# 確率統計の話題から

杉浦　誠

令和元年 8 月 24 日 (2019 年 8 月 25 日修正)

平成 31 年度入学の中学 1 年生から新しい指導要領による課程が始まりました。この教育課程では統計的な推測が必修に近い存在になっているようです。この講習では、新課程の数学 I で新たに加わる**仮説検定の考え方**と、実はその前提の知識となる高校数学 B で扱う**確率変数**と**確率分布**、**正規分布**、**統計的な推測** (**区間推定**, **仮説検定**) について概観しましょう。[*1]

## 1　確率分布

### 1.1　確率変数と確率分布

一般に、変数 $X$ のとり得る値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と、$X$ が $x_k$ となる確率 $p_k = P(X = x_k)$ がそれぞれ定まっているとき、$X$ を**確率変数**といい、$x_1, x_2, \cdots, x_n$ と $p_1, p_2, \cdots, p_n$ との対応関係を $X$ の**確率分布**という[*2]。ここで、

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

である。このとき、確率変数とその確率分布を示すには、左のような表を用いる。これを**確率分布表**という。

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | 1 |

また、$P(a \leqq X \leqq b)$ で $a \leqq X \leqq b$ となる確率を表す。上記分布で $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ で $x_k \leqq x < x_{k+1}$ とすれば、

$$P(X \leqq x) = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$$

となる。

**例 1.1** 3 枚の硬貨を投げて表の出る枚数を $X$ で表す。この $X$ の確率分布表を述べよ。

**解答:** 3 枚の硬貨を投げた結果は, 表を H (Head) , 裏を T 'tail) で表すと、次の 8 通りの結果が得られる。

HHH　HHT　HTH　HTT　THH　THT　TTH　TTT

それぞれの起こる確率はすべて $\frac{1}{8}$ である。よって、$X$ のとり得る値は $0, 1, 2, 3$ の 4 通りでそれぞれの確率は $P(X = 0) = \frac{1}{8}$, $P(X = 1) = \frac{3}{8}$, $P(X = 2) = \frac{3}{8}$, $P(X = 3) = \frac{1}{8}$. これを表にして右の確率分布表を得る。 □

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

**例題 1.2** つぼの中に赤球 3 個と白球 6 個がある。この中から 1 個とりだし、色を見てからつぼにもどす。このような試行を 3 回行うとし、3 回のうち赤球の出る回数を $X$ とするとき、$X$ の確率分布表を求めよ。
また、つぼから一度に 3 個とりだすとし、その中の赤球の個数を $Y$ とするとき、$Y$ の確率分布表を求めよ。
さらに、それぞれについて赤球が 2 回以上出る確率 $P(X \geqq 2)$, $P(Y \geqq 2)$ を求めよ。

---

[*1] 現行の高校数学 B の教科書 (参考文献表 [1]) を丸写しにしたような部分も多々ありますが、どの教科書を参照したかについては述べません。ご了承ください。

[*2] 高校の教科書にはより厳密に「ある試行において、それぞれの根元事象に応じて値の決まる変数を確率変数という。」と定義されている。

**解答:** $X$ のとり得る値は $0, 1, 2, 3$ で、対応する確率は

$$P(X=0)=\left(\frac{6}{9}\right)^3=\frac{8}{27},\qquad P(X=1)={}_3C_1\frac{3}{9}\left(\frac{6}{9}\right)^2=\frac{4}{9},$$
$$P(X=2)={}_3C_1\left(\frac{3}{9}\right)^2\frac{6}{9}=\frac{2}{9},\qquad P(X=3)=\left(\frac{3}{9}\right)^3=\frac{1}{27}.$$

これを表にして次の確率分布表を得る。

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{27}$ | 1 |

一度に 3 個とりだす場合は

$$P(Y=0)=\frac{{}_3C_0\cdot{}_6C_3}{{}_9C_3}=\frac{5}{21},\qquad P(Y=1)=\frac{{}_3C_1\cdot{}_6C_2}{{}_9C_3}=\frac{15}{28},$$
$$P(Y=2)=\frac{{}_3C_2\cdot{}_6C_1}{{}_9C_3}=\frac{3}{14},\qquad P(Y=3)=\frac{{}_3C_3\cdot{}_6C_0}{{}_9C_3}=\frac{1}{84}.$$

