基礎ゼミ I 問題 5　　2023 年 5 月 15 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。次ページにヒントを書きました。参照ください。

問 5.1. a_0, a_1, p, q を実数とし、a_n を漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, によって定め、$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ とおく。このとき、$p^2 + 4q < 0$ であれば数列 $\{b_n\}$ は発散することを示せ。

問 5.2. (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c$ が存在して $c < 1$ ならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ。
(2) 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ について、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$ が存在して $c > 1$ ならば、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を示せ。

問 5.3. 数列 $\{a_n\}$ について、ある実数 $0 < L < 1$ があって、すべての $n \in \boldsymbol{N}$ に対して $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq L|a_{n+1} - a_n|$ が成立すると仮定する。このとき、$\{a_n\}$ は Cauchy 列 (*cf*. 微分積分学の教科書 p.21) となることを示せ。

問 5.4. 問 5.3 を用いて次で定義される数列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列となることを示し、その極限を求めよ。
(1) $a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n + 2}$, $a_1 = p > 0$,　　(2) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 - {a_n}^2)$, $a_1 = q$, $|q| \leq \dfrac{1}{2}$.

定義 (ε-δ 論法 1)**.** x が α に近づくとき (ただし $x \neq a$)、関数 $f(x)$ が実数 a に収束するとは、任意の正数 ε に対してある (ε から定まる) 正数 δ が存在して、$0 < |x - \alpha| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon$ が成立することと定義する。このとき $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$, あるいは $f(x) \to a$ $(x \to \alpha)$ と表す。

$f(x)$ が収束しないとき、$f(x)$ は発散するという。

定義 (ε-δ 論法 2)**.** x が α に近づくとき (ただし $x \neq a$)、関数 $f(x)$ が ∞ に発散するとは、任意の正数 K に対してある (ε から定まる) 正数 δ が存在して、$0 < |x - \alpha| < \delta \implies f(x) > K$ が成立することと定義する。このとき $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} f(x) = \infty$, あるいは $f(x) \to \infty$ $(x \to \alpha)$ と表す。

問 5.5. (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = a$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ の ε-δ 論法による定義を書け.

問 5.6. (a) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha+0} f(x) (= \lim_{x\downarrow\alpha} f(x)) = a$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha-0} f(x) (= \lim_{x\uparrow\alpha} f(x)) = \infty$ の ε-δ 論法による定義を書け.

問 5.7. $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$ の必要十分条件は $x_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$, $x_n \neq \alpha$ $(n = 1, 2, \ldots)$ なる任意の数列 $\{x_n\}$ に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$ であることを示せ。

問 5.8. $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} f(x) = a$, $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} g(x) = b$ とする。ε-δ 論法を用いて (問 5.7 を用いずに) 次を示せ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} |f(x)| = |a|$,　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} (f(x) + g(x)) = a + b$,　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} f(x)g(x) = ab$,
(4) $b \neq 0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}$,　　(5) $f(x) \leqq g(x)$ のとき $a \leqq b$

注意: 問 5.7 を用いると、教科書第 1 章の数列に関する定理 1–5 から上記が成立することが直ちに従う。

問 5.9. 次の極限値を求めよ。ただし、$\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1$, $\displaystyle\lim_{t\to0} (1 + t)^{1/t} = e$ は証明なしに用いてよいものとする。

(1) (a) $\displaystyle\lim_{x\to2-0} \frac{2x^2 - 3x - 2}{|x^2 - x - 2|}$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{x \tan x}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to0} x \sin\frac{1}{x}$　(d) $\displaystyle\lim_{x\to1} x^{\frac{2}{1-x}}$

(2) (a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(\cos x)}{x - \frac{\pi}{2}}$　(c) $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\sin(x + h) + \sin(x - h) - 2\sin x}{h^2}$

(3) (a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\cos\sqrt{x + 1} - \cos\sqrt{x}\right)$　(b) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{\tan(x^2 - 1)}{\sin(x - 1)}$　(c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x}$

問 5.10. $\mathbb{R}$ で定義された連続関数 $f(x)$ が $f(x + y) = f(x) + f(y)$ を満たすとすると, 定数 a が存在して, $f(x) = ax$ となることを示せ。
注意: 一般には、$f(x + y) = f(x) + f(y)$ を満たしても $f(x) = ax$ とならない例が知られている。

ヒント:

問 5.1 $\{b_n\}$ の極限を β とするとき b_n は実数なので β も実数、一方 β の満たす式を導くと条件より β は実数になりえないことより矛盾を導け。

問 5.2 (1) まず、$0 < \varepsilon < 1 - c$ とするとき、ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < c + \varepsilon (< 1)$ となることを導け。

(2) まず、$0 < \varepsilon < c - 1$ とすると、ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > c - \varepsilon (> 1)$ となることを導け。

問 5.4 (1) すべての n に対して $a_n \geq 1$ を示せば、$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \dfrac{1}{4}|a_{n+1} - a_n|$ が示せ、

(2) すべての n に対して $|a_n| \leq \dfrac{1}{2}$ を示せば、$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \dfrac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|$ が示せ、

問 5.3 より $\{a_n\}$ は Cauchy 列、すなわち収束列となることがわかる。

問 5.8 (2), (3) は数列の極限の証明 (微分積分学の教科書 p.9 **参考**) を真似て証明できる。(1), (4) も同様。

ヒントではありませんが、**問 5.9** は高校数学 III で学ぶ知識で解答できます。