

問 13.1. 次を示せ ($a > 0$ は定数)。

(1) 曲線 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$) の各点での接線が両軸によって切り取られる部分の長さは一定である。

(2) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 上の点での接線が x 軸, y 軸と交わる点を P, Q と原点 O との距離の和 $OP + OQ$ は一定である。

問 13.2. 関数 $f(x)$ が区間 I で 2 回微分可能であるとする。このとき、すべての $x \in I$ に対して $f''(x) \geq 0$ ならば、すべて $c \in I$ において、 $y = f(x)$ のグラフはその点 $(c, f(c))$ における接線より下にはないこと、すなわち、 $f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c), x \in I$, であることを示せ。

問 13.3. $f(x)$ が $[a, b]$ で連続で $\int_a^b |f(x)| dx = 0$ のとき、すべての $a \leq x \leq b$ に対して $f(x) = 0$ を示せ。

問 13.4. $f(x)$ を連続関数とする。 $g(x) = \int_{x+1}^{x^2} f(t) dt$ とおくと $g'(x)$ を求めよ。また、 $h(x) = \int_a^x (x-t)f(t) dt$ とおくと $h''(x) = f(x)$ を示せ。

問 13.5. 次の関数の原始関数を求めよ。

- | | | |
|--|---------------------------------------|--|
| (1) $\frac{x^3}{x^2 - x - 2}$ | (2) $\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x+1)}$ | (3) $\frac{1}{x^4 + 1}$ |
| (4) $\frac{1}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$ | (5) $\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$ | (6) $\frac{x}{\sqrt{2+x-x^2}}$ |
| (7) $\frac{1}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$ | (8) $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ | (9) $\frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x}$ |
| (10) $\frac{\sin x}{1 + \sin x}$ | (11) $\frac{1}{1 + 2 \cos^2 x}$ | (12) $\cos^{-1} x$ |
| (13) $x^2 \sin^{-1} x$ | (14) $x \tan^{-1} x$ | (15) $\frac{\log(1+x^2)}{x^2}$ |

問 13.6. 次の定積分を求めよ。ただし、(4), (7) で $a > 0$, (6) で $0 < a < 1$ とする。

- | | | |
|--|---|--|
| (1) $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$ | (2) $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} dx$ | (3) $\int_0^3 \frac{dx}{(3+x^2)^3}$ |
| (4) $\int_0^a x \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}} dx$ | (5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{2 \sin^2 x + 1} dx$ | (6) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a \cos x}$ |
| (7) $\int_0^a \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{x+a}} dx$ | (8) $\int_0^1 \log(1 + \sqrt{x}) dx$ | (9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x) dx$ |
| (10) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \sin^2 x} dx$ | (11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \cos x} dx$ | (12) $\int_0^3 \sqrt{x(4-x)} dx$ |

問 13.7. $I_n = \int \tan^n x dx$ について、 $I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}, n \neq 1$, を導け。さらに、 n を非負整数とするとき、 $J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ の値を n を用いて表せ。

問 13.8. $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx, m, n = 1, 2, \dots$, について、

$B(m, 1) = \frac{1}{m}, B(m+1, n) = \frac{m}{n} B(m, n+1)$ を示し、 $B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$ を導け。

問 13.9. Legendre の多項式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ について、 $\int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = 0$ ($0 \leq m < n$) を示し、

これを用いて $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & (m = n) \\ 0 & (m \neq n) \end{cases}$ を示せ。

問 13.5 ヒント:

(1) $x^3 \div (x^2 - x - 2) = (\text{商}) \dots (\text{余り})$ より、 $\frac{x^3}{x^2 - x - 2} = (\text{商}) + \frac{(\text{余り})}{x^2 - x - 2}$ とし、右辺の分数式を部分分数展開せよ。

(2) (1) と同様。

(3) $\frac{1}{x^4 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^2 - 2x^2} = \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$ と部分分数展開する。

(5) $t = x + \sqrt{x^2 + 1}$, (6) $t = \sqrt{\frac{1+x}{2-x}}$, (8) $t = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ と置換せよ。

(9), (10) は $t = \tan \frac{x}{2}$ と、(11) は $t = \tan x$ と置換せよ。

(12) $\int \cos^{-1} x dx = \int (x)' \cos^{-1} x dx = x \cos^{-1} x - \int x (\cos^{-1} x)' dx$ と部分積分法を用いる。

(13)–(15) (12) と同様に部分積分法を用いる。

問 13.6 ヒント:

(1) $t = x^{1/4}$, (3) $x = \sqrt{3} \tan \theta$, (4) $u = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$, (5) $t = \tan x$ (6) $t = \tan \frac{x}{2}$, (7) $\theta = \sin^{-1} \sqrt{\frac{x}{x+a}}$ と置換せよ。

(10) $\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \int_0^\pi (\pi - u) f(\sin u) du = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx$ となることを用いよ。