これを表にして次の確率分布表を得る。

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{15}{28}$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{1}{84}$ | 1 |

また、$P(X \geqq 2)=\frac{2}{9}+\frac{1}{27}=\frac{1}{3}$, $P(Y \geqq 2)=\frac{3}{14}+\frac{1}{84}=\frac{11}{42}$. □

**問 1.1** つぼの中に赤球 4 個と白球 6 個がある。この中から 1 個とりだし、色を見てからつぼにもどす。このような試行を 3 回行うとし、3 回のうち赤球の出る回数を $X$ とするとき、$X$ の確率分布表を求めよ。また、つぼから一度に 3 個とりだすとし、その中の赤球の個数 $Y$ の確率分布表を求めよ。さらに、それぞれについて赤球が 1 回以下出る確率 $P(X \leqq 1)$, $P(Y \leqq 1)$ を求めよ。(解答は p.19 にあります。)

## 1.2 確率変数の期待値と分散

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_n$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_n$ | 1 |

確率変数 $X$ の確率分布表が右で与えられているとき、$X$ の**期待値** $E(X)$ を $\quad E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$

で定義する[*3]。これを $X$ の**平均**ともいう。より一般に、関数 $f(x)$ に対し $f(X)$ も確率変数となるが、この $f(X)$ の期待値 $E(f(X))$ を

$$E(f(X))=f(x_1)p_1+f(x_2)p_2+\cdots+f(x_n)p_n=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)p_k$$

と定義する。

$X$ の平均を $m=E(X)$ とするとき、$(X-m)^2$ の期待値を $X$ の分散といい、$V(X)$ と表す。

$$V(X)=E\big((X-m)^2\big)=(x_1-m)^2p_1+(x_2-m)^2p_2+\cdots+(x_n-m)^2p_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k.$$

そして、その正の平方根を $X$ の分散といい $\sigma(X)$ と表す。

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{E\big((X-m)^2\big)}.$$

**定理 1.1 (分散の性質)** $m=E(X)$ とすると、$V(X)=E(X^2)-m^2=\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2p_k-m^2$.

**証明:** 分散の定義より

$$V(X)=E\big((X-m)^2\big)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2p_k=\sum_{k=1}^{n}({x_k}^2-2mx_k+m^2)p_k$$

[*3] $E(X)$ の $E$ は期待値 expectation に由来する。$V(X)$ の $V$, $\sigma(X)$ の $\sigma$ はそれぞれ分散 variance, 標準偏差 standard deviation に由来する。

$$= \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 p_k - 2m \sum_{k=1}^{n} x_k p_k + m^2 \sum_{k=1}^{n} p_k.$$

ここで、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k p_k = m, \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ であるから

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 p_k - 2m \cdot m + m^2 \cdot 1 = \sum_{k=1}^{n} {x_k}^2 p_k - m^2. \qquad \square$$

**例題 1.3** 例題 1.2 の $X$, $Y$ についてその平均と分散, 標準偏差を求めよ。

**解答:** $X$ と $Y$ のの確率分布表は右のようになるので、$X$ の平均, 分散, 標準偏差は

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{8}{27}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{27}$ | 1 |

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{15}{28}$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{1}{84}$ | 1 |

$$\begin{aligned}
E(X) &= 0 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{27} = 1, \\
E(X^2) &= 0^2 \cdot \frac{8}{27} + 1^2 \cdot \frac{4}{9} + 2^2 \cdot \frac{2}{9} + 3^2 \cdot \frac{1}{27} = \frac{5}{3}, \\
V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}, \\
\sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{6}}{3}.
\end{aligned}$$

