

基礎ゼミ II 問題 8 2023 年 11 月 27 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

注意: E は単位行列, O は零行列を表す。

問 8.1. \mathbf{R}^3 の部分空間 W と線形写像 $f: W \rightarrow W$ と W の基底 \mathcal{C} を次のように定める。このとき、基底 \mathcal{C} に関する f の表現行列 A をそれぞれ求めよ。また、 f が同型写像か調べよ。

$$(1) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\}, \quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} z + x \\ y - z \\ x + y \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x - y - z = 0 \right\}, \quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2y - z \\ x + z \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} : \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(3) W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^3 \mid x - y = 0 \right\}, \quad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + z \\ -x + 3y + z \\ x - y + 2z \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C} : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

問 8.2. 次の行列 A に対して $A = BC$ となる $4 \times r$ 行列 B と $r \times 5$ 行列 C を述べよ。ただし $r = \text{rank } A$ とする。(cf. 線形代数学の教科書 p.90 問題 15.5.)

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 10 & 5 & 7 \\ 3 & 10 & 14 & 7 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & -7 \end{bmatrix} \quad (2) A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 9 & 6 & 13 \end{bmatrix} \quad (3) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

問 8.3. 行列 (1) — (6) について、(a) 固有多項式、(b) すべての固有値とその重複度と、(c) 各固有値に対する固有空間の次元と基底を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 5 & 6 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \quad (6) \begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

問 8.4. n 次正方行列 A の固有多項式を $\varphi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$ とするとき、次の $2n$ 次正方行列 (1) — (4) についてその固有多項式を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} A & -A \\ O & E \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} O & A \\ A & O \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} O & -A \\ A & O \end{bmatrix} \quad (4) \begin{bmatrix} O & E \\ A & O \end{bmatrix}$$

問 8.5. A, B が n 次正方行列のとき、次の問いに答えよ。

(a) B が正則であれば、 AB の固有多項式と BA の固有多項式は一致することを示せ。

(b) ある T があって、 $|t| > T$ ならば $B - tE$ は正則となることを示せ。

(c) (b), (a) より、 $|t| > T$ ならば $A(B - tE)$ の固有多項式 $\varphi_{A(B-tE)}(x)$ と $(B - tE)A$ の固有多項式 $\varphi_{(B-tE)A}(x)$ は一致する。 $\varphi_{A(B-tE)}(x), \varphi_{(B-tE)A}(x)$ が t の多項式であることに注意して、(B が必ずしも正則でなくても) AB の固有多項式と BA の固有多項式は一致することを示せ。

問 8.6. $f(x) = ae^x \cos 2x + be^x \sin 2x$ (a, b は複素数) の形の \mathbf{R} 上の複素数値関数全体の作るベクトル空間を V とする。 V 上の線形写像

$$D: f(x) \mapsto f'(x)$$

を考える。 V の基底 $\mathcal{C}: e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$ に関する D の表現行列 A と、 A の固有値とそれに対する固有空間を求めよ。