基礎ゼミ I　問題 12　　2023 年 7 月 3 日

問 12.1. 次の行列の行列式の値を求めよ。ただし (5), (6) は n 次正方行列とする。

(1) $\begin{bmatrix} a & a & a & x \\ a & a & x & a \\ a & x & a & a \\ x & a & a & a \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3+bcd \\ 1 & b & b^2 & b^3+acd \\ 1 & c & c^2 & c^3+abd \\ 1 & d & d^2 & d^3+abc \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{bmatrix}$　(6) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

問 12.2. 次の行列の余因子行列を計算せよ。逆行列も (存在すれば) 求めよ。

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1+i & 2 & 0 \\ i & 0 & -2 \\ 0 & -i & 1-i \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} i & -1 & i \\ -1 & 1 & -1 \\ -i & -1 & i \end{bmatrix}$

問 12.3. 次の 1 次方程式系をクラメルの公式を用いて解け。

(1) $\begin{cases} 2x + y + 4z = -1 \\ 3x + 2y + z = 7 \\ 4x + 3y + 2z = 7 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x + y + 2z = 5 \\ x - 4y - 2z = 7 \\ -x + 2y + z = 9 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + 2y + 4z = 5 \\ 9x + 4y + 16z = 25 \end{cases}$

問 12.4. $[0,1]$ 上 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases}$ で定義される関数は、(Riemann) 可積分でないことを示せ。注: 3 年次で学ぶ Lebesgue(ルベーグ) 積分では、積分ができて値は 0 になる。

問 12.5 (Hölder の不等式)**.** (1) $p > 1, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ のとき、$\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{q} - x \geq 0$ $(x \geq 0)$ を示せ。また、これより $a > 0, b > 0$ ならば $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ となることを示せ。

(2) $f(x), g(x)$ が $[\alpha, \beta]$ で連続で、$p > 1,\ q > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ のとき、

$$\int_\alpha^\beta |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\alpha^\beta |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$ を示せ。

問 12.6. $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ ($a > 0$, n は自然数) について、次を示せ。

$$I_1 = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C, \quad I_n = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right\} \ (n \geq 2).$$

問 12.7. 問 12.6 を用いて不定積分 (1) $J_4 = \displaystyle\int \frac{dx}{(2x^2+1)^4}$,　(2) $I_3 = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-x+1)^3}$ を求めよ。

問 12.8. $\dfrac{1}{(2x-1)(x^2+3)} = \dfrac{A}{2x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+3}$ をみたす定数 A, B, C を求め、$\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-1)(x^2+3)}$ を求めよ。

問 12.9. $\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2} + \dfrac{D}{(x-1)^3}$ をみたす定数 A, B, C, D を求め、$\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$ を求めよ。