

基礎ゼミ I 問題 6 2023 年 5 月 22 日

問 6.1. 次の行列を行基本変形で階段行列にし、階数を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & 6 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \\ 3 & 7 & 2 & 15 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 11 & 1 & 9 & 6 & 13 \end{bmatrix} \quad (5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (6) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

問 6.2. 次の行列 A の階数を求めよ。注意: (1), (2) は定数 a によって場合分けして階数を求めよ。

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & a-3 \\ 1 & 1 & a+1 & -2 \\ 1 & a+2 & 1 & -3 \\ a+1 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \quad (2) \begin{bmatrix} -1 & 0 & a-1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & a-2 \\ a+2 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & a-3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad (3) \begin{bmatrix} i & 1-i & 3 & -i \\ 1+i & i & -i & 2-i \\ 1-i & -2+3i & -6-2i & 2+i \\ 2+i & -1+3i & -3-2i & 4-i \end{bmatrix}$$

問 6.3. 次の方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + 6x_4 - 5x_5 = 3 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \end{cases} \quad (7) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5 \\ x_3 - 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 10x_4 = -3 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 14x_4 = 0 \end{cases} \quad (9) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad (10) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

問 6.4. 次の方程式が自明でない解 (すなわち $x = y = z = 0$ ではない解) をもつための定数 a の条件を求め、そのときの一般解を求めよ。

$$(1) \begin{cases} -x + 2y + az = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \\ 3x - ay + 2z = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y + az = 0 \\ 4x + ay + 2z = 0 \\ 3x - 3y - z = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} 2x + y - 5z = 0 \\ x - y + az = 0 \\ ax + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$