

基礎ゼミ I 問題 10 2020 年 6 月 29 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。
置換 σ に対して $\text{sgn}(\sigma)$ で置換 σ の符号 (signature) を表すものとする。教科書では $\varepsilon(\sigma)$ を用いている。この授業ではどちらを用いてもよい。

問 10.1. 次の行列の行列式を、行列式の定義 (次ページを参照のこと) を用いて求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 0 & a_{34} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

問 10.2. 次の行列式の値をサラスの方法 (教科書 p.33 例 6.5) で求めよ。

$$(1) \text{ (a) } \begin{vmatrix} 1+i & 1-i \\ 2-i & 1-2i \end{vmatrix} \quad \text{(b) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad (2) \text{ (a) } \begin{vmatrix} 1+i & 1 \\ 2 & 1-2i \end{vmatrix} \quad \text{(b) } \begin{vmatrix} 1+i & i & 1-i \\ -1 & i & 0 \\ 2 & 1+i & 0 \end{vmatrix}$$

問 10.3. 次の行列式を計算せよ。

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -4 \\ 2 & -6 & -3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 4 & -3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 6 & 3 \\ 9 & 1 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad (6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 1 & -1 \\ -3 & -6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} \quad (7) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & 7 \end{vmatrix} \quad (9) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad (10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{問 10.4. } \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & x & -1 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ を示せ。}$$

問 10.5. $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ に対して

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2$$

の成り立つことを示せ。ここで、ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} に対して $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ でその内積を表す。

定義 (行列式, 教科書 p.31). n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ の行列式を次で定める。(n 文字の置換 σ すべてに関する和)

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

例題. 行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の行列式を、行列式の定義を用いて求めよ。

解. $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}$ で 0 を含まないものは $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$, $a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$ のみで、対応する置換を互換で表

すと、 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (23)(34)$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (14)(24)$ より、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}\right) a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + \operatorname{sgn}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right) a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$$

$$= a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}. \quad //$$