基礎ゼミ II　問題 10　　　**2023 年 12 月 11 日**

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

注意: E は単位行列, O は零行列を表す。行列 A に対し、${}^tA$ で A の転置行列を、A^* で A の随伴行列を表す。

問 10.1. 次の行列 A に対してその最小多項式を求めよ。ただし、a は定数とする。

(a) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$　(c) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$　(d) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

問 10.2. 次の行列 A に対してその最小多項式を求めよ。

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -1 & 6 \\ -4 & 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$　(6) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

問 10.3. 以下の行列 A は対角化可能であるか。対角化可能ならば、$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を探し、P^{-1} を述べ、$P^{-1}AP$ を計算せよ。

(1) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -7 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -3 & -8 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -8 & -4 & 8 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -2 & 13 & -8 \\ -4 & 17 & -10 \end{bmatrix}$

問 10.4. 以下を示せ。ただし、$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ の内積を表す。

(1)　n 次実正方行列 A が対称行列であるための必要十分条件は任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (A\boldsymbol{y})$ となることであることを示せ。

(2)　A が n 次実対称行列とする。A の固有値は実数であることを示せ。また、α_1, α_2 が A の固有値で $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ はそれぞれ α_1, α_2 に対する固有ベクトルとするとき、$\alpha_1 \neq \alpha_2$ であれば $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ は直交することを示せ。

問 10.5. A が実対称行列であれば、A は対角化可能であり、直交行列 P を用いて ${}^tPAP$ が対角行列とできる (P は直交行列なので ${}^tPP = E$、すなわち $P^{-1} = {}^tP$ となることに注意)。以下の行列 A に対し、${}^tPAP$ が対角行列になるような直交行列 P を探し、A を対角せよ。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

問 10.6. A が正規行列、すなわち、$AA^* = A^*A$ を満たせば、A はユニタリ行列 P を用いて P^*AP が対角行列とできる (P はユニタリ行列なので $P^*P = E$、すなわち $P^{-1} = P^*$ となることに注意)。以下の行列 A に対し、P^*AP が対角行列になるようなユニタリ行列 P を探し、A を対角せよ。

(1) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 4 & i \\ -1 & -i & 2 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 5 & -\sqrt{3} & -6 \\ -\sqrt{3} & 7 & -2\sqrt{3} \\ 6 & 2\sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$