基礎ゼミ I　問題 9　　**2023 年 6 月 12 日**

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

次ページに**問 9.3** (3) と**問 9.8** (2) の解答例を書きました (この 2 問は発表できません)。
また、いくつかの問のヒントもあります。参照ください。

問 9.1. 次の関数の $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ を計算せよ $(a, b > 0$ は定数)。ヒント: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$

(1) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x = a\cosh t, \\ y = a\sinh t \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$

問 9.2. $f(x)$ を区間 (a, b) 上の関数とし、$a < c < b$ となる点 $x = c$ で $f(x)$ は微分可能であるとする。$f(x)$ が $x = c$ で極大値をとれば $f'(c) = 0$ となることを示せ。(極小値のときも同様に $f'(c) = 0$ が示せる。)

問 9.3. 両辺の導関数が一致することを示し、(平均値の定理を用いて) 次を示せ。

(1) $\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x \quad (x > 0)$　(2) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x \quad (x \in \mathbf{R})$

(3) $\tan\left(\dfrac{1}{2}\sin^{-1} x\right) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

問 9.4. 次の不等式を示せ。

(1) $\dfrac{2}{\pi}x < \sin x < x \quad \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$　(2) $x < \sin^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}x \quad (0 < x < 1)$

(3) $x - \dfrac{x^3}{3} < \tan^{-1} x < x \quad (x > 0)$　(4) $|\sin b - \sin a| \leq |b - a| \quad (a < b)$

(5) $0 < a < b < 1$ のとき、$p > q > 0$ ならば $\dfrac{b^p - a^p}{b^q - a^q} < \dfrac{p}{q}$.

問 9.5. $p > 1, q > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ のとき、$\dfrac{x^p}{p} + \dfrac{1}{q} - x \geq 0$ $(x \geq 0)$ を示せ。また、これより $a > 0, b > 0$ ならば $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ となることを示せ。

問 9.6. $f(x) = x^{1/x}$ $(x > 0)$ の増減を調べることにより、$m > n \geq e$ ならば、$m^n < n^m$ となることを示せ。

問 9.7. $f(x)$ が (a, ∞) で微分可能で、$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = l$ であるとき、$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x+1) - f(x)\} = l$ であることを示せ。

問 9.8. 次の極限値を求めよ。ただし、l'Hoptal の定理を用いるときは、不定形であることを明記せよ。($a > 0$ は定数。)

(1) (a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\tan x} - \dfrac{1}{x}\right)$　(b) $\lim\limits_{x\to +0} x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{ax - (\log x)^2\right\}$

(3) (a) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\tan\frac{\pi}{2}x}$　(b) $\lim\limits_{x\to 0}(1 + \sin x)^{\cot x}$　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

(5) (a) $\lim\limits_{x\to\pi/2-0}\dfrac{\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\tan x}$　(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x^a e^{-(\log x)^2}$　(6) $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$

(7) (a) $\lim\limits_{x\to\infty}\log x \log\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$　(b) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x\tan x - \dfrac{\pi}{2}\sec x\right)$　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\right)^{\frac{1}{x}}$

問 9.9. 次の関数の n 次導関数を求めよ。ヒント: (4), (5) は Leibniz の公式 (*cf*. 教科書 p.62) を用いよ。

(1) $\dfrac{1}{1-2x}$　(2) $\sin^3 x$　(3) $e^x \cos x$　(4) $x^3 e^{2x}$　(5) $x^2 \sin 3x$　(6) $x^{n-1}\log x$

問 9.3 (3) と**問 9.8** (2) の解答例です。(この2問は発表できません。)

問 9.3 (3) 解答例: (**問 9.3** (1), (2) は以下を参考にしてください。)
$f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right) - \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ とすると、$-1 < x < 1$ のとき、

$$\left\{\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)\right\}' = \frac{1}{\cos^2(\frac{1}{2}\sin^{-1}x)}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \overset{(*)}{=} \frac{2}{1+\cos(\sin^{-1}x)}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\overset{(**)}{=} \frac{1}{1+\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ここで $\overset{(*)}{=}$ では $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ を、$\overset{(**)}{=}$ では $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos(\sin^{-1}x) \geq 0$ に注意して $\cos(\sin^{-1}x) = \sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}$ を用いた。
一方、$\left(\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)' = \cdots = \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (高校数学 III の範囲で計算できる) より、$f'(x) = 0$ を得る。
よって、$f(0) = 0 - 0 = 0$ より、$-1 \leq x \leq 1$ のとき平均値の定理により

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\theta x)(x-0) \qquad (0 < \theta < 1) \tag{1}$$

となる θ が存在するが $f'(\theta x) = 0$ より $f(x) = 0$ すなわち、

$$\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

が成立する。 //
注意: 式 (1) で $0 < \theta < 1$ より $-1 \leq x \leq 1$ に対し $-1 < \theta x < 1$ となっている。

問 9.8 (2) 解答例: (l'Hopital の定理の使い方の参考にしてください。)
$\lim_{x\to\infty}\{ax - (\log x)^2\} = \lim_{x\to\infty} ax\left\{1 - \left(\frac{\log x}{x^{1/2}}\right)^2\right\}$ で、$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{1/2}}$ は $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので l'Hopital の定理より

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\log x)'}{(x^{1/2})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

よって、$\lim_{x\to\infty}\{ax - (\log x)^2\} = \lim_{x\to\infty} ax\left\{1 - \left(\frac{\log x}{x^{1/2}}\right)^2\right\} = \infty.$ //

追加の **ヒント**です。

問 9.4 (5) Cauchy の平均値の定理を用いよ。

問 9.8 (1) (b) $t = \frac{1}{x}$ とおく。$x \to +0$ より $t \to \infty$ に注意。
(2), (6), (8) は対数をとって考えよ。

問 9.9 (1) $\left(\frac{1}{1-2x}\right)^{(n)}$ は $n = 1, 2$ を求め、n のときを予想しそれを数学的帰納法を用いて示せ。
(4) Leibniz の公式より
$\left(x^3e^{2x}\right)^{(n)} = x^3\left(e^{2x}\right)^{(n)} + {}_nC_1(x^3)'\left(e^{2x}\right)^{(n-1)} + {}_nC_2(x^3)''\left(e^{2x}\right)^{(n-1)} + \cdots$ で、
$k \geq 4$ のとき $(x^3)^{(k)} = 0$ に注意せよ。

(5) (4) と同様に Leibniz の公式を用いる。さらに、

$$(\sin 3x)' = 3\cos 3x = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right),$$
$$(\sin 3x)'' = 3\left\{\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}' = 3^2\sin\left(3x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 3^2\sin\left(3x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

を繰り返し用い $(\sin 3x)^{(k)}$ を求める。

(6) $(x^{n-1}\log x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$ となります。数学的帰納法を用いて示してください。