bar{a}_{x:\overline{n}|}$

(※) (18) $A^1_{x:\overline{n}|} = v \cdot [\ \ddot{a}_{x:\overline{n-1}|}\ ] - a_{x:\overline{n}|}$

(※) (19) $\dfrac{1-(1+i)A_x}{1-A_{x+1}} = [\ p_x\ ]$

(※) (20) $\dfrac{A_{x+n}-A_x}{1-A_x} + \dfrac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x} = [\ 1\ ]$

(※) (21) $\sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t}A_{x+t} = l_x \cdot [\ a_x\ ]$

(22) $(IA)^1_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + vp_x \cdot [\ (IA)^1_{x+1:\overline{n-1}|}\ ]$

2. 次を計算基数を用いて表せ。

(1) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$

(2) $A_{x:\overline{n}|} = \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$

(3) ${}_{f|}A^1_{x:\overline{n}|} = \dfrac{M_{x+f} - M_{x+f+n}}{D_x}$

(4) $(Ia)_{x:\overline{n}|} = \dfrac{S_{x+1} - S_{x+n+1} - nN_{x+n+1}}{D_x}$

(5) $(I\bar{A})^1_{x:\overline{n}|} = \dfrac{\bar{R}_x - \bar{R}_{x+n} - n\bar{M}_{x+n}}{D_x}$

(6) (※) $(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \dfrac{nN_x - (S_{x+1} - S_{x+n+1})}{D_x}$

3. 生保標準生命表 1996 男性／計算基数表 (利率 $i = 2\%$) を用いて以下の数値を求めよ。

(1) ${}_{35|}\ddot{a}_{30}$ (小数第 4 位を四捨五入せよ) $= \dfrac{N_{65}}{D_{35}} = 6.098\cancel{47}$

(2) $A^1_{30:\overline{35}|} \times 1{,}000$ 万 (小数第 1 位を四捨五入せよ)

$= \dfrac{M_{30} - M_{65}}{D_{30}} \times 1000$ 万 $= 896{,}06\cancel{47}$

5.4

(問題3 補足)

1 (18) $$A^{\ 1}_{x:\overline{n}|} + a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t (\underbrace{{}_{t-1|}q_x + {}_tp_x}_{= {}_{t-1}p_x}) = v \underbrace{\sum_{t=1}^{n} v^{t-1}\, {}_{t-1}p_x}_{= \ddot{a}_{x:\overline{n-1}|}} //$$

(19) $$\frac{1-(1+i)A_x}{1-A_{x+1}} = \frac{1-(1+i)(1-d\ddot{a}_x)}{d\ddot{a}_{x+1}} = \frac{i\ddot{a}_x - i}{d\ddot{a}_{x+1}}$$

$$= \frac{i v p_x \ddot{a}_{x+1}}{d\ddot{a}_{x+1}} = p_x //$$

(20) $$\frac{A_{x+n} - A_x}{1-A_x} + \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x} = \frac{1-d\ddot{a}_{x+n} - (1-d\ddot{a}_x)}{d\ddot{a}_x} + \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x}$$

$$= \frac{\ddot{a}_x - \ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x} + \frac{\ddot{a}_{x+n}}{\ddot{a}_x} = 1 //$$

(21) $$\sum_{t=1}^{\infty} l_{x+t} A_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} l_{x+t}\, v^s\, {}_{s-1|}q_{x+t} = \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} v^s d_{x+t+s-1}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} v^s \underbrace{\sum_{t=1}^{\infty} d_{x+s+t-1}}_{= l_{x+s}} = l_x \sum_{s=1}^{\infty} v^s\, {}_sp_x = l_x \cdot a_x //$$

2 (6) $$(D\ddot{a})_{x:\overline{n}|} = \frac{1}{D_x}\{ nD_x + (n-1)D_x + \cdots + D_{x+n-1} \}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{ D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-2} + D_{x+n-1}$$
$$+ D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{x+n-2}$$
$$\vdots$$
$$+ D_x + D_{x+1}$$
$$+ D_x \}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{ N_x - N_{x+n} + N_x - N_{x+n-1} + \cdots + N_x - N_{x+2} + N_x - N_{x+1} \}$$

$$= \frac{1}{D_x}\{ nN_x - (S_{x+1} - S_{x+n+1}) \} //$$

生命保険数学 問題4

(※) 補足あり

1. 次の[　　]に当てはまる適切な式、記号又は数値を書け。ただし、(2), (8)–(12) を除き一つの記号のみを記入せよ。

(1) $_tV_{x:\overline{n}|} = [\ A_{x+t:\overline{n-t}|}\ ] - P_{x:\overline{n}|}\cdot[\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\ ]$ (将来法)

(2) $_tV_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}\cdot\left[\ \dfrac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}\ \right] - \left[\ \dfrac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}\ \right]$ (過去法, 計算基数で表せ)

(3) $_tV_{x:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{[\ \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\ ]}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$

(4) $_tV_{x:\overline{n}|} = \dfrac{P_{x:\overline{n}|} - P^{\ 1}_{x:\overline{t}|}}{[\ P_{x:\overset{1}{\overline{t}|}}\ ]}$ (※)

(5) $_tV_x = \dfrac{A_{x+t} - [\ A_x\ ]}{1 - [\ A_x\ ]}$ (※)

(6) $_tV_x = \dfrac{[\ P_{x+t}\ ] - P_x}{[\ P_{x+t}\ ] + d}$ (※)

(7) $_t\overline{V}_x = \overline{A}_{x+t} - \overline{P}_x[\ \overline{a}_{x+t}\ ]$

(8) $\dfrac{1}{D_x}\left(\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t}\cdot v^{n-t-1} + D_{x+n}\right) = [\ v^n\ ]$ (※)

(9) $_{t-1}V_{x:\overline{n}|} + [\ P_{x:\overline{n}|} - v\,q_{x+t-1}\ ] = v\,p_{x+t-1}\,{}_tV_{x:\overline{n}|}$

(10) 養老保険 $P_{x:\overline{n}|}$ の第 t 年度における貯蓄保険料は $[\ v\,{}_tV_{x:\overline{n}|} - {}_{t-1}V_{x:\overline{n}|}\ ]$.

