基礎ゼミ I　問題 10　　2022 年 6 月 20 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

置換 σ に対して $\mathrm{sgn}(\sigma)$ で置換 σ の符号 (signature) を表すものとする。教科書では $\varepsilon(\sigma)$ を用いている。この授業ではどちらを用いてもよい。

問 10.1. 次の行列の行列式を、行列式の定義 (次ページを参照のこと) を用いて求めよ。

(1) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

問 10.2. 次の行列式の値をサラスの方法 (教科書 p.33 例 6.5) で求めよ。

(1) (a) $\begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 2-i & 1-2i \end{vmatrix}$　(b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$　(2) (a) $\begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1-2i \end{vmatrix}$　(b) $\begin{vmatrix} 1+i & i & 1-i \\ -1 & i & 0 \\ 2 & 1+i & 0 \end{vmatrix}$

問 10.3. 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & -3 \end{vmatrix}$　(2) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$　(3) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$　(4) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 3 \\ 9 & 1 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$　(6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -6 & 1 \end{vmatrix}$　(7) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & 7 \end{vmatrix}$　(9) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$　(10) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

問 10.4. $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ を示せ。

問 10.5. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2$$

の成り立つことを示せ。ここで、ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ でその内積を表す。

定義 (行列式, 教科書 p.31). n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ の行列式を次で定める。(n 文字の置換 σ すべてに関する和)

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

例題. 行列 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ の行列式を、行列式の定義を用いて求めよ。

解. $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}$ で 0 を含まないものは $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$, $a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$ のみで、対応する置換を互換で表すと、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (34)(23)$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (12)(24)$ より、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} &= \mathrm{sgn}(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}) a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + \mathrm{sgn}(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}) a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} \\ &= a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}. \qquad // \end{aligned}$$