基礎ゼミ I 問題 3　　2023 年 5 月 1 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

- ε-δ 論法 ($cf.$ 微分積分学の教科書 pp.9-10 の**参考**) を用いて、以下の問い (問 3.1 – 問 3.9) に答えよ。

問 3.1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なら $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ を示せ。(ヒント：$\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$ をまず示せ。)

問 3.2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする。$\alpha > 0$ なら、自然数 N が存在して、$n \geqq N$ となるすべての n について $a_n > \dfrac{\alpha}{2}$ が成立することを示せ。

問 3.3. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\alpha \neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\alpha}$ を示せ。(ヒント：問 3.1, 問 3.2 を用いる。)

問 3.4. $a_n \geqq b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。以下を示せ。(問 3.4 と問 3.5 をはさみうちの原理ということにする。)

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき $a \geqq b$. (ヒント： 例えば $a < b$ と仮定して矛盾を導く。)

(2) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ のとき $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

問 3.5. $a_n \geqq c_n \geqq b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ かつ $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ を示せ。

問 3.6. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ とする。任意の実数 K に対して $n \geqq N$ ならば $a_n > K$ となる自然数 N を K を用いて具体的に表し (例えば $N = 2^{[2K]}$, $[K]$ は K 以下の最大整数を表す)、$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を確認せよ。

問 3.7. $a_n = (-1)^{n-1}$ とする。ε-δ 論法を用いて、数列 $\{a_n\}$ が発散する (収束しない) ことを確かめよ。

問 3.8. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ を証明せよ。

問 3.9. 自然数の増加列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ に対して、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ を示せ。
($\{a_{n_k}\}$ を $\{a_n\}$ の部分列という。$cf.$ 微分積分学 教科書 p.18.)

- 次の問 3.10, 問 3.11 は微分積分学 教科書 p.11, **定理 6 (Weierstrass の定理)** の応用です。

問 3.10. $-2 \leqq p < 1 + \sqrt{5}$ とし、$a_1 = p$, $a_{n+1} = \sqrt{4 + 2a_n}$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める。

(a) すべての n に対して $a_n < 4$ を示せ。　(b) $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ。　(c) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

問 3.11. $2 - \sqrt{3} < q < 2 + \sqrt{3}$ とし、$b_1 = q$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left({b_n}^2 + 1\right)$ によって定義される数列 $\{b_n\}$ を考える。

(a) すべての n に対して $b_n > 0$ を示せ。　(b) $\{b_n\}$ が単調減少であることを示せ。　(c) $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

- 次の 2 つの問については微分積分学 教科書 pp.14–17, **例 5**, **例 7** を参照ください。

問 3.12. はさみうちの原理を用いて次の極限値を求めよ。(3), (4) では $c > 1$, (5) では $0 < a < b < c$ とする。

(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$　(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$　(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!}$　(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n^2}$　(5) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$

問 3.13. 一般項が次の式で与えられる数列の極限値を求めよ。ただし、$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ は既知とする。

(1) (a) $\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$　(b) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(2) (a) $\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n$　(b) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$　(3) $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$　(4) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$

ヒント: (1) (a) 加法定理を用いよ, (b) まず $\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ を計算せよ,

(2) (b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \alpha$ となること、すなわち、$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$ を用いよ。

(3) 二項定理により $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqq {}_nC_1 \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ を示し、はさみうちの原理を用いよ。

(4) ${}_nC_k \leq n^k$ と二項定理により $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 + {}_nC_1 \dfrac{1}{n^2} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} n^k \left(\dfrac{1}{n^2}\right)^k < 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{n-1}{n^2}$ を示し、はさみうちの原理を用いよ。