(11) 養老保険 $P_{x:\overline{n}|}$ の第 t 年度における危険保険料は $[\ v\,q_{x+t-1}\,(1 - {}_tV_{x:\overline{n}|})\ ]$.

(12) $m < n$ のとき、$_tV_{x:\overline{m}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|} = (P_{x:\overline{m}|} - P_{x:\overline{n}|})\cdot\left[\ \dfrac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}\ \right]$. (計算基数で表せ) (※)

2. x 歳加入 n 年契約 m 年年払いの養老保険 $_mP_{x:\overline{n}|}$ について、チルメル割合 α, チルメル期間 h $(2 \le h \le m)$ とし、第1年度の純保険料を P_1、第2年度の純保険料を P_2 とする。以下の[　　]に当てはまる適切な式、記号又は数値を書け。

(13) $P_1 = {}_mP_{x:\overline{n}|} - \left[\ \alpha\left(1 - \dfrac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\right)\ \right]$

(14) $P_2 = {}_mP_{x:\overline{n}|} + \left[\ \dfrac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{h}|}}\ \right]$

全期チルメル式 $(h = m)$ とし、これが初年度定期式と一致した場合 (一つの記号で)

(15) $P_1 = v[\ q_x\ ]$

(16) $P_2 = [\ {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|}\ ]$

(17) $^{m}_{t}V^{[PT]}_{x:\overline{n}|} = [\ A_{x+t:\overline{n-t}|}\ ] - [\ {}_{m-1}P_{x+1:\overline{n-1}|}\ ]\cdot\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}$ $(t \ge 1)$

生保標準生命表 1996 男性／計算基数表 (利率 $i = 2\%$) を用いて以下の数値を求めよ。

(18) $^{25}_{10}V_{40} = [\ 0.25572\ ]$ (小数第6位を四捨五入せよ)

(19) $^{25}_{10}V^{[PT]}_{40} = [\ 0.23952\ ]$ (小数第6位を四捨五入せよ)

問題4 補足

1 (4) 過去法より

$$ {}_tV_{x:\overline{n}|} = \frac{P_{x:\overline{n}|} - \dfrac{M_x - M_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}}{\dfrac{D_{x+t}}{N_x - N_{x+t}}} = \frac{P_{x:\overline{n}|} - P^1_{x:\overline{t}|}}{P_{x:\overline{t}|}^{\ \ 1}} $$

(5)

$$ {}_tV_x = 1 - \frac{\ddot a_{x+t}}{\ddot a_x} = 1 - \frac{d\ddot a_{x+t}}{d\ddot a_x} = 1 - \frac{1-A_{x+t}}{1-A_x} = \frac{A_{x+t}-A_x}{1-A_x} $$ //

(6) $P_x = \dfrac{1}{\ddot a_x} - d$ より

$$ {}_tV_x = 1 - \frac{\dfrac{1}{\ddot a_x}}{\dfrac{1}{\ddot a_{x+t}}} = 1 - \frac{P_x + d}{P_{x+t}+d} = \frac{P_{x+t} - P_x}{P_{x+t} + d} $$

(8)

$$ \frac{1}{D_x}\left(\sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t}\cdot v^{n-t-1} + D_{x+n} \right) = \sum_{t=0}^{n-1} v^{n-t-1}\cdot v^{t+1}\,{}_{t|}q_x + v^n\,{}_np_x $$

$$ = v^n\left(\underbrace{\sum_{t=0}^{n-1} {}_{t|}q_x + {}_np_x}_{=1} \right) = v^n $$ //

(12) 過去法で支出現価が等しく $\dfrac{M_x - M_{x+t}}{D_{x+t}}$ より

$$ {}_tV_{x:\overline{m}|} - {}_tV_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{m}|}\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} - P_{x:\overline{n}|}\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} $$

$$ = \left(P_{x:\overline{m}|} - P_{x:\overline{n}|}\right)\cdot\frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}} $$ //

生命保険数学 問題5

1. 次の $\left[\quad\right]$ に当てはまる適切な式、記号又は数値を書け。

x 歳加入 n 年契約 m 年年払 養老保険 死亡保険金即時払い (生存保険金 1, 死亡保険金 1) を考える。ただし、新契約費率 新契約時にのみ保険金額 1 に対し α, 集金経費率 保険料払込のつど営業保険料 1 に対し β, 維持費率 保険料払込中は毎年始に保険金額 1 に対し γ, 保険料払済後に毎年始に保険金額 1 に対し γ' とする。

(1) 営業保険料は ${}_m\overline{P}^*_{x:\overline{n}|} = \left[\frac{1}{1-\beta}\left\{ {}_m\overline{P}_{x:\overline{n}|} + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} + \gamma + \gamma'\left(\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} - 1\right)\right\} \right]$ となる。 (p.2も参照)

$\alpha, \beta, \gamma, \gamma'$ を安全割増や営業利益を含まない経費のみを考えたものとする。

(2) 充足保険料式責任準備金 ${}^m_t\overline{V}^{[A]}_{x:\overline{n}|}$ を考えると、次の (a), (b) の差となる。

(a) 将来の支出現価 $= \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} + \beta\,{}_m\overline{P}^*_{x:\overline{n}|}\left[\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right] + \gamma\left[\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right] + \gamma'\left(\left[\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right]\right)$

(b) 将来の収入現価 $= {}_m\overline{P}^*_{x:\overline{n}|}\left[\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right]$

(3) (2) の結果に (1) を代入しを整理することで次を得る。

$${}^m_t\overline{V}^{[A]}_{x:\overline{n}|} = \overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|} - \left(\left[{}_m\overline{P}_{x:\overline{n}|}\right] + \frac{\alpha}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\right)\left[\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right] + \gamma'\left(\left[\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right]\right)$$

(4) このとき調整純保険料 $P^{[I]}$ は ${}_m\overline{P}^{[I]}_{x:\overline{n}|} = {}_m\overline{P}_{x:\overline{n}|} + P^{[\gamma]}$, $P^{[\gamma]} = \gamma + \gamma'\left(\left[\frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} - 1\right]\right)$ となる。