$Y$ の平均, 分散, 標準偏差は

$$\begin{aligned}
E(Y) &= 0 \cdot \frac{5}{21} + 1 \cdot \frac{15}{28} + 2 \cdot \frac{3}{14} + 3 \cdot \frac{1}{84} = 1, \\
E(Y^2) &= 0^2 \cdot \frac{5}{21} + 1^2 \cdot \frac{15}{28} + 2^2 \cdot \frac{3}{14} + 3^2 \cdot \frac{1}{84} = \frac{3}{2}, \\
V(Y) &= E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}, \\
\sigma(Y) &= \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \square
\end{aligned}$$

**問 1.2** 問 1.2 の $X$, $Y$ についてその平均と分散, 標準偏差を求めよ。

**問 1.3** $m = E(X)$ とする。実数 $a$ に対して $E\big((X-a)^2\big) = V(X) + (m-a)^2$ を示せ。
このことから、$f(a) = E\big((X-a)^2\big)$ は $a = m(= E(X))$ のとき最小値 $f(m) = V(X)$ をとることがわかる。

## 1.3 確率変数の和と期待値

2 つの確率変数 $X, Y$ について、
$X$ のとる値が $x_1, x_2, \ldots, x_m$,　$Y$ のとる値が $y_1, y_2, \ldots, y_n$
とする。

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

とおくと、右の表のように、すべての $i, j$ の組み合わせについて, $(x_i, y_j)$ と $p_{ij}$ の対応が得られる。

この対応を $X$ と $Y$ の**同時分布**といい、この表を同時確率分布表という。この表から

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_i \quad (1 \leqq i \leqq m)$$

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_n$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\cdots$ | $p_{1n}$ | $p_1$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{2n}$ | $p_2$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $x_m$ | $p_{m1}$ | $p_{m2}$ | $\cdots$ | $p_{mn}$ | $p_m$ |
| 計 | $q_1$ | $q_2$ | $\cdots$ | $q_n$ | 1 |

表 1.1 同時分布表

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{m}p_{ij}=q_j \quad (1 \leqq j \leqq n)$$

となるから。$X, Y$ の確率分布 ($X$ の周辺分布、$Y$ の周辺分布という) は下の表のようになる。

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots$ | $x_m$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots$ | $p_m$ | 1 |

| $Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_m$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $q_1$ | $q_2$ | $\cdots$ | $q_m$ | 1 |

**例 1.4** 袋の中に 1, 2, 3 の数字の書かれた球がそれぞれ 5 個, 3 個, 2 個入っている。この袋から 1 個ずつ球を取り出すとき、1 個め, 2 個めに出た球に書かれていた数字をそれぞれ

(1) 非復元抽出 (取り出した球を元に戻さない) のとき $X_1, Y_1$ とし、

(2) 復元抽出 (取り出した球を元に戻す) のとき $X_2, Y_2$ とする。

このとき、$(X_1, Y_1)$ と $(X_2, Y_2)$ の同時分布を調べ、同時分布表を求めよ。

**解:** (1) $P(X_1=1, Y_1=1)=\frac{5}{10}\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$,

$P(X_1=1, Y_1=2)=\frac{5}{10}\frac{3}{9}=\frac{1}{6}$,

$P(X_1=1, Y_1=3)=\frac{5}{10}\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$,

$\vdots$

と求めると、$(X_1, Y_1)$ について右の同時分布表を得る。

(2) $P(X_2=1, Y_2=1)=\frac{5}{10}\frac{5}{10}=\frac{1}{4}$,

$P(X_2=1, Y_2=2)=\frac{5}{10}\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$,

$P(X_2=1, Y_2=3)=\frac{5}{10}\frac{2}{10}=\frac{1}{10}$,

$\vdots$

と求めると、$(X_2, Y_2)$ について右の同時分布表を得る。 □

| $X_1$ \ $Y_1$ | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{3}{10}$ |
| 3 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{1}{45}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 計 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 |

(1) 非復元抽出

| $X_2$ \ $Y_2$ | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 2 | $\frac{3}{20}$ | $\frac{9}{100}$ | $\frac{3}{50}$ | $\frac{3}{10}$ |
| 3 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{50}$ | $\frac{1}{25}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 計 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 |

