基礎ゼミ I　問題 14　　2021 年 7 月 19 日

問 14.1. $f(x)$ が $[a,b]$ で連続で、つねに $f(x)\geq 0$ で $M=\max_{a\leq x\leq b} f(x)$ とする。このとき、次を示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f(x)^n\,dx\right)^{1/n}=M$$

問 14.2. 次の等式をみたす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x)=1+\int_0^\pi f(t)\sin(x-t)\,dt$$

問 14.3. 次の広義定積分を求めよ。たたし、$a<b,\ \alpha>0,\ n\in\boldsymbol{N}$ とする。

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$　(3) $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$　(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1\log x\,dx$　(6) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x(1+x^2)}$　(7) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{x+1}{x(1+x^2)}\,dx$　(8) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{(1+x^2)^2}$

(9) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$　(10) $\displaystyle\int_0^\infty x^ne^{-\alpha x}\,dx$　(11) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx$　(12) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\,dx$

(13) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1-\cos x}\,dx$　(14) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos x\,dx$　(15) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{4x^2+6x+3}$　(16) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{\sqrt[3]{e^x-1}}$

(17) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$　(18) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{3x}\sqrt{1-e^{3x}}\,dx$　(19) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx$　(20) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

問 14.4. $\alpha>0$ とする。次の広義積分が絶対収束するかを調べよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{\log(x+1)}{x^\alpha}\,dx$　(2) $\displaystyle\int_e^\infty\frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$　(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(\sin\theta)^\alpha}$　(4) $\displaystyle\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-x^2}\,dx$

問 14.5. (1) 広義積分 $\displaystyle\int_\pi^\infty\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right|dx$ は $0<\alpha\leq 1$ のとき発散し $\alpha>1$ のとき収束することを示せ。

(2) $\alpha>0$ のとき、広義積分 $\displaystyle\int_\pi^\infty\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$ は収束することを示せ。

(3) $\alpha>1$ とする。広義積分 $\displaystyle\int_{\pi^{1/\alpha}}^\infty\sin(x^\alpha)\,dx$ の 収束・発散を調べよ。

問 14.6 (Cycloid(サイクロイド))**.** $x(t)=a(t-\sin t),\ y(t)=a(1-\cos t)\ (a>0)$ の 1 つの弧と x-軸との間の面積を求めよ。また、その弧の長さを求めよ。

問 14.7 (Asteroid(アステロイド))**.** 原点を中心とする半径 $a\ (a>0)$ の大円に、半径 $\dfrac{a}{4}$ の小円が $(a,0)$ を接点として内側に接している。この小円が大円の内側を滑ること無く転がるとき、小円上の点 $(a,0)$ の軌跡を円の転がった角度を θ としてパラメータ曲線で表示せよ。

問 14.8. 上で与えたアステロイドで、パラメータが $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ を動くときの曲線の長さを求めよ。

問 14.9. 上で与えたアステロイドが囲む部分の面積を求めよ。

問 14.10 (Catenary (カテナリー, 懸垂線))**.** $y=a\cosh\dfrac{x}{a},\ (a>0)$ の $0\leqq x\leqq a$ の範囲の長さを求めよ。

問 14.11 (Cardioid (カージオイド, 心臓形))**.** 極座標表示された曲線 $r=a(1+\cos\theta)\ (a>0,\ 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ の囲む部分の面積を求めよ。

問 14.12 (Lemniscate (レムニスケート, 連珠形))**.** $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0)$ を極座標表示で表せ。また、この曲線が囲む 2 つの珠の部分の面積の和を求めよ。[*1]

[*1] この曲線の長さは、楕円積分 (楕円の全長を求める際にも現れる) と呼ばれる初等的には求まらない積分になる。C. L. Siegel, Topics in Complex Function Theory, vol. 1 に詳しい解説がある。

問 14.3 ヒント:

(4) $t = x^{1/6}$ とおく。

(14) $I_M = \displaystyle\int_0^M e^{-\alpha x}\cos x\,dx$ に対して、部分積分を 2 回用いよ。

(16) $u = \sqrt[3]{e^x - 1}$ とおき、u に関する分数関数の積分に帰着する。

(19) $t = \dfrac{1}{x}$ と置換することで $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\,dx = -\int_0^\infty \frac{t^2\log t}{(1+t^2)^2}\,dt$ を導き、$2I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{(1-x^2)\log x}{(1+x^2)^2}\,dx = \int_0^\infty \Big(\frac{x}{1+x^2}\Big)'\log x\,dx$ と部分積分法を用いる。