

基礎ゼミ I 問題 3 2020 年 4 月 27 日

E は単位行列, O は零行列を表す。

問 3.1. $A = \begin{pmatrix} 1-i & 3+i \\ 1+5i & 2-3i \\ i & -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & -i \end{pmatrix}$, とする。次を計算し比較せよ。

(1) $(AB)^*$ と B^*A^* , (2) $(BA^*)^*$ と AB^*

問 3.2. $A = \begin{pmatrix} i & 1-i & -i \\ 2 & i & 3 \\ 0 & 1+i & -1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1+2i \end{pmatrix}$ とする。次を求めよ。

(1) $A + A^*$ と $A - A^*$, (2) AA^* , (3) A^*A , (4) $Ax = c$ を満たす縦ベクトル x

問 3.3. 正方行列 A がエルミート行列と歪エルミート行列の和にただ一通りに表されることを示せ。

問 3.4. (m, n) 型行列 $A = (a_{ij})$ に対して、 $B = AA^*$ とおく。 B の (k, l) 成分を求め、 $B^* = B$ が成立することを示せ。また、特に B の対角成分が非負であることを確認せよ。

問 3.5. n 次正方行列 A, B に対して、 $[A, B] = AB - BA$ とおく (これを A, B の交換子積という)。

(1) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$ が成立することを示せ (これを Jacobi(ヤコビ) の恒等式という)。

(2) A, B とともに歪エルミート行列であれば、 $[A, B]$ も歪エルミート行列であることを示せ。

問 3.6. 任意の 3 次正方行列 X と可換な 3 次正方行列は $A = aE$ に限ることを証明せよ。

ヒント: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ とし、 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合に、それぞれ

$AX = XA$ を計算することで a_{ij} たちの満たすべき条件をまず調べよ。

問 3.7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ と可換な 3 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ を求めよ。

問 3.8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と可換な 2 次正方行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ。また、2 次正方行列 X, Y がともに A と可換であれば、 X と Y は可換となることを確認せよ。

問 3.9. 次の条件を満たす 2 次正方行列 A をすべて決定せよ。

(1) $A^2 = A$ (2) $A^2 + E = O$

問 3.10. 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、Cayley-Hamilton の公式 $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ を示せ。

問 3.11. 自然数 n に対して次を求めよ。(cf. 教科書 p.12 2.3, 2.4.)

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき A^n , (2) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ のとき B^n , (3) $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のとき C^n .

問 3.12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 5 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $(A - E)(A - 4E) = O$ を示し、 $A^n, n \in \mathbb{N}$, を求めよ。

(2) $B(B - E)(B - 2E) = O$ を示し、 $B^n, n \in \mathbb{N}$, を求めよ。

(3) $C(C - 3E)^2 = O$ を示し、 $C^n, n \in \mathbb{N}$, を求めよ。

(4) 自然数 n に対して $(D - 4E)^n$ を計算し、 D^n を求めよ。