基礎ゼミ I　問題 2　　　2020 年 4 月 20 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

- ε-δ 論法を用いて、以下の問い (問 2.1 – 問 2.9) に答えよ。

問 2.1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ なら $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\alpha|$ を示せ。(ヒント：$\big||a|-|b|\big| \leqq |a-b|$ をまず示せ。)

問 2.2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とする。$\alpha > 0$ なら、自然数 N が存在して、$n \geqq N$ となるすべての n について $a_n > \dfrac{\alpha}{2}$ が成立することを示せ。

問 2.3. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$、$\alpha \neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\alpha}$ を示せ。

問 2.4. $a_n \geqq b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。以下を示せ。(問 2.4 と問 2.5 をはさみうちの原理ということにする。)
(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ のとき $a \geqq b$.
(2) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ のとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ のとき $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

問 2.5. $a_n \geqq c_n \geqq b_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ とする。$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ で $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ ならば $\lim_{n\to\infty} c_n = a$ を示せ。

問 2.6. $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ とする。任意の実数 K に対して $n \geqq N$ ならば $a_n > K$ となる自然数 N を K を用いて具体的に表し (例えば $N = 2^{2[K]+1}$, $[K]$ は K 以下の最大整数を表す)、$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ を確認せよ。

問 2.7. $a_n = (-1)^{n-1}$ とする。ε-δ 論法を用いて、数列 $\{a_n\}$ が発散する (収束しない) ことを確かめよ。

問 2.8. $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$ を証明せよ。

問 2.9. 自然数の増加列 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ に対して、$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \alpha$ を示せ。
($\{a_{n_k}\}$ を $\{a_n\}$ の部分列という。$cf.$ 微分積分学 教科書 p.18.)

問 2.10. $-2 \leqq p < 1 + \sqrt{5}$ とし、$a_1 = p$, $a_{n+1} = \sqrt{4 + 2a_n}$ によって数列 $\{a_n\}$ を定める。
(a) $a_1 < a_2$ を示せ。　(b) $\{a_n\}$ が単調増加であることを示せ。　(c) $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

問 2.11. $2 - \sqrt{3} < q < 2 + \sqrt{3}$ とし、$b_1 = q$, $b_{n+1} = \dfrac{1}{4}\left({b_n}^2 + 1\right)$ によって定義される数列 $\{b_n\}$ を考える。
(a) $b_1 > b_2$ を示せ。　(b) $\{b_n\}$ が単調減少であることを示せ。　(c) $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

問 2.12. はさみうちの原理を用いて次の極限値を求めよ。(3), (4) では $c > 1$, (5) では $0 < a < b < c$ とする。
(1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$　(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$　(3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!}$　(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n^2}$　(5) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$

問 2.13. 一般項が次の式で与えられる数列の極限値を求めよ。ただし、$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ は既知とする。
(1) (a) $\dfrac{\sqrt{n^3+n+1} - \sqrt{n^3-n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$　(b) $\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$　(c) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
(2) (a) $\left(\dfrac{n}{1+n}\right)^n$　(b) $\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$　(3) $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$　(4) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$
ヒント: (1) (b) 加法定理を用いよ, (c) まず $\dfrac{1}{n(n+1)} - \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ を計算せよ,
(3), (4) は二項定理により $\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqq \sqrt{n}$, $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 + \dfrac{2}{n}$ を示し、はさみうちの原理を用いよ。

問 2.14. $a_1, \cdots, a_n > 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ のとき、$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ であり、等号成立は $x_1 = \cdots = x_n$ のときのみであることを示せ。ヒント: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j (x_i - x_j)^2$ をまず示せ。