基礎ゼミ I　問題 1　　　2020 年 4 月 20 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

問 1.1. 複素数 z は $r \geq 0$ と実数 θ を用いて $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とできる。このとき $z = re^{i\theta}$ と表す。また、$|z| = r$, $\arg z = \theta$ と定める。(偏角 $\arg z$ については $z \neq 0$ のときのみ考えるものとする。)

(1) 複素数 $z = re^{i\alpha}, w = se^{i\beta}$ ($r, s > 0$, α, β は実数) に対して、三角関数の加法定理を用いて $zw = rse^{i(\alpha+\beta)}$ を示せ。特に、$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, 即ち、$\{r(\cos\theta + i\sin\theta)\}^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$, $n \in \boldsymbol{Z}$, を得る。

(2) (1) を用いて (a) $(1+\sqrt{3}i)^8$, (b) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$ の値を求めよ。

(3) $\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$ の左辺を展開し、実部と虚部を比較することで、$\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて、$\sin 3\theta$ を $\sin\theta$ を用いて表せ。

問 1.2. 次の方程式の根を求め、それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。

(a) $x^4 = -1$,　(b) $x^3 = 8i$,　(注意: 三角関数を用いた表示はダメ。)

問 1.3. $x^5 = 1$ を解くことにより、$\cos\dfrac{2\pi}{5}, \sin\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

問 1.4. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(x_i y_j - x_j y_i)^2$ を示せ。

問 1.5. $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$ が成り立つこと、等号は $x = 0$ または $y = 0$ のときのみに成り立つこと、を示せ。

問 1.6. 次の漸化式よって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 2n$

(2) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1}$

(3) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$

(4) $a_1 = 2, \quad na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$

(5) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2a_n + 1}$

(6) $a_1 = 1, \quad na_{n+1} = 2(n+1)a_n$

問 1.7. 次の漸化式よって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(解き方は裏面を見よ。)

(1) $a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$

(3) $a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

(4) $a_1 = 1, a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

注意. 問 1.8–1.10 の解き方は線形代数学の教科書 pp.2–4 にあります。

問 1.8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $AB + AC$, $A(B+C)$ を計算し比較せよ。　(2) $C(\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}) - (2B)A$ を計算せよ。　(3) $A\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z}B)\boldsymbol{x}$ を計算せよ。

問 1.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。次を計算せよ。

(1) $AB - BA$,　(2) $BC - CB$,　(3) $A^2 - B^2$,　(4) $(A+B)(A-B)$,　(5) $ABC - AC$,

(6) $(A + {}^tA)(A - {}^tA)$,　(7) $C\,{}^tC$ と ${}^tCC$,　(8) $A\,{}^tB$ と ${}^tBA$,　(9) $CA - C$ と $C(A - E)$

問 1.10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(1) $AX = B$ を満たす行列 X を求めよ。　(2) $YA = C$ を満たす行列 Y を求めよ。

受講に際しての連絡事項

- 連絡は教務情報システムに登録されているメールアドレス (e2031**@eve.u-ryukyu.ac.jp) に送ります。
- 授業は原則として遠隔授業で行います。例年は授業で発表していただきますが、今期はレポートとして提出していただきます。授業が予定されている月曜 2 限 10:20 からに C412 室にて質問等を受け付けます。誰もいない場合には私の研究室 A514-b 室に戻りますので研究室まで来てください。
当たり前ですが、発熱等体調に不良がある人、新型コロナウイルスに感染したもしくは感染したおそれ等がある人は大学に来てはいけません。
- 授業が予定されている月曜日の 10:00 までに演習問題を添付しそれぞれ受講者のレポート課題を記したメールを送ります。それを指定した期限 (予定では翌週水曜日の 12:00 頃) までに提出ください。提出は Office lens などを用い画像を撮り pdf-file としてレポート課題の返信メールに添付して送信ください。無理な場合は杉浦の研究室の扉の封筒の中に入れてください。レポートは穴のない A4 の用紙を用い<u>学籍番号と氏名を必ず記入</u>してください。もちろん、指定された問題以外も解いて提出していただいても構いません。演習問題は私の HP `http://www.math.u-ryukyu.ac.jp/~sugiura/` にも掲載します。
- 数学のことそれ以外のことなど不明な点があれば何でも質問してください。研究室へ来ての質問も受け付けますし、メールでの質問も受け付けます。
<u>レポート課題の解き方に関する質問はそのレポートの提出期限の 24 時間前までとします。</u>

問 1.7 のヒント:

- 漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ の一般項の求め方: 特性方程式 $x^2 = px + q$ の根を α, β とすると、

$\alpha \neq \beta$ のとき、$a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$ が、
$\alpha = \beta$ のとき、$a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1}$ が

この漸化式を満たすことが証明できる。実際、解と係数の関係より $\alpha + \beta = p,\ \alpha\beta = -q$ に注意すると、
$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$ より

$$\begin{aligned} &a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \text{ と変形でき、} \quad a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\beta^n \cdots \text{(I)} \\ &a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \text{ と変形でき、} \quad a_{n+1} - \beta a_n = (a_1 - \beta a_0)\alpha^n \cdots \text{(II)} \end{aligned}$$

$\alpha \neq \beta$ なら、(II) から (I) を引き、$\alpha - \beta$ で割ることで、$a_n = \dfrac{a_1 - \beta a_0}{\alpha - \beta}\alpha^n - \dfrac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha - \beta}\beta^n$ を得る。

$\alpha = \beta$ のとき $\alpha \neq 0$ の場合のみ考える。($\alpha = 0$ のときは漸化式が $a_{n+2} = 0$ なり $a_n = 0$ を得る。)
この場合、(I) と (II) は同じ式になってしまうが、$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\alpha^n$ の両辺を α^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} \quad \text{となり、} \quad \frac{a_n}{\alpha^n} = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k}\right) + \frac{a_0}{\alpha^0} = n\frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} + a_0.$$

よって、$a_n = (a_1 - \alpha a_0)n\alpha^{n-1} + a_0\alpha^n$ となることが従う。
注意: ここでは a_1, a_0 の値を与えて解いているが、問 1.7 では a_2, a_1 の値を与えていることに注意せよ。

- 漸化式 $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ の解き方は、特性方程式 $x^3 = px^2 + qx + r$ の根を α, β, γ とすると、

$$\begin{array}{ll} \alpha, \beta, \gamma \text{ がすべて異なるとき、} & a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n, \\ \alpha = \beta \neq \gamma \text{ (一組のみ重根) のとき、} & a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1} + c_3\gamma^n, \\ \alpha = \beta = \gamma \text{ (3 重根) のとき、} & a_n = c_1\alpha^n + c_2 n\alpha^{n-1} + c_3 n(n-1)\alpha^{n-2} \end{array}$$

がこの漸化式を満たすことが証明できる。このためには、$b_n = a_{n-1},\ c_n = a_{n-2}$ とすると、

$$\begin{cases} a_{n+1} = \ \ b_n \\ b_{n+1} = \ \ c_n \\ c_{n+1} = pc_n + qb_n + ra_n \end{cases} \qquad \text{すなわち} \qquad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ r & q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

と表せる。すなわち、行列 A と縦ベクトルの列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ に関する漸化式 $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_n$ を解く問題に帰着できる。このとき、$\boldsymbol{x}_n = A^n\boldsymbol{x}_0$ となり、行列の n 乗に関する問題となる。行列の n 乗についての一般的な計算法は線形代数の教科書第 18 章–第 21 章で学ぶ。