

## 2.0 多次元確率変数 (続き)

連続型の場合: 2次元確率変数  $(X, Y)$  が連続型であるとは、ある関数  $f(x, y)$  を用いて

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

と表されるときをいい、このとき、

$$f(x, y) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

が成り立つ。この  $f(x, y)$  を  $(X, Y)$  の同次密度関数または単に確率密度関数という。

事象  $a \leq X \leq b$  は  $a \leq X \leq b, -\infty < Y < \infty$  で表される事象と考えられるから、

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b f_X(x) dx \quad \text{ただし} \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

となる。これを  $X$  の周辺分布、 $f_X(x)$  は  $X$  の周辺密度関数という。同様に、

$$P(c \leq Y \leq d) = \int_c^d f_Y(y) dy \quad \text{ただし} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

を  $Y$  の周辺分布、 $f_Y(y)$  は  $Y$  の周辺密度関数という。

(確率変数の独立性)  $X, Y$  が独立であるとは、 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  が成立するときをいう。

## 2.1 確率変数の関数

$(X, Y)$  の同時密度関数が  $f(x, y)$  をもつとき、 $X, Y$  の関数  $\phi(X, Y)$  の平均  $E[\phi(X, Y)]$  を

$$E[\phi(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) f(x, y) dx dy$$

と定め、分散  $V[\phi(X, Y)]$  を

$$V[\phi(X, Y)] = E\left[ \left( \phi(X, Y) - E[\phi(X, Y)] \right)^2 \right]$$

で定める。また、 $\mu_1 = E[X], \mu_2 = E[Y]$  とし、 $X, Y$  の共分散  $\text{Cov}[X, Y]$  を次で定める。

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X - \mu_1)(Y - \mu_2)] = E[XY] - \mu_2 E[X] - \mu_1 E[Y] + \mu_1 \mu_2 = E[XY] - \mu_1 \mu_2.$$

**定理 2.1**  $X, Y$  が独立であれば、 $E[XY] = E[X]E[Y]$ . 特に、 $\text{Cov}[X, Y] = 0$ .

**証明:**  $(X, Y)$  の同時密度関数が  $f(x, y)$  とすると、 $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$  なので、

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y) dy = E[X]E[Y]. \quad \square \end{aligned}$$

**定理 2.2 (平均と分散の性質)** 定数  $a, b, c$  に対して、 $E[aX + bY + c] = aE[X] + bE[Y] + c$  となる。

さらに、 $X, Y$  が独立であれば、 $V[aX + bY + c] = a^2V[X] + b^2V[Y]$  となる。

$$\begin{aligned} \text{証明: } E[aX + bY + c] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (ax + by + c)f(x, y) dx dy = a \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y) dy + c \\ &= aE[X] + bE[Y] + c. \end{aligned}$$

分散については離散のときとまったく同様なので省略する。  $\square$

例 2.3 (2次元正規分布) 2次元確率変数  $(X, Y)$  の同時密度関数が次で与えられるとき、 $(X, Y)$  は2次元正規分布に従うという。ただし  $-\infty < \mu_1, \mu_2 < \infty, \sigma_1, \sigma_2 > 0, -1 < \rho < 1$  である。

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}\right]$$

このとき、 $E[X] = \mu_1, E[Y] = \mu_2, V[X] = \sigma_1^2, V[Y] = \sigma_2^2, \text{Cov}[X, Y] = \rho\sigma_1\sigma_2$  となる。

また、周辺密度関数を計算すると、 $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$  となる。すなわち、 $X$  の周辺分布は正規分布  $N(\mu_1, \sigma_1^2), Y$  の周辺分布は  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$  に従っている。ここで、もし  $\rho = 0$  であれば、

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

と表せる。従って、 $\rho = 0$  のとき  $X, Y$  は独立となることがわかる。

共分散は  $X, Y$  が互いに関連しながらそれぞれの平均  $E[X], E[Y]$  からばらつく程度を表している。特に、共分散が0のとき、 $X, Y$  は無相関であるという。定理 2.1 より  $X, Y$  が独立であれば  $X, Y$  は無相関であるが、逆は必ずしも成り立たない(正規分布の場合は成り立つが、これは特別な場合である)。

また、確率変数  $X, Y$  の相関係数  $\rho[X, Y]$  を  $\rho[X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sqrt{V[X]V[Y]}}$  で定める。 $-1 \leq \rho[X, Y] \leq 1$  となることが知られている。

3つ以上の確率変数  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を考える。 $X_1, X_2, \dots, X_n$  が独立であるとは(離散型、連続型も含んだ形で)、任意の実数  $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$  ( $a_i \leq b_i, 1 \leq i \leq n$ ) に対して

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq X_n \leq b_n) = P(a_1 \leq X_1 \leq b_1) \cdots P(a_n \leq X_n \leq b_n)$$

が成り立つときと定義する。また、2次元確率変数の場合と同様に、同時確率分布や同時密度関数を用いて、 $X_1, X_2, \dots, X_n$  の関数の平均や分散が定義でき、さらに、定理 2.2 と同様に次の定理が成立する。

定理 2.3 (平均と分散の性質) (1)  $a_1, a_2, \dots, a_n$  が定数のとき

$$E[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n] = a_1E[X_1] + a_2E[X_2] + \cdots + a_nE[X_n].$$

(2)  $a_1, a_2, \dots, a_n$  が定数で  $X_1, X_2, \dots, X_n$  が独立のとき

$$V[a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n] = a_1^2V[X_1] + a_2^2V[X_2] + \cdots + a_n^2V[X_n].$$

## 2.2 母集団と標本 (各自教科書を読んでおいてください。)

### 2.3 統計量と標本分布

$X_1, X_2, \dots, X_n$  を大きさ  $n$  の無作為標本とする。これは、数学的には  $X_1, X_2, \dots, X_n$  は同一の分布に従う独立な確率変数として定義される。この  $X_1, X_2, \dots, X_n$  の関数を統計量というが、よく用いられる統計量には次のものがある。

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$\bar{X}, S^2, U^2$  をそれぞれ標本平均、標本分散、不偏分散という。このとき、次が成立する。

定理 2.4  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を母平均  $\mu$ , 母分散  $\sigma^2$  の母集団からの大きさ  $n$  の無作為標本とする。すなわち、 $E[X_i] = \mu, V[X_i] = \sigma^2$  とする。このとき、標本平均  $\bar{X}$  と不変分散  $U^2$  に対して次が成立する。

$$E[\bar{X}] = \mu, \quad V[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}, \quad E[U^2] = \sigma^2.$$

証明: 標本平均  $\bar{X}$  については定理 2.3 より明らか。不偏分散については時間があれば授業中に説明する。 □