基礎ゼミ I　問題 7　　2020 年 6 月 8 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。
次ページにヒントを書きました。参照ください。

問 7.1. 中間値の定理を用いて、以下を示せ。

(1) $f(x)$ が $[-1,1]$ で連続であって $f(1)=f(-1)=0$ ならば、原点を通る直線は $y=f(x)$ のグラフと交わる。

(2) 閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数 $f(x)$ が、$f(a), f(b) \in (a,b)$ ををみたせば、$f(c)=c$ となる $c \in (a,b)$ が存在する。

(3) 区間 I 上の 1 対 1 連続関数は狭義単調である。

問 7.2. 次の値を求めよ。($\sin^{-1} x$ などは、$\arcsin x$ とも書かれる。どちらの記号を使っても良い。)

(a) $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}\right)$　(b) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(c) $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\cdot 1}$

問 7.3. 次の式を証明せよ。($\sin^{-1} x$ などは、$\arcsin x$ とも書かれる。どちらの記号を使っても良い。)

(1) (a) $\cos(\sin^{-1} x)=\sqrt{1-x^2}$, $(-1 \leqq x \leqq 1)$　(b) $\sin^{-1} x+\cos^{-1} x=\dfrac{\pi}{2}$　$(-1 \leqq x \leqq 1)$

(2) $\tan^{-1} x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & (x>0)\\ -\dfrac{\pi}{2}, & (x<0)\end{cases}$　(3) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\begin{cases}\cos^{-1} x, & (0 \leqq x \leqq 1)\\ \pi-\cos^{-1} x, & (-1 \leqq x \leqq 0)\end{cases}$

(4) $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$　(5) $2\tan^{-1}\dfrac{1}{3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$　(6) $\tan^{-1} 2+\tan^{-1} 5+\tan^{-1} 8=\dfrac{5}{4}\pi$

(3), (4) は裏に解答例あり。

問 7.4. 双曲線関数 (微分積分学の教科書 p.35) について、次を示せ。

(1) (a) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$, (b) $(\sinh x)'=\cosh x$, (c) $(\cosh x)'=\sinh x$, (d) $(\tanh x)'=\dfrac{1}{(\cosh x)^2}$

(2) (a) $\sinh(x \pm y)=\sinh x\cosh y \pm \cosh x\sinh y$, (b) $\cosh(x \pm y)=\cosh x\cosh y \pm \sinh x\sinh y$

(3) (a) $(\sinh^{-1} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, (b) $(\tanh^{-1} x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$,　(4) $(\mathrm{sech}^{-1} x)'=\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$　$(0<x \leqq 1)$

問 7.5. 次の関数を微分せよ。ただし、$a, b>0$ は定数とする。

(1) (a) $x\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}}$　(b) $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$　(c) $\cos^{-1}(\sin x)$　(d) $\log\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

(2) (a) $\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}$　(b) $\sin^{-1}(\cos x)$　(c) $\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$　(d) $\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$

(3) (a) x^x　(b) $\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$　(c) $\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$　(d) $\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{a^2-x^2}}$

(4) (a) $\cos^{-1}\dfrac{x}{a}$　(b) $\tan^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}$　(c) $\dfrac{x\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{2}\log(1-x^2)$

(5) (a) $(a^x+b^x)^{1/x}$　(b) $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$　(c) $\sinh^{-1}(\cosh x)$

問 7.6. 次の関数の $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, $f'(0)$ があれば求めよ。

(1) (a) $f(x)=\sin|x|$　(b) $f(x)=|x|-\tan|x|$

(2) $f(x)=\begin{cases}x\tan^{-1}\dfrac{1}{x}, & (x \neq 0)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$　(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{1/x}}, & (x \neq 0)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$　(4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & (x \neq 0)\\ 1, & (x=0)\end{cases}$

問 7.7. 関数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & (x \neq 0)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$ について、$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることを示せ。また、$f'(x)$ が $x=0$ で連続ではないことを確かめよ。

問 7.3 (3), (4) の解答例: **問 7.2**, **問 7.3** の解答のためのヒントです。

問 7.3 (3) $\theta = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$ とすると、$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $1-x^2 = \sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$, すなわち $\cos^2\theta = x^2$.
$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta \geq 0$ なので、$0 \leq x \leq 1$ のとき $\cos\theta = x$. よって、$\theta = \cos^{-1} x$.
一方、$-1 \leq x < 0$ のとき $\cos\theta = -x$. ここで、$\dfrac{\pi}{2} < \cos^{-1} x \leq \pi$ より $0 \leq \pi - \cos^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ で、
$\cos(\pi - \cos^{-1} x) = -\cos(\cos^{-1} x) = -x$ なので $\theta = \pi - \cos^{-1} x$.
以上より、$\sin^{-1}\sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \cos^{-1} x, & (0 \leqq x \leqq 1) \\ \pi - \cos^{-1} x, & (-1 \leqq x \leqq 0) \end{cases}$. //

問 7.3 (4) $\tan(\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3}) = \dfrac{\tan(\tan^{-1}\frac{1}{2}) + \tan(\tan^{-1}\frac{1}{3})}{1 - \tan(\tan^{-1}\frac{1}{2})\cdot\tan(\tan^{-1}\frac{1}{3})} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$
$0 < \tan^{-1}\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{4}$, $0 < \tan^{-1}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{4}$ より $0 < \tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} < \dfrac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}\dfrac{1}{2} + \tan^{-1}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$.
//

問 7.5 は次の逆三角関数の微分の公式を用いれば、高校数学 III で学ぶ知識を応用することで解答できます。

$$\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1), \quad \cos^{-1} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ (-1 < x < 1), \quad \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}\ (-\infty < x < \infty).$$

この公式は既知とします。(使って解いてください。)