基礎ゼミ I　問題 2　　**2021 年 4 月 19 日**

E は単位行列, O は零行列を表す。A^*, エルミート行列等の記号や用語は線形代数学の教科書を参照ください。

問 2.1. $A = \begin{pmatrix} 1-i & 2+i \\ 1+3i & 2-3i \\ i & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ i & 2 \end{pmatrix}$, とする。次を計算し比較せよ。

(1) $(AB)^*$ と B^*A^*,　　(2) $(BA^*)^*$ と AB^*

問 2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & -i \\ -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1+i \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ -1-i \end{pmatrix}$ とする。次を求めよ。

(1) $A + A^*$ と $A - A^*$,　　(2) AA^*,　　(3) A^*A,　　(4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ を満たす縦ベクトル $\boldsymbol{x}$

問 2.3. 正方行列 A がエルミート行列と歪エルミート行列の和にただ一通りに表されることを示せ。

問 2.4. (m, n) 型行列 $A = (a_{ij})$ に対して、$B = AA^*$ とおく。B の (k, l) 成分を求め、$B^* = B$ が成立することを示せ。また、特に B の対角成分が非負であることを示せ。

問 2.5. n 次正方行列 A, B に対して、$[A, B] = AB - BA$ とおく (これを A, B の交換子積という)。

(1) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$ が成立することを示せ (これを Jacobi(ヤコビ) の恒等式という)。

(2) A, B ともに歪エルミート行列であれば、$[A, B]$ も歪エルミート行列であることを示せ。

問 2.6. 任意の 3 次正方行列 X と可換な 3 次正方行列は $A = aE$ に限ることを証明せよ。

ヒント: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とし、$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合に、それぞれ $AX = XA$ を計算することで a_{ij} たちの満たすべき条件をまず調べよ。

問 2.7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と可換な 3 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ を求めよ。

問 2.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と可換な 2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ。また、2 次正方行列 X, Y がともに A と可換であれば、X と Y は可換となることを示せ。

問 2.9. 次の条件を満たす 2 次正方行列 A をすべて決定せよ。

(1)　$A^2 = A$　　　　(2) $A^2 + E = O$

問 2.10. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、Cayley-Hamilton の公式 $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)E = O$ を示せ。

問 2.11. 自然数 n に対して次を求めよ。(*cf*. **問 2.11, 2.12** は教科書 p.12, **2.3**, **2.4** を参照せよ。)

(1)　$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ のとき A^n,　　(2)　$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき B^n,　　(3)　$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき C^n.

問 2.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $(A - E)(A - 4E) = O$ を示し、A^n, $n \in \mathbb{N}$, を求めよ。

(2) $B(B - E)(B - 2E) = O$ を示し、B^n, $n \in \mathbb{N}$, を求めよ。

(3) $C(C - 3E) = O$ を示し、C^n, $n \in \mathbb{N}$, を求めよ。

(4) $(D - 4E)^k$, $k = 2, 3$, を計算し、D^n, $n \in \mathbb{N}$, を求めよ。