基礎ゼミ II　問題 2　　2023 年 10 月 16 日

問 2.1. 次の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ に対して、$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の 1 次結合として $\boldsymbol{a}_3$ を表せ。

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$　(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$

問 2.2. 次の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ に対して、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ の 1 次結合として $\boldsymbol{a}_4$ を表せ。

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$　(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ -9 \end{bmatrix}\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$

問 2.3. 次の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ に対して、$\boldsymbol{x} = {}^t[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]$ が $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle$ に属するための x_1, x_2, x_3, x_4 の必要十分条件を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$　(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ -7 \\ 8 \end{bmatrix}$

問 2.4. (1) 次の $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次従属であるとき a の値を求めよ。
(2) 次の $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ が 1 次従属であるとき x, y の値を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ a \\ 3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$　(2) $\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ x \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ y \\ 2 \end{bmatrix}$

問 2.5. 次の $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ は基底である。$\mathscr{B}$ から $\mathscr{B}'$ への基底の変換行列 P を求めよ。

(1) $\mathscr{B} : \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathscr{B}' : \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　(2) $\mathscr{B} : \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathscr{B}' : \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

問 2.6. 次の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ に対して、$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$ の次元と 1 組の基底を求めよ。

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$　(2) $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 18 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$

問 2.7. $\boldsymbol{R}^4$ の部分空間 $W_1 = \left\langle {}^t[-1\ 2\ 1\ -2], {}^t[0\ 1\ -1\ 2] \right\rangle$, $W_2 = \left\langle {}^t[1\ -3\ 1\ -1], {}^t[1\ -3\ 2\ -2] \right\rangle$, に対し次の問いに答えよ。
(1) 和空間 $W_1 + W_2$ の次元と 1 組の基底を求めよ。さらに、共通空間 $W_1 \cap W_2$ の次元と 1 組の基底を求めよ。
(2) W_1, W_2 をそれぞれある同次連立 1 次方程式の解空間として表せ。

問 2.8. $V = W_1 + W_2 + W_3$ のとき、$W_1 \cap W_2 = W_1 \cap W_3 = W_2 \cap W_3 = \{\boldsymbol{0}\}$ であっても直和とならない W_1, W_2, W_3 を例示せよ。

問 2.9. ベクトル空間 V の部分空間 W_1, W_2 が $W_1 \supset W_2$ かつ $\dim W_1 = \dim W_2$ であれば $W_1 = W_2$ となることを示せ。

問 2.10. $\boldsymbol{R}$ 上の関数 $1, x, \ldots, x^n$ が $\boldsymbol{R}$ 上 1 次独立であること、すなわち $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}$ が $a_0 \cdot 1 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$ を満たせば、$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$ となることを示せ。