基礎ゼミ I 問題 8　　2023 年 6 月 5 日

置換 σ に対して $\mathrm{sgn}(\sigma)$ で置換 σ の符号 (signature) を表すものとする。教科書では $\varepsilon(\sigma)$ としている。この授業ではどちらを用いてもよい。

問 8.1. 次の 1 次方程式系をはきだし法を用いて解け。a, b は定数とする。
注意: a, b の値によっては非自明な解をもつこともあるので、場合分けして考えよ。

(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 3y + 5z = 2a - 1 \\ 3x + ay + 8z = 2a + 4 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 9y + 7z = 3 \\ ay + 2z = b \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$

問 8.2. 次の漸化式をまず特殊解を求め、次に同伴な同次方程式の一般解を求めることで、元の漸化式の初期条件を満たす解を求めよ ($cf.$ 線形代数学 教科書 **例題 5.4**)。ただし a, b, c は未知の定数とする。

(1) $x_{n+1} - 3x_n = 2n + 1, \quad x_1 = 1,$　特殊解 $x_n = an + b.$

(2) $x_{n+1} + 2x_n = 3n^2 - 4n, \quad x_1 = 1,$　特殊解 $x_n = an^2 + bn + c.$

(3) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2n + 1, \quad x_1 = 1, x_2 = 1,$　特殊解 $x_n = an^2 + bn.$

(4) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = n, \quad x_1 = 1, x_2 = 2,$　特殊解 $x_n = an + b.$

問 8.3. 次の行列 A に対して $[A\,E]$ の行基本変形を用いて A が正則か否かを調べ、正則ならば逆行列を求めよ。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 & -8 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & -1 & 6 \\ -2 & -4 & 1 & -3 \\ 4 & 9 & -1 & 8 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　(5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　(6) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 & 6 \\ -3 & -4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & -6 & -9 \\ 6 & 8 & -9 & -12 \end{bmatrix}$

問 8.4. 次の行列 A を基本行列の積として表せ。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

問 8.5. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) σ_1 と σ_2 をそれぞれ互換の積で表し、その符号 $\mathrm{sgn}(\sigma_1), \mathrm{sgn}(\sigma_2)$ を求めよ。また、${\sigma_1}^2$ を求めよ。

(2) τ を互換の積で表しその符号 $\mathrm{sgn}(\tau)$ を求めよ。また、 $\sigma_1\sigma_2, \tau^3$ を求めよ。

(3) $\sigma_1\rho = \sigma_2$ をみたす置換 ρ を求めよ。

問 8.6. $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ であることを示せ。

問 8.7. $n \geqq 2$ とする。n 文字の置換のうち、遇置換及び奇置換の個数は等しく共に $\dfrac{n!}{2}$ 個ずつあることを示せ。