基礎ゼミ I　問題 4　　　2021 年 5 月 10 日
直交行列, 交代行列等の記号や用語は線形代数学の教科書を参照ください。

問 4.1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ とする。このとき $A\tilde{A} = \tilde{A}A = (ad-bc)E$ を示せ。これより、A が正則であるための必要十分条件は $ad - bc \neq 0$ であり、$A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\tilde{A}$ となる。

問 4.2. A, B が正則行列ならば、$P = \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ は正則であって、$P^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}$ であることを示せ。

問 4.3. 問 4.1 と問 4.2 を用いて次の行列の逆行列を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　(5) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

問 4.4. 正方行列 A が $A^2 - sA + tE = O$ を満たすとする。このとき、$t \neq 0$ であれば A は正則であって、A の逆行列は $A^{-1} = \dfrac{1}{t}(sE - A)$ となることを示せ。

問 4.5. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。問 4.4 を用いて次の問に答えよ。
(1) $A^2 - 5A + 4E = O$ を示し、A^{-1}, A^{-2}, を求めよ。
(2) $B^2 + 2B - 8E = O$ を示し、B^{-1}, B^{-2}, を求めよ。

問 4.6. A を正方行列とし、$E + A$ を正則行列とする。このとき次を示せ。($cf.$ 線形代数学 教科書 **例題 3.10**.)
(1) $(E-A)(E+A)^{-1} = (E+A)^{-1}(E-A)$
(2) $E + {}^tA$ も正則
(3) A が交代行列ならば $(E-A)(E+A)^{-1}$ は直交行列
(4) A が直交行列ならば $(E-A)(E+A)^{-1}$ は交代行列

問 4.7. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ とする。
(1) P が直交行列であることを確かめ、$P^{-1}AP$ を計算せよ。(ヒント: $P^{-1}AP$ は対角行列になります。)
(2) A^k $(k = 1, 2, \ldots)$ を (1) を用いて求めよ。

問 4.8. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ とする。
(1) P が直交行列であることを確かめ、$P^{-1}AP$ を計算せよ。(ヒント: $P^{-1}AP$ は対角行列になります。)
(2) A^k $(k = 1, 2, \ldots)$ を (1) を用いて求めよ。

問 4.9. $A = \begin{pmatrix} -1 & -3i \\ 3i & -1 \end{pmatrix}$, $U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ とする。
(1) U がユニタリ行列であることを確かめ、$U^{-1}AU$ を計算せよ。(ヒント: $U^{-1}AU$ は対角行列になります。)
(2) A^k $(k = 1, 2, \ldots)$ を (1) を用いて求めよ。

問 4.10. 正方行列 A がべき零であれば $E - A$ は正則であることを示し、$(E-A)^{-1}$ を A の多項式で表せ。
ヒント: $(E-A)(E + A + \cdots + A^{k-1})$ を計算せよ (A がべき零 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ある自然数 k があって $A^k = O$)。
def は定義 (definition) の意味です。