(5) 調整純保険料式責任準備金 ${}_tV^{[I]}$ は事業費責任準備金 ${}_tV^{[\gamma]}$ を用いて、${}^m_t\overline{V}^{[I]}_{x:\overline{n}|} = \left[{}^m_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}\right] + {}^m_t\overline{V}^{[\gamma]}_{x:\overline{n}|}$ となる。ここで、$t < m$ で ${}^m_t\overline{V}^{[\gamma]}_{x:\overline{n}|} = \left[\gamma'\left(\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} - \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}\ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|}\right)\right]$,

$t \geq m$ で ${}^m_t\overline{V}^{[\gamma]}_{x:\overline{n}|} = \left[\gamma'\,\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}\right]$ となる。

以下、γ' 中の死亡保険に対応する分を $\gamma'^{(1)} = 0.001$, 生存保険に対応する分を $\gamma'^{(2)} = 0.001$ とする。生保標準生命表 1996 男性／計算基数表 (利率 $i = 2\%$) を用いて以下の数値を求めよ。

(6) 50 歳時点で払済保険に変更した。解約返戻金 ${}_tW = 0.50$, 残りの保険期間 $n - t = 15$ 年とするとき、新しい保険金額は $S = \left[\ 0.6416\ \right]$ となる (小数第 5 位を四捨五入せよ)。 (cf. p.2)

(7) 50 歳時点で延長保険に変更した。解約返戻金 ${}_tW = 0.50$, 残りの保険期間 $n - t = 15$ 年とするとき、新しい生存保険金額は $S' = \left[\ 0.5825\ \right]$ となる (小数第 5 位を四捨五入せよ)。 (cf. p.2)

(8) 35 歳時点で延長保険に変更した。解約返戻金は ${}_tW = 0.10$ であった。このとき、延長可能な保険期間は $T = \left[\ 27\ \right]$ 年となる (整数で求めよ)。 (cf. p.2)

(9) (1) の前で述べた養老保険から、t 年経過後 $(t < m)$ に死亡保険金 2, 生存保険金 2 の養老保険 (死亡保険金即時払) に転換する。元の契約の責任準備金を用いて新しい同一の保険期間, 同一の払込期間の払済保険を購入し、新契約の保険料を、新保険金額から払済保険金額を差し引い金額に対して計算する場合、新しい保険料は $\left[{}_{m-t}\overline{P}_{x+t:\overline{n-t}|}\left(2 - \frac{{}^m_t\overline{V}_{x:\overline{n}|}}{\overline{A}_{x+t:\overline{n-t}|}}\right)\right]$ となる。
ただし、保険料および責任準備金は純保険料式のものとせよ。

(10) 保険料振替貸付において、払込遅延があった時点での既往の貸付金総額を ${}_tL$, 年払保険料を P, 貸付金に対する利率を i' とすると、$\left[({}_tL + P)(1+i')\right] \leq {}_{t+1}W$ が満足される限り、貸付が可能となる。

(1) $${}_m\bar{P}^*_{x:\overline{n}|} = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|} + \alpha + \gamma\ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma'(\ddot{a}_{x:\overline{n}|} - \ddot{a}_{x:\overline{m}|})}{(1-\beta)\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$ でもよい。

(6) $${}_tW = S(\bar{A}_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma'\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})$$

より

$$0.50 = S\left(\frac{\overset{20,237.99}{\bar{M}_{50}} - \overset{16,798.83}{\bar{M}_{65}} + \overset{23,113}{D_{65}}}{\underset{35,209}{D_{50}}} + \underset{0.002}{\gamma'}\cdot\frac{\overset{773,707}{N_{50}} - \overset{330,458}{N_{65}}}{D_{50}}\right)$$

となるから $S = 0.64159\cdots$

(7) $${}_tW = \bar{A}^{\ 1}_{x+t:\overline{n-t}|} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + S'(A_{x+t:\overset{\ 1}{\overline{n-t}|}} + \gamma'^{(2)}\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|})$$

より

$$0.50 = \frac{\bar{M}_{50} - \bar{M}_{65}}{D_{50}} + 0.001\cdot\frac{N_{50} - N_{65}}{D_{50}} + S'\left(\frac{D_{65}}{D_{50}} + 0.001\cdot\frac{N_{50} - N_{65}}{D_{50}}\right)$$

となり $S' = 0.58252\cdots$

(8) $0.10 \geqq \bar{A}^{\ 1}_{35:\overline{T}|} + \gamma'^{(1)}\ddot{a}_{35:\overline{T}|}$ となる最大の T を見つければよい。

これは $$0.10D_{35} \geqq \bar{M}_{35} - \bar{M}_{35+T} + 0.001(N_{35} - N_{35+T})$$

より $$\bar{M}_{35+T} + 0.001\cdot N_{35+T} \geqq \underset{21,473,322}{\bar{M}_{35}} + 0.001\underset{1,407,521}{N_{35}} - 0.1\cdot\underset{48,860}{D_{35}} = 17,994,843$$

$\bar{M}_x$ に着目して探すと ($\bar{M}_x$は5桁, $0.001N_x$は3桁だから)

$\bar{M}_{63} + 0.001\cdot N_{63} = 17,460,62 + 0.001\cdot 379,098 = 17,839,718$

$\bar{M}_{62} + 0.001N_{64} = \cancel{17,7\ldots}\ 17,964,89 + 0.001\cdot 404,621 = 18,169,011$

となるから. $T = 62 - 35 = 27$

生命保険数学 問題6

1. 次の[　　]に当てはまる適切な式、記号又は数値を書け。

(1) ${}_{t|}q_{xy} = {}_tp_{xy} - [\ {}_{t+1}p_{xy}\ ]$

(2) ${}_tq_{\overline{xy}} = ([\ 1\ ] - {}_tp_x)([\ 1\ ] - {}_tp_y)$

(3) ${}_{t|}q_{\overline{xy}} = {}_{t|}q_x + {}_{t|}q_y - [\ {}_{t|}q_{xy}\ ]$

(4) ${}_tp_{\overline{xy}}^{[1]} = {}_tp_x + {}_tp_y - [\ 2\,{}_tp_{xy}\ ]$

(5) $\dfrac{d\,{}_tp_{xy}}{dt} = -[\ {}_tp_{xy}\,\mu_{x+t,y+t}\ ]$

(6) ${}_tp_{\overline{xy}}\cdot\mu_{\overline{x+t,y+t}} = {}_tq_y\,{}_tp_x\,\mu_{x+t} + [\ {}_tq_x\,{}_tp_y\,\mu_{y+t}\ ]$

(7) ${}_{t|}q^1_{xyz} = \displaystyle\int_t^{t+1} {}_sp_{xyz}[\ \mu_{x+s}\ ]\,ds$

(8) ${}_{t|}q^2_{xy} = \displaystyle\int_t^{t+1} [\ {}_sq_y\ ]\,{}_sp_x\,\mu_{x+s}\,ds$

(9) ${}_tq^2_{xy} = \displaystyle\int_0^t {}_sp_{xy}\,\mu_{y+s}[\ {}_{t-s}q_{x+s}\ ]\,ds$

(10) ${}_tq^1_{xy} = {}_tq_x - [\ {}_tq^2_{xy}\ ]$

(11) ${}_tq_{\overset{1}{x}y} - {}_tq_{x\overset{2}{y}} = {}_tp_y[\ {}_tq_x\ ]$

(12) ${}_{t|}q_{\overset{2}{x}y} = {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}} + {}_tp_x\,{}_tq_y - [\ {}_{t+1}p_x\ \ {}_{t+1}q_y\ ]$

(13) ${}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = {}_{t|}q_{\overset{1}{y}z} - [\ {}_{t|}q_{x\overset{1}{y}z}\ ]$

(14) $[\ {}_tq_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}}\ ] = {}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} - {}_tq_{x\overset{2}{y}}\,{}_tp_z$

(15) ${}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2:3}{y}z} = {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} + [\ {}_{t|}q_{\underset{1}{x}\underset{2}{y}\overset{3}{z}}\ ]$

(16) ${}_tp_{\overline{xyz}}^{\,2} = {}_tp_{xy} + {}_tp_{yz} + {}_tp_{xz} - [\ 2\,{}_tp_{xyz}\ ]$

(17) ${}_tq_{\overset{3}{x}\underset{1}{y}\underset{2}{z}w} = \displaystyle\int_0^t [\ {}_sq_{z\overset{2}{w}}\ ]\,{}_sp_{xy}\,\mu_{x+s}\,ds$

(18) ${}_{t|}q_{[\overset{1}{\overline{xy}},\,z\ ]} = \displaystyle\int_t^{t+1} {}_sp_{xy}\,{}_sp_z\,\mu_{x+s,y+s}\,ds$

2. 死力 μ_x が $\mu_x = \dfrac{1}{100-x}$ $(0 \le x < 100)$ で与えられるとき、次の値を求めよ。

(19) ${}_{20}q^1_{20,40} = \dfrac{5}{24}$

(20) ${}_{20}q_{20,\overset{2}{40},\underset{1}{60}} = \dfrac{5}{72}$

(21) $\mathring{e}_{20,40} = 22.5$

(22) $\mathring{e}_{\overline{20,40}} = 47.5$

3. 死亡法則がゴムパーツの法則 $\mu_x = Bc^x$ に従うとする。次の[　　]に当てはまる適切な c^x, c^y, c^z の式を記入せよ。

(23) ${}_tq^1_{xyz} = \left[\dfrac{c^x}{c^x+c^y+c^z}\right]{}_tq_{xyz}$

(24) ${}_tq_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \left[\dfrac{c^y}{c^y+c^z}\right]{}_tq_{yz} - \left[\dfrac{c^y}{c^x+c^y+c^z}\right]{}_tq_{xyz}$

(25) ${}_\infty q^2_{xyz} = \left[\dfrac{c^x}{c^x+c^z} + \dfrac{c^x}{c^x+c^y} - \dfrac{2c^x}{c^x+c^y+c^z}\right]$

1 (11)〜(14), 2, 3 は pp.2-3 を参照のこと

1. (11) $_t q^1_{xy} - {}_t q^2_{xy} = \int_0^t ({}_sp_{xy}\mu_{x+s} - {}_sp_{xy}\mu_{x+s}\,{}_{t-s}q_{y+s})\,ds$

$$= \int_0^t {}_sp_x \mu_{x+s} \underbrace{{}_sp_y(1-{}_{t-s}q_{y+s})}_{= {}_sp_y\,{}_{t-s}p_{y+s} = {}_tp_y}ds = {}_tp_y \int_0^t {}_sp_x\mu_{x+s}\,ds = {}_tp_y\,{}_tq_x$$

(12) $_{t|}q^2_{xy} = {}_{t+1}q^2_{xy} - {}_tq^2_{xy}$

$$= {}_{t+1}q^1_{xy} - {}_{t+1}p_x\,{}_{t+1}q_y - ({}_tq^1_{xy} - {}_tp_x\,{}_tq_y)$$

(11)で x,y を入れ換えたもの

$$= {}_{t|}q^1_{xy} + {}_tp_x\,{}_tq_y - {}_{t+1}p_x\,{}_{t+1}q_y$$

(13) $_{t|}q^{2}_{x\underset{1}{y}z} = \int_t^{t+1} \underbrace{{}_sq_x}_{1-{}_sp_x}\,{}_sp_y\,\mu_{y+s}\,{}_sp_z\,ds = {}_{t|}q^1_{yz} - {}_{t|}q^1_{xyz}.$

(14) $_tq^2_{x\underset{1}{y}z} - {}_tq^2_{xy}\,{}_tp_z = \int_0^t {}_sq_x\,{}_sp_y\,\mu_{y+s}\,(\underbrace{{}_sp_z - \overset{{}_sp_z\,{}_{t-s}p_{z+s}}{{}_tp_z}}_{= {}_sp_z\,{}_{t-s}q_{z+s}})\,dt$

$$= \int_0^t {}_sq_x\,{}_sp_{yz}\,\mu_{y+s}\,{}_{t-s}q_{z+s}\,ds = {}_tq_{x\underset{1}{y}\underset{2}{\overset{3}{z}}}$$

