**基礎ゼミ II　問題 9　　2023 年 12 月 4 日**

**問 9.1.** 次の関数の極値を求めよ。

(1) $z = x^3 + y^3 - 3axy$

(2) $z = xy(x^2 + y^2 - 1)$

(3) $z = (2x - x^2)(3y - y^2)$

(4) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$

(5) $z = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

(6) $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2 + 1}$

(7) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$

(8) $z = \dfrac{x^2 y^2}{(x - 1)(y - 1)}$

**問 9.2.** 次の等式で与えられる $x$ の陰関数 $y$ の極値を求めよ。

(1) $x^3 - 3axy + y^3 = 0 \quad (a > 0)$

(2) $x^3 y^3 = x - y$

**問 9.3.** 次の等式で与えられる $x, y$ の陰関数 $z$ の極値を求めよ。

(1) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2yz + 2zx - 2xy + 12 = 0$

(2) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 2xy - 2yz = 4$

**問 9.4.** 次の関数 $f$ の示された条件のもとでの極値を求めよ。

(1) $f(x, y) = xy, \quad 4x^2 + y^2 = 4$

(2) $f(x, y) = x^3 + y^3, \quad 4x^2 + 3y^2 = 4$

(3) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x^3 + y^3 = 3xy$

(4) $f(x, y, z) = xy + yz + zx, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**問 9.5.** 関数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ について、原点はこれを通る任意の直線上における $f$ の極小点であることを示せ。また、原点で $f$ が極値となるか調べよ。

**問 9.6.** 2 辺の長さが $x, y$ の長方形を底面とするマスをつくる。このマスの表面積 $xy + 2(xz + yz) = a$ を一定のもとで、体積 $V = xyz$ を最大にする $x, y, z$ とそのときの体積を求めよ。

**問 9.7.** 曲面 $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ の接平面と $x$ 軸, $y$ 軸, $z$ 軸との交点をそれぞれ P, Q, R とするとき、三角形 PQR の重心は一定の球面上にあることを示せ。

**問 9.8.** $f(x, y)$ は $C^1$ 級とする。曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点とこの曲線外の点 A との距離が点 P で極値をとるとき。直線 AP はこの曲線の法線であることを示せ。

**問 9.9.** $f(x, y)$ は $C^1$ 級とする。曲線 $f\left(\dfrac{x - a}{z - c}, \dfrac{y - b}{z - c}\right) = 0$ の上の点 $(x_0, y_0, z_0)$ における接平面の方程式を述べよ。また、接平面は点 $(a, b, c)$ を通ることを示せ。

**問 9.10.** 次の重積分を計算をせよ。ただし $D$ を図示しそれを縦線領域もしくは横線領域で表すこと。

(1) $\displaystyle\iint_D (x + y)\, dxdy, \qquad D : y^2 \leq x \leq y + 2$

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\, dxdy, \qquad D : x^2 + y^2 \leq 2x$

**問 9.11.** 積分順序を交換することによって、次の累次積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} x^3 \sqrt{x^2 + y^2}\, dx \qquad (a > 0)$

(2) $\displaystyle\int_1^e dx \int_0^{\log x} \frac{1 + y}{x}\, dy$

**問 9.4** ヒント: Lagrange の未定乗数法 (教科書 p.183 定理 20) に関する問題ですが、他の解き方でも構いません。

(1), (2) 条件式は楕円の周上の点なので、例えば極値の候補が楕円上の点で反時計回りに $\mathrm{P}_1 \ldots \mathrm{P}_6$ であり、そのとき $f(\mathrm{P}_1) < f(\mathrm{P}_2) > f(\mathrm{P}_3) < f(\mathrm{P}_4) > f(\mathrm{P}_5) < f(\mathrm{P}_6) > f(\mathrm{P}_1)$ となっていれば、$f(\mathrm{P}_1), f(\mathrm{P}_3), f(\mathrm{P}_5)$ で極小、$f(\mathrm{P}_2), f(\mathrm{P}_4), f(\mathrm{P}_6)$ で極大となることがわかる。
[ 別解 ]　(1) なら $x = \cos\theta, y = 2\sin\theta$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ と媒介変数表示して $F(\theta) = f(\cos\theta, 2\sin\theta)$ の極値を調べてもできます。

(3) 例えば以下のように解いてください:
(a) 極値となる点の候補が $(0,0)$ と $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ であることを導く。
(b) $(0,0)$ については、$f(x,y) > 0$ $((0,0) \neq (0,0))$ であるから、$f(x,y)$ が $(0,0)$ で極小値 $0$ をとることがわかる。
(c)　$y = g(x)$ を $\frac{3}{2} = g\left(\frac{3}{2}\right)$ を満たす $\varphi(x,y) = 0$ の陰関数とし、$F(x) = f(x, g(x))$ とおく。このとき、
$F''\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ を示し、解答を完結させる。
[ 別解 ]　媒介変数表示を用いるときは、$\frac{y}{x} = t$ とおき条件式 $x^3 + y^3 = 3xy$ に代入することで、$x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ と表せることがわかります。これより、$F(t) = f\left(\frac{3t}{1+t^3}, \frac{3t^2}{1+t^3}\right)$ の極値を求める問題となります。

(4) 条件式は球面上の点なので、例えば極値の候補が 2 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}$ で、そこで $f(\mathrm{P}) < f(\mathrm{Q})$ であれば、$f(x,y,z)$ は P で極小値 (実は最小値)、Q で極大値 (実は最大値) をとります。

**問 9.5** ヒント:
「原点で $f$ が極値となるか」は $xy$ 平面上に $f(x,y) > 0$ となる領域と $f(x,y) < 0$ となる領域を図示すればわかります。

**問 9.6** ヒント:
$xy + 2(xz + yz) = a$ かつ $x, y, z > 0$ となる範囲で $f(x,y,z) = xyz$ の最大値を探す問題ですが、この範囲で $f(x,y,z) > 0$ であり、$xy + 2(xz + yz) = a$ かつ $x, y, z$ のいずれかが 0 となるとき $f(x,y,z) = 0$ となることから、$xy + 2(xz + yz) = a$ かつ $x, y, z > 0$ となる範囲で $f(x,y,z)$ の極値が一つならそこで最大となります。