基礎ゼミ II　問題 6　　2023 年 11 月 13 日

以下、$M_2(\boldsymbol{R})$ で n 次実正方行列を表すものとする。

問 6.1. 次の写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ が線形写像であれば証明し、線形写像でなければその理由を述べよ。

(1) $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2x-3y \\ x+2y \end{bmatrix}$　(2) $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} xy \\ x+y \end{bmatrix}$　(3) $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x+1 \\ x+2y-1 \end{bmatrix}$

問 6.2. 次の写像 $f : M_2(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ が線形写像であれば証明し、線形写像でなければその理由を述べよ。

(1) $f(A) = \operatorname{tr} A$ (トレース)　(2) $f(A) = \det A$ (行列式)

問 6.3. A を 3×2 行列とし、線形写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられている。以下の場合に、行列 A をそれぞれ求めよ。

(1) $f(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix},\ f(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ -9 \end{bmatrix}$　(2) $f(\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix},\ f(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -8 \\ 5 \\ 17 \end{bmatrix}$

問 6.4. 次の行列 A に対して、線形写像 $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ ((1), (2) は $n = 3$, (3) は $n = 4$) を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で定義する。このとき、$\operatorname{im} f$ と $\ker f$ の次元と基底をそれぞれ求めよ。

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$　(2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$　(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

問 6.5. A を 2 次正方行列とし、線形変換 $f : \boldsymbol{C}^2 \to \boldsymbol{C}^2$ が $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられている。以下の場合に行列 A を求めよ。

(1) $f(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ f(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$　(2) $f(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2i \\ 1-i \end{bmatrix},\ f(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1-i \\ -1 \end{bmatrix}$

問 6.6. 線形写像 $f : M_n(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ は、ある n 次実正方行列 A によって、$f(X) = \operatorname{tr}(AX)$ と表せることを示せ。また、線形写像 $f : M_3(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ が

$$f(\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}) = 2(x_{23} - x_{32}) + 3(x_{13} - x_{31}) + (x_{12} - x_{21})$$

で与えられるとき、 $f(X) = \operatorname{tr}(AX)$ となる 3 次実正方行列 A を求めよ。

問 6.7. 写像 $f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ を平面の点 ${}^t[x\ y]$ を直線 $y = mx$ について対称な点 ${}^t[x'\ y']$ に写すものとする。x', y' を x, y, m の式で表すことにより、f が線形写像であることを示し、$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる 2 次正方行列 A を求めよ。

問 6.8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ とし、線形写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ で与えられているとする。このとき、次の $\boldsymbol{R}^3$ 基底 $\mathscr{B}$ と $\boldsymbol{R}^2$ 基底 $\mathscr{C}$ に関する f の表現行列を求めよ。

(1) $\mathscr{B} : \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$　$\mathscr{C} : \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$　(2) $\mathscr{B} : \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　$\mathscr{C} : \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

問 6.9. a を実数とする。3 次以下の実係数多項式のなすベクトル空間 $P_3(\boldsymbol{R})$ に 2 つの基底 $\mathscr{B}_0 = \langle 1, x, x^2, x^3 \rangle$ と $\mathscr{B}_a = \langle 1, x+a, (x+a)^2, (x+a)^3 \rangle$ を考える。このとき、基底 $\mathscr{B}_0$ から $\mathscr{B}_a$ への基底の変換行列を求めよ。