2. ${}_tp_x = \dfrac{100-x-t}{100-x}$, ${}_tq_x = \dfrac{t}{100-x}$ に注意する。

(19) $_{20}q^1_{20,40} = \int_0^{20} {}_sp_{20}\,\mu_{20+s}\,{}_sp_{40}\,ds = \int_0^{20} \frac{\cancel{80-s}}{80}\,\frac{1}{\cancel{80-s}}\,\frac{60-s}{60}\,ds$

$$= \frac{1}{80\cdot 60}\Big(\underbrace{60\cdot 20 - \tfrac{1}{2}20^2}_{20\cdot 50}\Big) = \frac{5}{24}$$

(20) $_{20}q^2_{20,40,\underset{1}{60}} = \int_0^{20} {}_sp_{20}\,{}_sp_{40}\,\mu_{40+s}\,{}_sq_{60}\,ds$

$$= \int_0^{20} \frac{80-s}{80}\,\frac{\cancel{60-s}}{60}\,\frac{1}{\cancel{60-s}}\,\frac{s}{40}\,ds$$

$$= \frac{1}{80\cdot 60\cdot 40}\Big(\frac{1}{2}80\cdot 20^2 - \frac{1}{3}20^3\Big) = \frac{1}{24}\Big(2-\frac{1}{3}\Big) = \frac{5}{72}$$

(21) $\mathring{e}_{20,40} = \int_0^\infty {}_tp_{20,40}\,dt = \int_0^{60} \frac{80-t}{80}\,\frac{60-t}{60}\,dt$

$20s=t$: $= \int_0^3 \frac{4-s}{4}\,\frac{3-s}{3}\,20\,ds = \frac{5}{3}\int_0^3 (12-7s+s^2)\,ds$

$$= \frac{5}{3}\Big(12\cdot 3 - \frac{7}{2}\cdot 9 + \frac{1}{3}3^3\Big) = \frac{45}{2}$$

(22) ${}_t p_{\overline{20,40}} = {}_t p_{20} + {}_t p_{40} - {}_t p_{20,40}$ より

$\mathring{e}_{\overline{20,40}} = \mathring{e}_{20} + \mathring{e}_{40} - \mathring{e}_{20,40} = 40 + 30 - 22.5 = 47.5$ //

注.1 $\mu_x = \frac{1}{100-x}$ より x才の人の余命Xのp.d.f.は

$$f_X(t) = \frac{1}{100-x} \quad (0 \le t \le 100-x)$$

よって $\mathring{e}_x = E[X] = \frac{100-x}{2}$ //

注.2. ${}_t p_{\overline{20,40}} = \begin{cases} 1 - \frac{t}{80}\cdot\frac{t}{60} & (0 \le t \le 60) \\ 1 - \frac{t}{80} & (60 \le t \le 80) \end{cases}$ (← 忘れずに!!)

${}_t q_{\overline{xy}} = {}_t q_x \, {}_t q_y$ より

を用いて $\mathring{e}_{\overline{20,40}} = \int_0^{60} \left(1 - \frac{t}{80}\cdot\frac{t}{60}\right) dt + \int_{60}^{80} \left(1 - \frac{t}{80}\right) dt$ と計算してもよい.

3. ~~$\mu_x = Bc^x$ より $\mu_{xyz} = \mu_x + \mu$~~

$$\mu_{x+t,y+t,z+t} = \mu_{x+t} + \mu_{y+t} + \mu_{z+t} = Bc^t(c^x + c^y + c^z)$$

$$= \frac{c^x + c^y + c^z}{c^x} \mu_{x+t}$$ に注意すると

(23) ${}_t q^{1}_{xyz} = \int_0^t {}_s p_{xyz} \, \mu_{x+s} \, ds$

$$= \int_0^t {}_s p_{xyz} \frac{c^x}{c^x + c^y + c^z} \mu_{x+s,y+s,z+s} \, ds = \frac{c^x}{c^x + c^y + c^z} {}_t q_{xyz}$$ //

(24) ${}_t q_{\underset{1}{x}\overset{2}{y}z} = \int_0^t \underbrace{{}_s q_x}_{=1-{}_s p_x} {}_s p_{yz} \, \mu_{y+s} \, ds = \int_0^t {}_s p_{yz} \, \mu_{y+s} \, ds - \int_0^t {}_s p_{xyz} \, \mu_{y+s} \, ds$

$$= \int_0^t {}_s p_{yz} \frac{c^y}{c^y + c^z} \mu_{y+s,z+s} \, ds - \int_0^t {}_s p_{xyz} \frac{c^y}{c^x + c^y + c^z} \mu_{x+s,y+s,z+s} \, ds$$

$$= \frac{c^y}{c^y + c^z} {}_t q_{yz} - \frac{c^y}{c^x + c^y + c^z} {}_t q_{xyz}$$

(25) ${}_\infty q^{\,2}_{xyz} = {}_\infty q_{\overset{2}{x}\underset{1}{y}z} + {}_\infty q_{\overset{2}{x}y\underset{1}{z}}$

$$\overset{(24)}{=} \frac{c^x}{c^x + c^z} \underbrace{{}_\infty q_{xz}}_{=1} - \frac{c^x}{c^x + c^y + c^z} \underbrace{{}_\infty q_{xyz}}_{=1} + \frac{c^x}{c^x + c^y} \underbrace{{}_\infty q_{xy}}_{=1} - \frac{c^x}{c^x + c^y + c^z} \underbrace{{}_\infty q_{xyz}}_{=1}$$

(いつか死ぬ.)

$$= \frac{c^x}{c^x + c^z} + \frac{c^x}{c^x + c^y} - \frac{2c^x}{c^x + c^y + c^z}$$ //

生命保険数学 問題7

1. 次の[ ]に当てはまる適切な式、記号又は数値を書け (脚注に注意[1])。

(1) $\overline{A}_{xy:\overline{n}|} = 1 - \left[\ \delta\ \right]\overline{a}_{xy:\overline{n}|}$

(2) $A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n}|} = A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} + A_{\overset{1}{y}:\overline{n}|} - \left[\ A_{\overset{1}{xy}:\overline{n}|}\ \right]$

