基礎ゼミ II　問題 5　　2023 年 11 月 6 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 5.1. 次の級数の収束、発散を調べよ。$a > 1$ とする。

(1)　$(a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$　　$(b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$　　$(c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a}-1)$

(2)　$(a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$　　$(b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n})$　　$(c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

問 5.2. $a > 0$ のとき $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^a}$ と比較して、$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^a}$ の収束、発散を調べよ。

問 5.3. 次の級数が絶対収束か条件収束か発散かを調べよ。$a \neq 0$ とする。

(1)　$(a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{6}$　　$(b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\sin\frac{a}{n}$　　$(c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n(n+1)}$

(2)　$(a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$　　$(b)\ \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n\log n}$　　$(c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{a}{n}\right)$

問 5.4. 正項級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば、$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^2$ が収束することを示せ。さらに。この逆が成り立つかどうか調べよ。

問 5.5. 条件収束する級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \log 2$ の順序を入れかえた次の級数の和をを求めよ。

(1)　$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots$　　(2)　$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\cdots$

問 5.6. 条件収束する級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \log 2$ の順序を入れかえて発散級数を作れ。

問 5.7. べき級数 (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\log(n+2)}x^n$ の収束域を求めよ。

問 5.8. べき級数 (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}x^n$, (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}x^{2n}$ の収束半径を求めよ。

問 5.9. 次の関数を Maclaurin 級数に展開し、その収束半径を求めよ。

(1)　$\dfrac{2}{(1-x)^3}$　　(2)　$\sin^3 x$　　(3)　$\tan^{-1} x$　　(4)　$\sin^{-1} x$　　(5)　$\dfrac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$

問 5.10. $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 2)$ によって数列 $\{a_n\}$ を定義し、$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と定める。右辺のべき級数の収束半径 R を求め、$(1-x-x^2)f(x) = x\ (|x| < R)$ を示せ。

問 5.11. $\alpha \neq 0$ とし、$f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, ただし、$\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, $n = 1, 2, \ldots$ と定める。(a) この級数の収束半径が 1 であることを示し、(b) $(1+x)f'(x) = \alpha f(x)$ を導け。さらに (c) $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\alpha}{1+x}$ の辺々を 0 から $x\ (|x| < 1)$ まで積分し、$f(x) = (1+x)^{\alpha}$ を導け。

問 5.12. $|x| < 1$ のとき、次の等式を証明せよ。ただし $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1$ と定める。

(1)　$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2t^2}\,dt = 1 - \frac{1}{2\cdot 3}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n \cdot n! \cdot (2n+1)}x^{2n}$　　(2)　$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2t^2}}\,dt = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n! \cdot (2n+1)}x^{2n}$

ヒント:

問 5.1 (1) (c) $a^x - 1 = \int_0^x a^t \log a \, dt \geq x \log a,\ x \geq 0.$

問 5.5 (1) 与えられた級数の初項から第 n 項までの和を T_n とし、 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ とするとき、

$$T_{3n} - S_{2n} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} + \cdots + \frac{1}{4n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2+2 \cdot \frac{k-1/2}{n}} \to \int_0^1 \frac{dx}{2+2x}$$

となることを用い、 $\lim_{n\to\infty} T_{3n} (:= I$ とする$)$ を求めよ。これを用い、さらに $\lim_{n\to\infty} T_{3n+1} := \lim_{n\to\infty} T_{3n+2} = I$ を示せば、 $\lim_{n\to\infty} T_n = I$ を得る。

(2) も初項から第 n 項までの和を U_n とし $U_{3n} - S_{2n}$ を考えれば、(1) と同様に求まる。

問 5.9 (4) 例えば教科書 p.63 例 4 を用いよ。$\sin^{-1} x = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \, dt$ と問 5.12(2) と同様に $(1-t^2)^{-1/2}$ のべき級数展開を用いてもよい。問 5.12 のヒントも参照のこと。

問 5.12 (1) $\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1,\ \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2},\ \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n \cdot n!},\ n \geq 2,$ を示せば、問 5.11 により、$(1-s^2)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}s^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{2^n \cdot n!} s^2,\ |s| < 1,$ を得る。これを $s = xt$ として t について積分すればよい。

(2) も同様に、$(1-s)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-s)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!} s^n$ を導けば示せる。