**基礎ゼミ I 問題 1　　2021 年 4 月 12 日**

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

**問 1.1.** $xy$ 平面上で、極方程式 $r = \dfrac{2}{1+\cos\theta}$ により与えられる曲線 $C$ を考える。

(a) 曲線 $C$ の概形を図示せよ。

(b) $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ とし、曲線 $C$ 上の極座標が $(r, \theta)$ である点 P を考える。点 P における曲線 $C$ の接線の傾きは $-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$ であることを示せ。

(c) (b) の点 P から $y$ 軸におろした垂線と $y$ 軸の交点を H, 原点を O とする。∠OPH の二等分線は、点 P における曲線 $C$ の接線となることを示せ。

**問 1.2.** 複素数平面上の点 $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ ($a, b, c, d$ は実数) を考える。

(a) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ ($\theta$ は実数) とし、$z = \alpha + e^{i\theta}(\beta - \alpha)$ とおくと、複素数平面上の点 A($\alpha$), B($\beta$), C($z$) について AB=AC であり、$\angle \mathrm{BAC} = \theta$ となることを示せ。

(b) 点 $\gamma = s + it$ ($s, t$ は実数) を複素数平面上の 3 点 $\alpha, \beta, \gamma$ が正三角形をなすように決める。このとき、$a, b, c, d$ が有理数で $a \neq c$ かつ $b \neq d$ であれば、$s, t$ は無理数であることを示せ。ただし $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい。

**問 1.3.** 次の漸化式よって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2n$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1}$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$

(4) $a_1 = 2, \quad na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$

(5) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$

(6) $a_1 = 1, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n$

**問 1.4.** 次の漸化式よって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(解き方は裏面を見よ。)

(1) $a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$

(3) $a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

(4) $a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

**問 1.5.** $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$ が成り立つこと、等号は $x = 0$ または $y = 0$ のときのみに成り立つこと、を示せ。

**注意.** 問 1.6–1.8 の解き方は線形代数学の教科書 pp.2–4 にあります。

**問 1.6.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $AB + AC$, $A(B + C)$ を計算し比較せよ。　(2) $C(\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}) - (2B)A$ を計算せよ。　(3) $A\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z}B)\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

**問 1.7.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。次を計算せよ。

(1) $AB - BA$,　(2) $BC - CB$,　(3) $A^2 - B^2$,　(4) $(A + B)(A - B)$,　(5) $ABC - AC$,

(6) $(A + {}^tA)(A - {}^tA)$,　(7) $C\,{}^tC$ と ${}^tCC$,　(8) $A\,{}^tB$ と ${}^tBA$,　(9) $CA - C$ と $C(A - E)$

**問 1.8.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $AX = B$ を満たす行列 $X$ を求めよ。　(2) $YA = C$ を満たす行列 $Y$ を求めよ。

**問 1.4 のヒント:**

- 漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ の一般項の求め方: 特性方程式 $x^2 = px + q$ の根を $\alpha, \beta$ とすると、

$\alpha \neq \beta$ のとき、$a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$ が、
$\alpha = \beta$ のとき、$a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1}$ が

この漸化式を満たすことが証明できる。実際、解と係数の関係より $\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = -q$ に注意すると、
$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$ より

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \text{ と変形でき、} \quad a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\beta^n \ \cdots \ \text{(I)}$$
$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \text{ と変形でき、} \quad a_{n+1} - \beta a_n = (a_1 - \beta a_0)\alpha^n \ \cdots \ \text{(II)}$$

$\alpha \neq \beta$ なら、(II) から (I) を引き、$\alpha - \beta$ で割ることで、$a_n = \dfrac{a_1 - \beta a_0}{\alpha - \beta}\alpha^n - \dfrac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha - \beta}\beta^n$ を得る。

$\alpha = \beta$ のとき $\alpha \neq 0$ の場合のみ考える。($\alpha = 0$ のときは漸化式が $a_{n+2} = 0$ なり $a_n = 0$ を得る。)
この場合、(I) と (II) は同じ式になってしまうが、$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\alpha^n$ の両辺を $\alpha^{n+1}$ で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} \quad \text{となり、} \quad \frac{a_n}{\alpha^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k}\right) + \frac{a_0}{\alpha^0} = n\frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} + a_0.$$

よって、$a_n = (a_1 - \alpha a_0)n\alpha^{n-1} + a_0\alpha^n$ となることが従う。
注意: ここでは $a_1, a_0$ の値を与えて解いているが、問 1.4 では $a_2, a_1$ の値を与えているので、必要ならば $c_1, c_2$ を取り替えて

$$\alpha \neq \beta \text{ のときは } a_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2\beta^{n-1}, \quad \alpha = \beta \text{ のときは } a_n = c_1\alpha^{n-1} + c_2 n\alpha^{n-1}$$

として $c_1, c_2$ を決定したほうが計算が容易です。

- 漸化式 $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ の解き方は、特性方程式 $x^3 = px^2 + qx + r$ の根を $\alpha, \beta, \gamma$ とすると、

| | |
|---|---|
| $\alpha, \beta, \gamma$ がすべて異なるとき、 | $a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n,$ |
| $\alpha = \beta \neq \gamma$ (一組のみ重根) のとき、 | $a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1} + c_3\gamma^n,$ |
| $\alpha = \beta = \gamma$ (3 重根) のとき、 | $a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1} + c_3 n(n-1)\alpha^{n-2}$ |

がこの漸化式を満たすことが証明できる。このためには、$b_n = a_{n-1},\ c_n = a_{n-2}$ とすると、

$$\begin{cases} a_{n+1} = \ b_n \\ b_{n+1} = \ c_n \\ c_{n+1} = pc_n + qb_n + ra_n \end{cases} \qquad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ r & q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

と表せる。すなわち、行列 $A$ と縦ベクトルの列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ に関する漸化式 $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ を解く問題に帰着できる。このとき、$\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ となり、行列の $n$ 乗に関する問題となる。行列の $n$ 乗についての一般的な計算法は線形代数の教科書第 18 章–第 21 章で学ぶ。