基礎ゼミ II 問題 3　　2023 年 10 月 23 日

問 3.1. $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で、つねに $f(x) \geq 0$ で $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ とする。このとき、次を示せ。

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b f(x)^n \, dx \right)^{1/n} = M$$

問 3.2. 次の等式をみたす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 1 + \int_0^\pi f(t) \sin(x-t) \, dt$$

問 3.3. 次の広義定積分を求めよ。ただし、$a < b$, $\alpha > 0$, $n \in \boldsymbol{N}$ とする。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} \, dx$　(2) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \, dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} \, dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \log x \, dx$　(6) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$　(7) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x(1+x^2)} \, dx$　(8) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

(9) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-x^2} \, dx$　(10) $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} \, dx$　(11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}} \, dx$　(12) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx$

(13) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1-\cos x} \, dx$　(14) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos x \, dx$　(15) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2+6x+3}$　(16) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x-1}}$

(17) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$　(18) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{3x}\sqrt{1-e^{3x}} \, dx$　(19) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} \, dx$　(20) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

問 3.4. $\alpha > 0$ とする。次の広義積分が絶対収束するかを調べよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^\alpha} \, dx$　(2) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\sin\theta)^\alpha}$　(4) $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-x^2} \, dx$

問 3.5. (1) 広義積分 $\displaystyle\int_\pi^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ は $0 < \alpha \leq 1$ のとき発散し $\alpha > 1$ のとき収束することを示せ。
(2) $\alpha > 0$ のとき、広義積分 $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ は収束することを示せ。
(3) $\alpha > 1$ とする。広義積分 $\displaystyle\int_{\pi^{1/\alpha}}^\infty \sin(x^\alpha) \, dx$ の 収束・発散を調べよ。

問 3.6 (Cycloid(サイクロイド))**.** $x(t) = a(t - \sin t),\ y(t) = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$ の 1 つの弧と x-軸との間の面積を求めよ。また、その弧の長さを求めよ。

問 3.7 (Asteroid(アステロイド))**.** 原点を中心とする半径 a $(a > 0)$ の大円に、半径 $\dfrac{a}{4}$ の小円が $(a, 0)$ を接点として内側に接している。この小円が大円の内側を滑ること無く転がるとき、小円上の点 $(a, 0)$ の軌跡を円の転がった角度を θ としてパラメータ曲線で表示せよ。

問 3.8. 上で与えたアステロイドで、パラメータが $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ を動くときの曲線の長さを求めよ。

問 3.9. 上で与えたアステロイドが囲む部分の面積を求めよ。

問 3.10 (Catenary (カテナリー, 懸垂線))**.** $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$, $(a > 0)$ の $0 \leqq x \leqq a$ の範囲の長さを求めよ。

問 3.11 (Cardioid (カージオイド, 心臓形))**.** 極座標表示された曲線 $r = a(1 + \cos\theta)$ $(a > 0,\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ の囲む部分の面積を求めよ。

問 3.12 (Lemniscate (レムニスケート, 連珠形))**.** $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ $(a > 0)$ を極座標表示で表せ。また、この曲線が囲む 2 つの珠の部分の面積の和を求めよ。[*1]

[*1] この曲線の長さは、楕円積分 (楕円の全長を求める際にも現れる) と呼ばれる初等的には求まらない積分になる。C. L. Siegel, Topics in Complex Function Theory, vol. 1 に詳しい解説がある。

問 3.3 ヒント:

(4) $t = x^{1/6}$ とおく。

(14) $I_M = \displaystyle\int_0^M e^{-\alpha x} \cos x \, dx$ に対して、部分積分を 2 回用いよ。

(16) $u = \sqrt[3]{e^x - 1}$ とおき、u に関する分数関数の積分に帰着する。

(19) $t = \dfrac{1}{x}$ と置換することで $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} \, dx = -\int_0^\infty \frac{t^2 \log t}{(1+t^2)^2} \, dt$ を導き、

$2I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{(1-x^2)\log x}{(1+x^2)^2} \, dx = \int_0^\infty \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' \log x \, dx$ とし部分積分法を用いる。