(3) $A_{\overset{1}{\overline{xy}}:\overline{n}|} = v\left[\ \ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|}\ \right] - a_{\overline{xy}:\overline{n}|}$

(4) ${}_tV_{\overline{xy}:\overline{n}|} = 1 - \dfrac{\left[\ \ddot{a}_{\overline{x+t,y+t}:\overline{n-t}|}\ \right]}{\ddot{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|}}$

(5) $a_{xy|z:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} v^t \left[\ {}_tq_{xy}\ \right] {}_tp_z$

(6) $a_{xy|z:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q_{xy}\, v^t\, {}_tp_z \left[\ \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|}\ \right]$

(7) $a_{x:\overline{m}||y:\overline{n}|} = a_{y:\overline{n}|} - \left[\ a_{xy:\overline{m-1}|}\ \right]$

(8) $a_{x|\overline{yz}:\overline{n}|} = a_{x|y:\overline{n}|} + a_{x|z:\overline{n}|} - \left[\ a_{x|yz:\overline{n}|}\ \right]$

(9) $a^1_{xy|z:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} v^t \left[\ {}_tq^1_{xy}\ \right] {}_tp_z$

(10) $a^2_{xy|z:\overline{n}|} = \displaystyle\sum_{t=1}^{n} {}_{t-1|}q^2_{xy}\, v^t\, {}_tp_z \left[\ \ddot{a}_{z+t:\overline{n-t+1}|}\ \right]$

(11) $a^1_{xy|z:\overline{n}|} - a^2_{xy|z:\overline{n}|} = \left[\ a_{x|yz:\overline{n}|}\ \right]$

(12) $\overline{A}^{\,3}_{\underset{21}{xyz}:\overline{n}|} = \displaystyle\int_0^n v^s \left[\ {}_sq^{\,2}_{yz}\ \right] {}_sp_x\, \mu_{x+s}\, ds$

(13) $A^2_{xy:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} - \left[\ A^1_{xy:\overline{n}|}\ \right]$

(14) $\overline{P}^1_{xyz:\overline{n}|} = \dfrac{\overline{A}^1_{xyz:\overline{n}|}}{\left[\ \ddot{a}_{xyz:\overline{n}|}\ \right]}$

(15) $\overline{A}^2_{xy:\overline{n}|}$ の年払保険料は $\dfrac{\overline{A}^2_{xy:\overline{n}|}}{\left[\ \ddot{a}_{x:\overline{n}|}\ \right]}$ となる。

(16) $q_x^A = q_x^{A*}\left\{\left[\ 1 - \frac{1}{2}(q_x^{B*} + q_x^{C*}) + \frac{1}{3} q_x^{B*} q_x^{C*}\ \right]\right\}$

(17) $q_x^{A*} = \dfrac{q_x^A}{\left[\ 1 - \frac{1}{2}(q_x^B + q_x^C)\ \right]}$ (近似式)　(18) $q_x^{B*} = \dfrac{2m_x^B}{2 + \left[\ m_x^B\ \right]}$ (近似式)

(19) $l_x = a - bx$ のとき、各年齢での解約率 q_x^W が死亡率 q_x の n 倍であれば、絶対死亡率は $q_x^* = 1 - \dfrac{l_x - k_1 b}{l_x - k_2 b}$, ただし、$k_1 = \left[\ \dfrac{n+2}{2(n+1)}\ \right]$, $k_2 = \left[\ \dfrac{n}{2(n+1)}\ \right]$ となる。

(20) 脱退力が $\mu_x^A = \dfrac{1}{100-x}$, $\mu_x^B = \mu_x^C = \dfrac{1}{2(80-x)}$ とするとき、${}_{20}q_{20}^A = \left[\ \dfrac{5}{24}\ \right]$.

2. 次を計算基数を用いて表せ。[2]

(21) $\ddot{a}_{xy:\overline{n}|} = \dfrac{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$

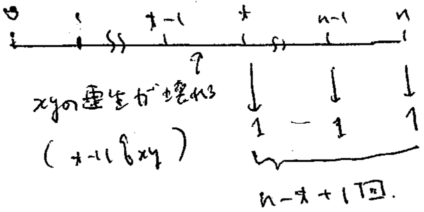
(22) $A_{\overline{xy}:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|} + A_{y:\overline{n}|} - A_{xy:\overline{n}|} = \dfrac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} + \dfrac{M_y - M_{y+n} + D_{y+n}}{D_y} - \dfrac{M_{xy} - M_{x+n,y+n} + D_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$

(23) $\overline{P}^1_{xy:\overline{n}|} = \dfrac{\overline{A}^1_{xy:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{xy:\overline{n}|}} = \dfrac{\overline{M}^1_{xy} - \overline{M}_{x+n,y+n}}{N_{xy} - N_{x+n,y+n}}$.

(24) $\overline{A}^2_{xy:\overline{n}|} \underset{(13)}{=} \overline{A}^1_{x:\overline{n}|} - \overline{A}^1_{xy:\overline{n}|} = \dfrac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x} - \dfrac{\overline{M}^1_{xy} - M_{x+n,y+n}}{D_{xy}}$ 〃

[1] (14), (15), (24) の保険料は契約が消滅するまで払い込まれるものとする。(16)–(18), (20) は脱退事由 A, B, C の 3 重脱退を考えるものとし、(16)–(19) は脱退は一年を通じて一様に起こるものとする。

[2] $D_x, N_x, M_x, \overline{M}_x, D_{xy}, N_{xy}, M_{xy}, \overline{M}_{xy}, M^1_{xy}, \overline{M}^1_{xy}$ などを用いて表せ。

1. (9) 

左図より与式を得る。

(10)も同様。

(11) $${}_tq^1_{xy} - {}_tq^2_{xy} = \int_0^t \left({}_sp_{xy}\,\mu_{x+s} - {}_sp_{xy}\,\mu_{x+s}\,{}_{t-s}q_{y+s}\right)ds$$

$$= \int_0^t {}_sp_x\,\mu_{x+s}\,\underbrace{{}_sp_y\,{}_{t-s}p_{y+s}}_{={}_tp_y}\,ds = {}_tp_y\,{}_tq_x$$

