基礎ゼミ II　問題 7　　2023 年 11 月 20 日

問 7.1. 次の関数 $z = f(x,y)$ について、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ は存在するか調べ、存在する場合はその値を求めよ。

(1)　$f(x,y) = \dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2+y^2}$　(2)　$f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$　(3)　$f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{|x|+|y|}$

(4)　$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{y}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$　(5)　$f(x,y) = (x^2+y^2)^y$

問 7.2. 領域 D で定義された関数 $z = f(\mathrm{P})$ が P_0 で連続で、$f(\mathrm{P}_0) > 0$ ならば、P_0 の δ 近傍 U が存在して、$\mathrm{P} \in D$ かつ $\mathrm{P} \in U$ ならば $f(\mathrm{P}) > 0$ となることを ε-δ 論法を用いて示せ。

問 7.3. 次の関数 $z = f(x,y)$ の原点における偏微分可能性、全微分可能性を調べよ。

(1)　$f(x,y) = |xy|$　(2)　$f(x,y) = \sqrt{x^4+y^4}$

(3)　$f(x,y) = xy\tan\sqrt{x^2+y^2}$　(4)　$f(x,y) = \begin{cases} x\tan^{-1}\dfrac{y}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

問 7.4. 次の関数を偏微分せよ。また第 2 次偏導関数を求めよ。

(1)　$z = x^y y^x$　(2)　$z = \log(1-x^2-y^2)$　(3)　$z = \log_x y$　(4)　$z = \tan^{-1}\dfrac{x-y}{x+y}$

問 7.5. 次の関数 $z = f(x,y)$ の $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial^m x \partial^n y}(x,y)$ を求めよ。

(1)　$f(x,y) = e^{ax}\cos by$　(2)　$f(x,y) = \sin(x-y)$　(3)　$f(x,y) = (1+x+y)^\alpha$

問 7.6. 次の関係式より z_u, z_v を求めよ。

(1)　$z = xy,\quad x = \sin^{-1}(uv),\ \ y = \cos^{-1}(uv)$　(2)　$z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x},\quad x = \sin u,\ \ y = \sin v$

問 7.7. $z = f(x,y)$ は C^2 級、$x = \phi(t), y = \psi(t)$ が t の C^2 級関数のとき、$z = f(\phi(t), \psi(t))$ について次を示せ。

$$\frac{d^2z}{dt^2} = z_{xx}\phi'(t)^2 + 2z_{xy}\phi'(t)\psi'(t) + z_{yy}\psi'(t)^2 + z_x\phi''(t) + z_y\psi''(t)$$

問 7.8. 次の関数 $z = f(x,y)$ に $n = 2$ の場合に Taylor の定理を適用して、$f(x+h, y+k)$ を h, k, θ $(0 < \theta < 1)$ を用いて表せ。

(1)　$z = f(x,y) = (ax+by)^\alpha$　(2)　$z = f(x,y) = e^{\alpha x}\sin\beta y$

問 7.9. 次の等式で定められる x の陰関数 y について $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ。

(1)　$x^3+y^3-3axy = 0$　(2)　$\log\sqrt{x^2+y^2} = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

問 7.10. 等式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ で定まる x, y の陰関数 z についてその偏導関数 z_x, z_y を求めよ。

問 7.11. 等式 $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $x^2+y^2 = 2ax$ で定まる x の陰関数 y, z についてその導関数 $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$ を求めよ。

問 7.12. 次の等式で定められる x, y の陰関数 u, v についてその偏導関数を求めよ。

(1)　$x^2+y^2+u^2+v^2 = a^2,\ \ x+y+u+v = b$　(2)　$x^2+y^2+u^2+v^2 = a^2,\ \ x^2+y^2+u^2 = 2ax+2ay$

問 7.13. 次の関数のヤコビアン (1) $\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}$, (2) $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}$ を求めよ。

(1)　$u = x^2+y^2+z^2,\ \ v = x+y+z,\ \ w = xy+yz+zx$

(2)　$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta$