基礎ゼミ II　問題 4　　2023 年 10 月 30 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 4.1. (1) 次の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ を正規直交化せよ。また、$W = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ の直交補空間 $W^\perp$ の基底を求めよ。さらに、${}^t[1\ 2\ 1\ 1]$ の $W, W^\perp$ への正射影をそれぞれ求めよ。

(2) $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ を正規直交化せよ。また、$W = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$ の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ。さらに、${}^t[4\ 3\ 2\ 1]$ の $W, W^\perp$ への正射影をそれぞれ求めよ。

(3) $\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2$ を正規直交化せよ。また、$W = \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle$ の直交補空間 $W^\perp$ の正規直交基底を求めよ。さらに、${}^t[1\ 2\ 3\ 4]$ の $W, W^\perp$ への正射影をそれぞれ求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$　(2) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$　(3) $\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

問 4.2. $M_2(\mathbf{R})$ を 2 次実正方行列の全体からなる実ベクトル空間とする。

(1) $B(A_1, A_2) = \mathrm{tr}(A_1 {}^t A_2)$, $A_1, A_2 \in M_2(\mathbf{R})$, と定めると、$B$ は $M_2(\mathbf{R})$ の内積になることを示せ。

(2) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ z & 0 \end{bmatrix}$ が直交系をなすように x, y, z を定めよ。

また、$A_1, A_2 \in M_2(\mathbf{R})$ で A_1 が対称行列、A_2 が交代行列であれば A_1, A_2 は直交することを示せ。

問 4.3. n を自然数とし、V を n 次以下の実係数多項式の全体からなる実ベクトル空間とする。
ただし $\displaystyle\int_0^\infty x^k e^{-x}\, dx = k!$, $k = 0, 1, \ldots,$ を証明なしに用いてよい。

(1) $B(f(x), g(x)) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\, dx$ と定めると、B は V の内積になることを示せ。

(2) (a) $1, x, x^2$ からグラム・シュミットの直交化法により正規直交基底を 1 組求めよ。

(b) $n = 2$ として (a) で求めた正規直交基底に関する x^2 の成分表示を求めよ。

(3) $L_k(x) = \dfrac{e^x}{k!}\dfrac{d^k}{dx^k}(e^{-x}x^k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}(-1)^j {}_k\mathrm{C}_j \frac{x^j}{j!}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, とおくとき、$L_0(x), L_1(x), \ldots, L_n(x)$ は正規直交基底となることを示せ。この $L_k(x)$ を Laguerre(ラゲール) の多項式という。

問 4.4. $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{P}(1,2,-1)$, $\mathrm{Q}(3,-1,0)$, $\mathrm{R}(2,-3,-1)$ とする。

(1) P, Q を通る直線 ℓ の方程式と、点 P で ℓ と直交する平面の方程式を求めよ。

(2) 3 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を通る平面 α の方程式と、平面 α に直交し原点 O を通る直線の方程式を求めよ。

(3) 三角形 PQR の面積と 4 点 $\mathrm{O}, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$ を頂点とする四面体の体積を求めよ。

問 4.5. (1) 平面 $x - 2y - z - 6 = 0$ 上の点で原点 O からの距離が最小となる点の座標とその距離を求めよ。

(2) 点 $(1, 2, 3)$ から平面 $3x + y - 2z + 29 = 0$ までの距離が最小となる点の座標とそのを求めよ。

問 4.6. (1) 直線 $x - 1 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+4}{2}$ 上の点で原点 O からの距離が最小となる点の座標とその距離を求めよ。

(2) 直線 $x = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+4}{3}$ と直線 $\dfrac{x-1}{2} = y$, $z = 0$ の距離を求めよ。

問 4.7. (1) 2 つの平面 $-x + 3y - 5z = 1$, $2x - y - z = 3$ のなす角 θ を求めよ。ただし、$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) 2 つの直線 $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z}{4}$, $x - 1 = \dfrac{2-y}{10} = \dfrac{-z}{7}$ のなす角 θ を求めよ。ただし、$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ とする。

問 4.8. 2 つの平面 $3x - 2y + z = -4$, $x + 3y - 2z = 1$ に共通して含まれる直線の方程式を求めよ。また、この 2 つの平面から等距離にある点の集合を求めよ。

問 4.9. 平面 α: $x + 2y + 3z = 5$ に関して点 $\mathrm{A}(2,1,5)$ と対称な点 A' の座標を求めよ。また、その点 A' と点 $\mathrm{B}(6,6,5)$ を結ぶ直線 $\mathrm{A}'\mathrm{B}$ の方程式と、その直線と平面 α との交点の座標を求めよ。

問 4.10. m 個の n 次元数ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ に対し G, A を線形代数学の教科書 p.72 **12.11** と同様に定義する。このとき、$G = {}^t AA$ を示し、さらに $\mathrm{rank}\, G = \mathrm{rank}\, A$ を導け。