より (左辺) $= \sum_{t=1}^{n} v^t\left({}_tq^1_{xy} - {}_tq^2_{xy}\right){}_tp_z\,dt = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_tq_x\,{}_tp_{yz} = A_{x|yz:\overline{n|}}$ //

(13) ${}_tq^2_{xy} = {}_tq_x - {}_tq^1_{xy}$ より明らか。

(14) 保険の契約は x, y, z の連生が壊れるまで。

(15) 〃 は x の死亡時まで。

(16) [覚えておくこと]

考え方: X^A: 脱退事由がAのみのときの脱退までの時刻と

X^B, X^C も同様に定めると

X^A, X^B, X^C は独立で $P(X^A < s) = {}_sq_x^{A*}$ $(0 \le s \le 1)$ (B, Cも同様)

従って $f_{X^A}(s) = q_x^{A*}$

よって $q_x^A = P(X^A < 1,\ X^B > X^A,\ X^C > X^A)$

$$\underset{?}{=} \int_0^1 \underbrace{P(X^B > s)}\,P(X^C > s)\,f_{X^A}(s)\,ds$$

独立性 $= 1 - P(X^B < s) = 1 - {}_sq_x^{B*}$

$$= \int_0^1 \left(1 - {}_sq_x^{B*}\right)\left(1 - {}_sq_x^{C*}\right) q_x^{A*}\,ds = (\text{右辺})$$ //

(17) 覚えておく。

(b_x: B脱退者数)

(18) $$m_x^B = \frac{b_x}{\int_0^1 l_{x+s}\,ds} = \frac{b_x}{\frac{1}{2}(l_x + l_{x+1})}$$

$l_x - l_{x+1} = a_x + b_x + c_x$

$$q_x^{B*} \doteqdot \frac{q_x^B}{1 - \frac{1}{2}(q_x^A + q_x^C)} = \frac{b_x}{2l_x - (a_x + c_x)} = \frac{b_x}{2l_x - (l_x - l_{x+1} - b_x)}$$

$$= \frac{b_x}{l_x + l_{x+1} + b_x} = \frac{2m_x^B}{2 + m_x^B}$$ //

(19) 解約数 w_x、死亡数 d_x とすると $q_x^w = \dfrac{w_x}{l_x}$, $q_x = \dfrac{d_x}{l_x}$ で

$$w_x + d_x = l_x - l_{x+1} = b,\quad w_x = n\cdot d_x$$

$$\therefore\ d_x = \frac{1}{n+1}b,\quad w_x = \frac{n}{n+1}b.$$

$$\therefore\ 1 - q_x^* = 1 - \frac{q_x}{1-\frac{1}{2}q_x^w} = \frac{l_x - \frac{1}{2}w_x - d_x}{l_x - \frac{1}{2}w_x} = \frac{l_x - \frac{n+2}{2(n+1)}b}{l_x - \frac{n}{2(n+1)}b}$$ //

(20) $${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t (\mu_{x+s}^A + \mu_{x+s}^B + \mu_{x+s}^C)\,ds\right) \overset{(*)}{=} \frac{100-x-t}{100-x}\cdot\frac{80-x-t}{80-x}$$

(*) ド・モアブルのモデルで

$$\exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\,ds\right) = \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{\omega-x-s}ds\right) = \frac{\omega-x-t}{\omega-x}$$ を覚えておけば、

$$\exp\left(-\int_0^t (\mu_{x+s}^A + \mu_{x+s}^B + \mu_{x+s}^C)ds\right) = \cancel{\exp\left(-\int_0^t \frac{1}{100-x-s}ds\right)}$$

$$= \exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{100-x-s}\right)\cdot\exp\left(-\int_0^t \frac{ds}{80-x-s}\right)$$ と変形すればよい。

よって

$${}_{20}q_{20}^A = \int_0^{20} {}_sp_{20}\,\mu_{20+s}^A\,ds = \int_0^{20} \frac{\cancel{80-s}}{80}\cdot\frac{60-s}{60}\cdot\frac{1}{\cancel{80-s}}\,ds$$

$$= \frac{1}{80\cdot 60}\left(60\cdot 20 - \frac{1}{2}20^2\right) = \frac{5}{24}$$ //

生命保険数学 問題8

1. 次の[　　]に当てはまる適切な式、記号又は数値を書け(脚注に注意[1])。

(1) $l_{x+1}^{aa} = l_x^{aa} - d_x^{aa} - [\ i_x\ ]$

(2) $l_{x+1}^{ii} = l_x^{ii} + [\ i_x\ ] - d_x^{ii}$

(3) $[\ q_x^{(i)}\ ] = \dfrac{i_x}{l_x^{aa}}$

(4) $p_x^{aa} = 1 - q_x^{aa} - [\ q_x^{(i)}\ ]$

(5) $q_x^{aa*} = \dfrac{d_x^{aa}}{[\ l_x^{aa} - \frac{1}{2} i_x\ ]}$

(6) $q_x^{i} = \dfrac{d_x^{ii}}{[\ l_x^{ii} + \frac{1}{2} i_x\ ]}$

(7) $q_x^{a} = \dfrac{d_x^{aa} + [\ \frac{1}{2} i_x q_x^i\ ]}{l_x^{aa}}$

(8) $p_x^{ai} = \dfrac{i_x\left(1 - [\ \frac{1}{2} q_x^i\ ]\right)}{l_x^{aa}}$

(9) ${}_tp_x^{ai} = \dfrac{l_{x+t}^{ii} - [\ l_x^{ii}\ {}_tp_x^i\ ]}{l_x^{aa}}$

(10) ${}_tp_x^{a} = {}_tp_x^{ai} + [\ {}_tp_x^{aa}\ ]$

(11) ${}_tp_x^{a} = \dfrac{l_{x+t} - [\ l_x^{ii}\ {}_tp_x^i\ ]}{l_x^{aa}}$

(12) ${}_{t|}q_x^{ai} = \dfrac{[\ d_{x+t}^{ii} - l_x^{ii}\ {}_{t|}q_x^i\ ]}{l_x^{aa}}$

(13) $a_{x:\overline{n}|}^{ai} = [\ a_{x:\overline{n}|}^{a}\ ] - a_{x:\overline{n}|}^{aa}$

