

基礎ゼミ I 問題 9 2020 年 6 月 22 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。次ページにヒントを書きました。参照ください。

問 9.1. 次の関数の $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ を計算せよ ($a, b > 0$ は定数)。ヒント: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right)}{\frac{dx}{dt}}$

$$(1) \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = a \cosh t, \\ y = a \sinh t \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = b \sin^3 t \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^2}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$$

問 9.2. $f(x)$ を区間 (a, b) 上の関数とし、 $a < c < b$ となる点 $x = c$ で $f(x)$ は微分可能であるとする。 $f(x)$ が $x = c$ で極大値をとれば $f'(c) = 0$ となることを示せ。(極小値のときも同様に $f'(c) = 0$ が示せる。)

問 9.3. 両辺の導関数が一致することを示し、(平均値の定理を用いて) 次を示せ。

$$(1) \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x \quad (x > 0) \quad (2) \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \tan^{-1} x \quad (x \in \mathbf{R})$$

$$(3) \tan \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} x \right) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

問 9.4. 次の不等式を示せ。

$$(1) \frac{2}{\pi} x < \sin x < x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right) \quad (2) x < \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2} x \quad (0 < x < 1)$$

$$(3) x - \frac{x^3}{3} < \tan^{-1} x < x \quad (x > 0) \quad (4) |\sin b - \sin a| \leq |b - a| \quad (a < b)$$

$$(5) 0 < a < b < 1 \text{ のとき、} p > q > 0 \text{ ならば } \frac{b^p - a^p}{b^q - a^q} < \frac{p}{q}.$$

問 9.5. $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のとき、 $\frac{x^p}{p} + \frac{1}{q} - x \geq 0$ ($x \geq 0$) を示せ。また、これより $a > 0, b > 0$ ならば $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ となることを示せ。

問 9.6. $f(x) = x^{1/x}$ ($x > 0$) の増減を調べることにより、 $m > n \geq e$ ならば、 $m^n < n^m$ となることを示せ。

問 9.7. $f(x)$ が (a, ∞) で微分可能で、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = l$ であるとき、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x+1) - f(x)\} = l$ であることを示せ。

問 9.8. 次の極限値を求めよ。ただし、l'Hôpital の定理を用いるときは、不定形であることを明記せよ。($a > 0$ は定数。)

$$(1) (a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x} \right) \quad (b) \lim_{x \rightarrow +0} x^{-2} e^{-\frac{1}{x}} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} x^{\tan \frac{\pi}{2} x}$$

$$(3) (a) \lim_{x \rightarrow \infty} \{ax - (\log x)^2\} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\cot x} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$(5) (a) \lim_{x \rightarrow \pi/2-0} \frac{\log \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\tan x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-(\log x)^2} \quad (6) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$$

$$(7) (a) \lim_{x \rightarrow \infty} \log x \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (b) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x \tan x - \frac{\pi}{2} \sec x \right) \quad (8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)^{\frac{1}{x}}$$

問 9.9. 次の関数の n 次導関数を求めよ。ヒント: (4), (5) は Leibniz の公式 (cf. 教科書 p.62) を用いよ。

$$(1) \frac{1}{1-2x} \quad (2) \sin^3 x \quad (3) e^x \cos x \quad (4) x^3 e^{2x} \quad (5) x^2 \sin 3x \quad (6) x^{n-1} \log x$$

問 9.3 (3) と問 9.8 (2) (b) の解答例です。問 9.3, 問 9.8 の解答のためのヒントにしてください。

問 9.3 (3) 解答例: (問 9.3 (1), (2) は以下を参考にしてください。)

$f(x) = \tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right) - \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$ とすると、 $-1 < x < 1$ のとき、

$$\left\{ \tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right) \right\}' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right)} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{(*)}{=} \frac{2}{1 + \cos(\sin^{-1}x)} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\stackrel{(**)}{=} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1}x)}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

ここで $(*)$ では $\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ を、 $(**)$ では $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}x \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos(\sin^{-1}x) \geq 0$ に注意して

$\cos(\sin^{-1}x) = \sqrt{1 - \sin^2(\sin^{-1}x)}$ を用いた。

一方、 $\left(\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right)' = \dots = \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (高校数学 III の範囲で計算できる) より、 $f'(x) = 0$ を得る。

よって、 $f(0) = 0 - 0 = 0$ より、 $-1 \leq x \leq 1$ のとき平均値の定理により

$$f(x) = f(x) - f(0) = f'(\theta x)(x - 0) \quad (0 < \theta < 1) \quad (1)$$

となる θ が存在するが $f'(\theta x) = 0$ より $f(x) = 0$ すなわち、

$$\tan\left(\frac{1}{2}\sin^{-1}x\right) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

が成立する。 //

注意: 式 (1) で $0 < \theta < 1$ より $-1 \leq x \leq 1$ に対し $-1 < \theta x < 1$ となっている。

問 9.8 (2) (a) 解答例: (l'Hopital の定理の使い方の参考にしてください。)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ax - (\log x)^2\} = \lim_{x \rightarrow \infty} ax \left\{1 - \left(\frac{\log x}{x^{1/2}}\right)^2\right\}$ で、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^{1/2}} = \frac{\infty}{\infty}$ の不定形なので l'Hopital の定理より

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)'}{(x^{1/2})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

よって、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \{ax - (\log x)^2\} = \lim_{x \rightarrow \infty} ax \left\{1 - \left(\frac{\log x}{x^{1/2}}\right)^2\right\} = \infty$. //

追加の ヒントです。

問 9.4 (5) Cauchy の平均値の定理を用いよ。

問 9.8 (1) (b) $t = \frac{1}{x}$ とおく。 $x \rightarrow +0$ より $t \rightarrow \infty$ に注意。

(2), (6), (8) は対数をとって考えよ。

問 9.9 (1) $\left(\frac{1}{1-2x}\right)^{(n)}$ は $n = 1, 2$ を求め、 n のときを予想しそれを数学的帰納法を用いて示せ。

(4) Leibniz の公式より

$$(x^3 e^{2x})^{(n)} = x^3 (e^{2x})^{(n)} + {}_n C_1 (x^3)' (e^{2x})^{(n-1)} + {}_n C_2 (x^3)'' (e^{2x})^{(n-2)} + \dots \text{ で、}$$

$k \geq 4$ のとき $(x^3)^{(k)} = 0$ に注意せよ。

(5) (4) と同様に Leibniz の公式を用いる。さらに、

$$(\sin 3x)' = 3 \cos 3x = 3 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin 3x)'' = 3 \left\{ \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \right\}' = 3^2 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 3^2 \sin\left(3x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

を繰り返し用い $(\sin 3x)^{(k)}$ を求める。

(6) $(x^{n-1} \log x)^{(n)} = \frac{(n-1)!}{x}$ となります。数学的帰納法を用いて示してください。