基礎ゼミ I　問題 1　　　2023 年 4 月 17 日

問 1.1. p_n の漸化式を考えることで次の確率 p_n を求めよ。

(1)　表が出る確率が p $(0 < p < 1)$ のコインを n 回投げるとき、偶数回表が出る確率 p_n を求めよ。

(2)　箱 A, B のそれぞれに赤球 1 個、白球 5 個入っている。一回の試行で箱 A の球 1 個を箱 B の球 1 個と交換する。n 回の試行の後、箱 A に赤球 1 個、白球 5 個が入っている確率 p_n を求めよ。ヒント: n 回の試行の後、箱 A に赤球 2 個、白球 3 個入っている確率 q_n も合わせて考えよ。

問 1.2. 次の漸化式よって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2n$　　(2)　$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1}$

(3)　$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$　　(4)　$a_1 = 2, \quad na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$

(5)　$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$　　(6)　$a_1 = 1, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n$

問 1.3. 次の漸化式よって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(解き方は裏面を見よ。)

(1)　$a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$　　(2)　$a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$

(3)　$a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$　　(4)　$a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

問 1.4. p_n の漸化式を考えることで次の確率 p_n を求めよ。

(1)　表が出る確率が p $(0 < p < 1)$ のコインを投げて表が出たら 2 点、裏が出たら 1 点を得られるゲームを繰り返し行う。このゲームを続け合計点が n 点以上になるまで続けるとき、ちょうど n 点になる確率 p_n を求めよ。ヒント: p_{n+1} を 1 回目の試行の結果が表か裏で場合分けして考えよ。(2) も同様にできる。

(2)　サイコロを何回も投げるゲームをする。1 の目が出たら得点 1 を加え、2 また 3 の目が出たら得点 2 を加え、4, 5, 6 の目が出たらそこでゲームを止める。ゲームを始める前の得点を 0 とするとき、得点 n でゲームを終わる確率 p_n を求めよ。

(3)　表が出る確率が p $(0 < p < 1)$ のコインを使って、表が出たら 1 受取り、裏が出たら 1 支払うゲームを所持金が 0 になるか N になるまで行う。ゲームを始める前の所持金を n $(0 \leq n \leq N)$ とするとき最終的に 0 で終わる確率 p_n を求めよ。ヒント: $p_0 = 1$, $p_N = 0$.

注意. 問 1.5 –問 1.7 の解き方は線形代数学の教科書 pp.2–4 にあります。

問 1.5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ とする。

(1) $AB + AC$, $A(B + C)$ を計算し比較せよ。　(2) $C(\boldsymbol{xz}) - (2B)A$ を計算せよ。　(3) $A\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z}B)\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

問 1.6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ とする。次を計算せよ。

(1) $AB - BA$,　(2) $BC - CB$,　(3) $A^2 - B^2$,　(4) $(A + B)(A - B)$,　(5) $ABC - AC$,

(6) $(A + {}^tA)(A - {}^tA)$,　(7) $C\,{}^tC$ と ${}^tCC$,　(8) $A\,{}^tB$ と ${}^tBA$,　(9) $CA - C$ と $C(A - E)$

問 1.7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ とする。

(1) $AX = B$ を満たす行列 X を求めよ。　(2) $YA = C$ を満たす行列 Y を求めよ。

問 1.3 のヒント:

- 漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ の一般項の求め方: 特性方程式 $x^2 = px + q$ の根を α, β とすると、

$\alpha \neq \beta$ のとき、$a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$ が、
$\alpha = \beta$ のとき、$a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1}$ が

この漸化式を満たすことが証明できる。実際、解と係数の関係より $\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = -q$ に注意すると、
$a_{n+2} = (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$ より

$$\begin{aligned} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} &= \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \text{ と変形でき、} \quad a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\beta^n \cdots \text{(I)} \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} &= \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \text{ と変形でき、} \quad a_{n+1} - \beta a_n = (a_1 - \beta a_0)\alpha^n \cdots \text{(II)} \end{aligned}$$

$\alpha \neq \beta$ なら、(II) から (I) を引き、$\alpha - \beta$ で割ることで、$a_n = \dfrac{a_1 - \beta a_0}{\alpha - \beta}\alpha^n - \dfrac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha - \beta}\beta^n$ を得る。

$\alpha = \beta$ のとき $\alpha \neq 0$ の場合のみ考える。($\alpha = 0$ のときは漸化式が $a_{n+2} = 0$ なり $a_n = 0$ を得る。)
この場合、(I) と (II) は同じ式になってしまうが、$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\alpha^n$ の両辺を α^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} \quad \text{となり、} \quad \frac{a_n}{\alpha^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k}\right) + \frac{a_0}{\alpha^0} = n\frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} + a_0.$$

よって、$a_n = (a_1 - \alpha a_0)n\alpha^{n-1} + a_0\alpha^n$ となることが従う。
注意: ここでは a_1, a_0 の値を与えて解いているが、**問 1.3** では a_2, a_1 の値を与えているので、必要ならば c_1, c_2 を取り替えて

$$\alpha \neq \beta \text{ のときは } a_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1}, \quad \alpha = \beta \text{ のときは } a_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2 n\alpha^{n-1}$$

として c_1, c_2 を決定したほうが計算が容易です。

- 漸化式 $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ の解き方は、特性方程式 $x^3 = px^2 + qx + r$ の根を α, β, γ とすると、

$$\begin{array}{ll} \alpha, \beta, \gamma \text{ がすべて異なるとき、} & a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n, \\ \alpha = \beta \neq \gamma \text{ (一組のみ重根) のとき、} & a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1} + c_3\gamma^n, \\ \alpha = \beta = \gamma \text{ (3 重根) のとき、} & a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1} + c_3 n(n-1)\alpha^{n-2} \end{array}$$

がこの漸化式を満たすことが証明できる。このためには、$b_n = a_{n-1},\ c_n = a_{n-2}$ とすると、

$$\begin{cases} a_{n+1} = \ \ b_n \\ b_{n+1} = \ \ c_n \\ c_{n+1} = pc_n + qb_n + ra_n \end{cases} \qquad \text{すなわち} \quad \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ r & q & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$$

と表せる。すなわち、行列 A と縦ベクトルの列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ に関する漸化式 $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ を解く問題に帰着できる。このとき、$\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ となり、行列の n 乗に関する問題となる。行列の n 乗についての一般的な計算法は線形代数の教科書第 18 章–第 21 章で学ぶ。