(14) $a_{x:\overline{n}|}^{a(i:\overline{m}|)} = a_{x:\overline{n}|}^{ai} - v^m\,{}_mp_x^{aa}\,[\ a_{x+m:\overline{n-m}|}^{ai}\ ]$

(15) 災害による入院の保険において、給付金の日額をδ, 入院4日以内は給付対象外、給付は入院日数から4日分カット、最長給付120日の場合、各入院日数毎の発生率をq^{ahi}とすると、その純保険料は $v^{\frac{1}{2}}\sum_{i=5}^{[124]}[\ q^{ahi}(i-4)\delta\ ] + v^{\frac{1}{2}}\sum_{i\geq[125]}[\ q^{ahi}\cdot 120\cdot\delta\ ]$ となる。

(16) 入院特約において、x歳加入 保険期間n年とした場合、年齢y歳の被保険者のその後1年間の入院率をq_y^{sh}, 入院した場合の平均給付日数をT_y^{sh}とすると、入院給付金日額1に対する年払平準純保険料は $P = \dfrac{\sum_{t=0}^{n-1} v^{t+\frac{1}{2}}[\ {}_tp_x\ q_{x+t}^{sh}\ T_{x+t}^{sh}\ ]}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}$ で与えられる。

2. 就業者の死力が$\mu_x^{ad} = c_1$, 就業不能瞬間発生率が$\mu_x^{ai} = c_2$, 就業不能者の死力が$\mu_x^{id} = c_3$のとき、次をc_1, c_2, c_3を用いて表せ。 但し $c_1 + c_2 \neq c_3$ とする。

(17) ${}_tp_x^{aa} = e^{-(c_1+c_2)t}$

(18) ${}_tp_x^{i} = e^{-c_3 t}$

(19) ${}_tp_x^{ai} = \dfrac{c_2}{c_1+c_2-c_3}\left(e^{-c_3 t} - e^{-(c_1+c_2)t}\right.$

(20) ${}_tp_x^{a} = \dfrac{c_2 e^{-c_3 t} + (c_1 - c_3)\, e^{-(c_1+c_2)t}}{c_1+c_2-c_3}$

3. 次を計算基数を用いて表せ。[2]

(21) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{aa} = \dfrac{N_x^{aa} - N_{x+n}^{aa}}{D_x^{aa}}$

(22) $A_{x:\overline{n}|}^{i} = \dfrac{M_x^i - M_{x+n}^i + D_{x+n}^i}{D_x^i}$

(23) $A_{x:\overline{n}|}^{(i)} = \dfrac{M_x^{(i)} - M_{x+n}^{(i)}}{D_x^{aa}}$

(24) $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}^{a} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x^{aa}} - \dfrac{D_x^{ii}}{D_x^{aa}} \cdot \dfrac{N_x^i - N_{x+n}^i}{D_x^i}$

(25) $A_{\overset{1}{x}:\overline{n}|}^{ai} = \dfrac{M_x^{ii} - M_{x+n}^{ii}}{D_x^{aa}} - \dfrac{D_x^{ii}}{D_x^{aa}} \cdot \dfrac{M_x^i - M_{x+n}^i}{D_x^i}$

[1]就業不能状態からの回復はないものとする。(1)–(14) では脱退は一年を通じて一様に起こるものとする。

[2]$D_x, N_x, M_x, D_x^{aa}, N_x^{aa}, M_x^{aa}, M_x^{(i)}, D_x^{ii}, N_x^{ii}, M_x^{ii}, D_x^{i}, N_x^{i}, M_x^{i}$ などを用いて表せ。

2. (17) $${}_tp_x^{aa} = \exp\left(-\int_0^t (\mu_{x+s}^{ad} + \mu_{x+s}^{ai})\,ds\right) = e^{-(c_1+c_2)t}$$ //

(18) $${}_tp_x^{i} = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}^{id}\,ds\right) = e^{-c_3 t}$$

(19) $${}_tp_x^{ai} = \int_0^t \underline{{}_sp_x^{aa}\ \mu_{x+s}^{ai}\ {}_{t-s}p_{x+s}^{i}}\ ds$$

(x) は s 年間 active で x+s 才のとき invalid となり
t−s 年間 生存する.

$$= \int_0^t e^{-(c_1+c_2)s}\ c_2\ e^{-c_3(t-s)}\,ds = c_2 e^{-c_3 t}\int_0^t e^{-(c_1+c_2-c_3)s}\,ds$$

$$= \frac{c_2}{c_1+c_2-c_3}\left(e^{-c_3 t} - e^{-(c_1+c_2)t}\right)$$

(20) $${}_tp_x^{a} = {}_tp_x^{aa} + {}_tp_x^{ai} = \frac{1}{c_1+c_2-c_3}\left(c_2 e^{-c_3 t} + (c_1-c_3)\,e^{-(c_1+c_2)t}\right)$$ //

3. (24) $$\ddot a^{a}_{x:\overline{n}|} \underset{(11)}{=} \sum_{t=0}^{n-1} v^t\,\frac{l_{x+t} - l_x^{ai}\ {}_tp_x^{i}}{l_x^{aa}} = \sum_{t=0}^{n-1} v^t\,\frac{l_{x+t}}{l_x^{aa}} - \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\sum_{t=0}^{n-1} v^t\,{}_tp_x^{i}$$

$$= \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x^{aa}} - \frac{D_x^{ii}}{D_x^{aa}}\,\frac{N_x^{i} - N_{x+n}^{i}}{D_x^{i}}$$ //

(25) $$A^{ai}_{\overset{1}{x}:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_{t-1|}q_x^{ai} \underset{(12)}{=} \sum_{t=1}^{n} v^t\,\frac{d_{x+t-1}^{ii}}{l_x^{aa}} - \frac{l_x^{ii}}{l_x^{aa}}\sum_{t=1}^{n} v^t\,{}_{t-1|}q_x^{i}$$

$$= \frac{M_x^{ii} - M_{x+n}^{ii}}{D_x^{aa}} - \frac{D_x^{ii}}{D_x^{aa}}\,\frac{M_x^{i} - M_{x+n}^{i}}{D_x^{i}}$$ //