

問 11.1. 次の重積分を計算せよ。

- (1)  $\iint_D \log \frac{x}{y^2} dx dy, \quad D: 1 \leq y \leq x \leq e$  (2)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy, \quad D: x + y \leq 1, 0 \leq x, y$   
 (3)  $\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy, \quad D: 0 \leq y \leq x \leq 1$  (4)  $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy, \quad D: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x^2$   
 (5)  $\iiint_K (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad K: x + y + z \leq a, 0 \leq x, y, z \quad (a > 0)$

問 11.2. 次の広義重積分を計算せよ。ただし、増加近似列  $D_n \uparrow D$  を述べること。

- (1)  $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{-x + \cos^2 y}}, \quad D: 0 \leq y < \frac{\pi}{2}, 0 \leq x < \cos^2 y$   
 (2)  $\iint_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha} dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq y \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)$   
 (3)  $\iint_D \frac{dx dy}{(1 + x + y)^\alpha}, \quad (\alpha > 2), \quad D: 0 \leq x, 0 \leq y$   
 (4)  $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1 - xy}}, \quad D: 0 \leq y < 1, y \leq x \leq 1$   
 (5)  $\iint_D \frac{1 - xy}{(1 + x + y)^5} dx dy, \quad D: 0 \leq x, 0 \leq y$

問 11.3. 次の重積分を [ ] にある変数変換を用いて計算せよ。ただし、広義重積分に対しては増加近似列を述べること。

- (1)  $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy, \quad D: 0 \leq x, 0 \leq y, a < x + y \leq 1 \quad (0 < a < 1) \quad [x = u(1+v), y = u(1-v)]$   
 (2)  $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1 \quad [x = \sqrt{\cos \omega} \cos \theta, y = \sqrt{\cos \omega} \sin \theta]$   
 (3)  $\iint_D \frac{x(x+y)^3}{y^3} dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq y \leq 1-x, 0 < y \quad [x = \frac{uv}{1+v}, y = \frac{u}{1+v}]$   
 (4)  $\iint_D dx dy, \quad D: ax^2 \leq y \leq bx^2, cy^2 \leq x \leq dy^2 \quad (0 < a < b, 0 < c < d) \quad [u = \frac{y}{x^2}, v = \frac{x}{y^2}]$   
 (5)  $\iint_D \tan^{-1} \frac{y}{x} dx dy, \quad D: 0 \leq x^2 + y^2 \leq a^2, 0 < x, 0 \leq y \quad (a > 0) \quad [極座標変換]$   
 (6)  $\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{(1 + x^2 + y^2)^3} dx dy, \quad D: 0 \leq x, 0 \leq y \quad [極座標変換]$   
 (7)  $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2}, \quad D: x < x^2 + y^2 \leq 2x \quad [極座標変換]$   
 (8)  $\iint_D \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \quad D: (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2 \quad (連珠形) \quad [極座標変換]$   
 (9)  $\iiint_K dx dy dz, \quad K: x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, 4(x^2 + y^2) \leq z^4 \quad [円柱座標]$   
 (10)  $\iiint_K \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^3} dx dy dz, \quad K: 0 \leq x, y, z \quad [空間の極座標変換]$

問 11.4. 関数  $f(x, y) = \frac{1 - x^2 y^2}{(1 + x^2 y^2)^2}$  に対して、次の広義積分および累次広義積分を求めよ。

$$I = \iint_{0 \leq x, 1 \leq y} f(x, y) dx dy, \quad I_1 = \int_0^\infty dx \int_1^\infty f(x, y) dy, \quad I_2 = \int_1^\infty dy \int_0^\infty f(x, y) dx$$

問 11.5. 次の累次積分の値を求めよ。

- (1)  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \cos \frac{\pi x}{\sqrt{y}} dy$  (2)  $\int_0^1 dx \int_{\frac{\sin^{-1} x}{2}}^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{x}{\cos y}} dy$