

基礎ゼミ I 問題 7 2023 年 5 月 29 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。次ページにヒントを書きました。参照ください。

問 7.1. 中間値の定理を用いて、以下を示せ。

- (1) $f(x)$ が $[-1, 1]$ で連続であって $f(1) = f(-1) = 0$ ならば、原点を通る直線は $y = f(x)$ のグラフと交わる。
 (2) 閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が、 $f(a), f(b) \in (a, b)$ ををみたせば、 $f(c) = c$ となる $c \in (a, b)$ が存在する。
 (3) 区間 I 上の 1 対 1 連続関数は狭義単調である。

問 7.2. 次の値を求めよ。($\sin^{-1} x$ などは、 $\arcsin x$ とも書かれる。どちらの記号を使っても良い。)

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (c) $\tan^{-1} \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3} \cdot 1}$

問 7.3. 次の式を証明せよ。($\sin^{-1} x$ などは、 $\arcsin x$ とも書かれる。どちらの記号を使っても良い。)

(1) (a) $\cos(\sin^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$, $(-1 \leq x \leq 1)$ (b) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ $(-1 \leq x \leq 1)$
 (2) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & (x > 0) \\ -\frac{\pi}{2}, & (x < 0) \end{cases}$ (3) $\sin^{-1} \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \cos^{-1} x, & (0 \leq x \leq 1) \\ \pi - \cos^{-1} x, & (-1 \leq x \leq 0) \end{cases}$
 (4) $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ (5) $2 \tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$ (6) $\tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 5 + \tan^{-1} 8 = \frac{5}{4}\pi$

注意. ヒントとして (3), (4) は裏に解答例を書きました。(この 2 問は発表できません。)

問 7.4. 双曲線関数 (微分積分学の教科書 p.35) について、次を示せ。

(1) (a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, (b) $(\sinh x)' = \cosh x$, (c) $(\cosh x)' = \sinh x$, (d) $(\tanh x)' = \frac{1}{(\cosh x)^2}$
 (2) (a) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$, (b) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$
 (3) (a) $(\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, (b) $(\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$, (4) $(\operatorname{sech}^{-1} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$ $(0 < x \leq 1)$

問 7.5. 次の関数を微分せよ。ただし、 $a, b > 0$ は定数とする。

(1) (a) $x\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$ (b) $\sin^{-1} \frac{x}{a}$ (c) $\cos^{-1}(\sin x)$ (d) $\log \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$
 (2) (a) $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ (b) $\sin^{-1}(\cos x)$ (c) $\tan^{-1} \frac{1}{x}$ (d) $\log(x + \sqrt{x^2 + a^2})$
 (3) (a) x^x (b) $\tan^{-1} \frac{x}{a}$ (c) $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$ (d) $\frac{\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2-x^2}}$
 (4) (a) $\cos^{-1} \frac{x}{a}$ (b) $\tan^{-1} \frac{1+x}{1-x}$ (c) $\frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \log(1-x^2)$
 (5) (a) $(a^x + b^x)^{1/x}$ (b) $\tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ (c) $\sinh^{-1}(\cosh x)$

問 7.6. 次の関数の $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, $f'(0)$ があれば求めよ。

(1) (a) $f(x) = \sin |x|$ (b) $f(x) = |x| - \tan |x|$
 (2) $f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1} \frac{1}{x}, & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$ (3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$ (4) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & (x \neq 0) \\ 1, & (x = 0) \end{cases}$

問 7.7. 関数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & (x \neq 0) \\ 0, & (x = 0) \end{cases}$ について、 $f(x)$ が $x = 0$ で微分可能であることを示せ。また、 $f'(x)$ が $x = 0$ で連続ではないことを確かめよ。

問 7.3 (3), (4) の解答例: 問 7.2, 問 7.3 の解答のためのヒントです。

問 7.3 (3) $\theta = \sin^{-1} \sqrt{1-x^2}$ とすると、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ かつ $1-x^2 = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, すなわち $\cos^2 \theta = x^2$.

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta \geq 0$ なので、 $0 \leq x \leq 1$ のとき $\cos \theta = x$. よって、 $\theta = \cos^{-1} x$.

一方、 $-1 \leq x < 0$ のとき $\cos \theta = -x$. ここで、 $\frac{\pi}{2} < \cos^{-1} x \leq \pi$ より $0 \leq \pi - \cos^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ で、
 $\cos(\pi - \cos^{-1} x) = -\cos(\cos^{-1} x) = -x$ なので $\theta = \pi - \cos^{-1} x$.

以上より、 $\sin^{-1} \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \cos^{-1} x, & (0 \leq x \leq 1) \\ \pi - \cos^{-1} x, & (-1 \leq x < 0) \end{cases}$. //

問 7.3 (4) $\tan(\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3}) = \frac{\tan(\tan^{-1} \frac{1}{2}) + \tan(\tan^{-1} \frac{1}{3})}{1 - \tan(\tan^{-1} \frac{1}{2}) \cdot \tan(\tan^{-1} \frac{1}{3})} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$.

$0 < \tan^{-1} \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$, $0 < \tan^{-1} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$ より $0 < \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$. //

問 7.5 は次の逆三角関数の微分の公式を用いれば、高校数学 III で学ぶ知識を応用することで解答できます。

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1), \quad (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1), \quad (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

この公式は既知とします。(使って解いてください。)