基礎ゼミ I 問題 1 2020 年 4 月 13 日

(1), (2), ... の小問は別の人が解いて発表しても構いませんが、(a), (b), ... の小問は同じ人が発表してください。

記号. $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ は自然数の全体、 $\mathbb{Z}$ は整数の全体、 $\mathbb{Q}$ は有理数の全体、 $\mathbb{R}$ は実数の全体、 $\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す。

問 1.1. 複素数 z は $r \geq 0$ と実数 θ を用いて $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とできる。このとき $z = re^{i\theta}$ と表す。また、 $|z| = r$, $\arg z = \theta$ と定める。(偏角 $\arg z$ については $z \neq 0$ のときのみ考えるものとする。)

- (1) 複素数 $z = re^{i\alpha}$, $w = se^{i\beta}$ ($r, s > 0$, α, β は実数) に対して、三角関数の加法定理を用いて $zw = rse^{i(\alpha+\beta)}$ を示せ。特に、 $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$, 即ち、 $\{r(\cos \theta + i \sin \theta)\}^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$, $n \in \mathbb{Z}$, を得る。
- (2) (1) を用いて (a) $(1 + \sqrt{3}i)^8$, (b) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}\right)^{12}$ の値を求めよ。
- (3) $\cos 3\theta + i \sin 3\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^3$ の左辺を展開し、実部と虚部を比較することで、 $\cos 3\theta$ を $\cos \theta$ を用いて、 $\sin 3\theta$ を $\sin \theta$ を用いて表せ。

問 1.2. 次の方程式の根を求め、それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。

- (a) $x^4 = -1$, (b) $x^3 = 8i$, (注意: 三角関数を用いた表示はダメ。)

問 1.3. $x^5 = 1$ を解くことにより、 $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\sin \frac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。

問 1.4. $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2$ を示せ。

問 1.5. $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$ が成り立つこと、等号は $x = 0$ または $y = 0$ のときのみ成り立つこと、を示せ。

問 1.6. 次の漸化式によって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2n$	(2) $a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 3^{n+1}$
(3) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 3^{n+1}$	(4) $a_1 = 2, na_{n+1} = (n+1)a_n + 1$
(5) $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$	(6) $a_1 = 1, na_{n+1} = 2(n+1)a_n$

問 1.7. 次の漸化式によって定義された数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。(解き方は裏面を見よ。)

(1) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$	(2) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$
(3) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$	(4) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

問 1.8. $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = (2 \ 0 \ -1)$ とする。

- (1) $AB + AC$, $A(B+C)$ を計算し比較せよ。 (2) $C(\mathbf{xz}) - (2B)A$ を計算せよ。 (3) $A\mathbf{y}(\mathbf{zB})\mathbf{x}$ を計算せよ。

問 1.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。次を計算せよ。

- (1) $AB - BA$, (2) $BC - CB$, (3) $A^2 - B^2$, (4) $(A+B)(A-B)$, (5) $ABC - AC$,
 (6) $(A + {}^t A)(A - {}^t A)$, (7) $C {}^t C$ と ${}^t C C$, (8) $A {}^t B$ と ${}^t B A$, (9) $CA - C$ と $C(A - E)$

問 1.10. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

- (1) $AX = B$ を満たす行列 X を求めよ。 (2) $YA = C$ を満たす行列 Y を求めよ。

- 漸化式 $a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ の一般項の求め方: 特性方程式 $x^2 = px + q$ の根を α, β とすると、

$$\alpha \neq \beta \text{ のとき、 } a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n \text{ が、}$$

$$\alpha = \beta \text{ のとき、 } a_n = c_1\alpha^n + c_2n\alpha^{n-1} \text{ が}$$

この漸化式を満たすことが証明できる。実際、解と係数の関係より $\alpha + \beta = p, \alpha\beta = -q$ に注意すると、

$$a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n \text{ より}$$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \text{ と変形でき、 } a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\beta^n \cdots \text{ (I)}$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \text{ と変形でき、 } a_{n+1} - \beta a_n = (a_1 - \beta a_0)\alpha^n \cdots \text{ (II)}$$

$\alpha \neq \beta$ なら、(II) から (I) を引き、 $\alpha - \beta$ で割ることで、 $a_n = \frac{a_1 - \beta a_0}{\alpha - \beta} \alpha^n - \frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha - \beta} \beta^n$ を得る。

$\alpha = \beta$ のとき $\alpha \neq 0$ の場合のみ考える。 $(\alpha = 0$ のときは漸化式が $a_{n+2} = 0$ となり $a_n = 0$ を得る。)

この場合、(I) と (II) は同じ式になってしまうが、 $a_{n+1} - \alpha a_n = (a_1 - \alpha a_0)\alpha^n$ の両辺を α^{n+1} で割ると、

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} \text{ となり、 } \frac{a_n}{\alpha^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{a_{k+1}}{\alpha^{k+1}} - \frac{a_k}{\alpha^k} \right) + \frac{a_0}{\alpha^0} = n \frac{a_1 - \alpha a_0}{\alpha} + a_0.$$

よって、 $a_n = (a_1 - \alpha a_0)n\alpha^{n-1} + a_0\alpha^n$ となることが従う。

注意: ここでは a_1, a_0 の値を与えて解いているが、問 1.7 では a_2, a_1 の値を与えていることに注意せよ。

- 漸化式 $a_{n+3} = pa_{n+2} + qa_{n+1} + ra_n$ の解き方は、特性方程式 $x^3 = px^2 + qx + r$ の根を α, β, γ とすると、

$$\alpha, \beta, \gamma \text{ がすべて異なるとき、 } a_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n + c_3\gamma^n,$$

$$\alpha = \beta \neq \gamma \text{ (一組のみ重根) のとき、 } a_n = c_1\alpha^n + c_2n\alpha^{n-1} + c_3\gamma^n,$$

$$\alpha = \beta = \gamma \text{ (3重根) のとき、 } a_n = c_1\alpha^n + c_2n\alpha^{n-1} + c_3n(n-1)\alpha^{n-2}$$

がこの漸化式を満たすことが証明できる。このためには、 $b_n = a_{n-1}, c_n = a_{n-2}$ とすると、

$$\begin{cases} a_{n+1} = b_n \\ b_{n+1} = c_n \\ c_{n+1} = pc_n + qb_n + ra_n \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ r & q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

と表せる。すなわち、行列 A と縦ベクトルの列 $\{\mathbf{x}_n\}$ に関する漸化式 $\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n$ を解く問題に帰着できる。このとき、 $\mathbf{x}_n = A^n \mathbf{x}_0$ となり、行列の n 乗に関する問題となる。行列の n 乗についての一般的な計算法は線形代数の教科書第 18 章-第 21 章で学ぶ。

注意: 上記のような単独の漸化式の一般項を求めるためには、 A^n そのものを求めるのは避け、 A^n に関する結果を利用できることのみを使って、上記のように表せるとして解けばよい。