(2) 復元抽出

**注意** これより、$X_1$ と $X_2$, $Y_1$ と $Y_2$ の周辺分布はともに等しいが、$(X_1, Y_1)$ と $(X_2, Y_2)$ の同時確率分布は異なることがわかる。このように、同時確率分布を考察することは確率分布を理解するうえで重要である。

**問 1.4** 2 本の当たりくじを含む 8 本のくじがある。まず A 君がくじを 1 本引き、残りのくじから B 君が 2 本ひくとき、A 君, B 君の当たりくじの数を、それぞれ $X, Y$ とする、$X, Y$ の同時分布表を求めよ。

確率変数の和の期待値

$(X, Y)$ の同時分布が前ページの表 1.1 で与えられるとき、2 変数関数 $f(x, y)$ に対して $f(X, Y)$ の期待値 $E(f(X, Y))$ を

$$E(f(X,Y))=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_i, y_j)P(X=x_i, Y=y_j)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_i, y_j)p_{ij}$$

と定める[*4]。このとき次が成立する。

**定理 1.2 (平均の性質)** 定数 $a, b, c$ に対して、$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$ となる。

**証明:** $(X, Y)$ の同時分布が表 1.1 で与えられているとすると、

$$E(aX+bY+c)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(ax_i+by_j+c)p_{ij}=a\sum_{i=1}^{m}x_i\sum_{j=1}^{n}p_{ij}+b\sum_{j=1}^{n}y_j\sum_{i=1}^{m}p_{ij}+c\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}$$

[*4] $f(X, Y)$ を新たな確率変数とみなし、$f(X, Y)$ の確率分布表を考え、その分布表から期待値を求めても同じ式が得られる。この方法で $f(X, Y)$ の分散 $V(f(X, Y))$ を考える。もちろん、$V(f(X,Y))=E(\{f(X,Y)-E(f(X,Y))\}^2)$ と定義してもよい。

$$= a\sum_{i=1}^{m} x_i p_i + b\sum_{j=1}^{n} y_j q_j + c\cdot 1 = aE(X)+bE(Y)+c.$$

**例題 1.5** さいころを二回投げ、1 回目, 2 回目の出る目を $X, Y$ とする。このとき $E(X+3Y)$ を求めよ。

**解:** $E(X)=E(Y)=\dfrac{1+2+\cdots+6}{6}=\dfrac{7}{2}$ より、$E(X+3Y)=E(X)+3E(Y)=\dfrac{7}{2}+3\cdot\dfrac{7}{2}=14.$ □

**問 1.5** 問 1.4 の確率変数 $X, Y$ について、$E(3X+2Y)$ と $E(XY)$ を求めよ。

**定義 1.3 (確率変数の独立性)** 確率変数 $X, Y$ が独立であるとは

$$P(X=x_i, Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j) \quad (1 \leqq i \leqq m, 1 \leqq j \leqq n)$$

となるときにいう。

例 1.4 では (2) の $X_2, Y_2$ は独立であるが、(1) の $X_1, Y_1$ は独立ではない。

**定理 1.4 (独立な確率変数の積の期待値)** $X, Y$ が互いに独立であれば、$E(XY)=E(X)E(Y)$.

**証明:** $(X, Y)$ の同時分布が表 2.1 で与えられているとすると、$p_{ij}=p_i q_j$ なので、

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j p_i q_j \\ &= \sum_{i=1}^{m} x_i p_i \sum_{j=1}^{n} y_j q_j = E(X)E(Y). \quad \square \end{aligned}$$

**例 1.6** 例 1.4 の (2) について $E(X_2Y_2)$ を求めよ。

**解:** 例 1.4 の解答 (2) 復元抽出の同時分布表より

$$E(X_2)=E(Y_2)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{17}{10}$$

で $X_2$ と $Y_2$ は独立なので

$$E(X_2Y_2)=E(X_2)E(Y_2)=\frac{17}{10}\cdot\frac{17}{10}=\frac{289}{100}. \quad \square$$

**注意 1.1** 例 1.4 の (1) 非復元抽出の場合について $E(X_1Y_1)$ を求めると、

$$\begin{aligned} E(X_1Y_1) &= 1\cdot 1\cdot\frac{2}{9}+1\cdot 2\cdot\frac{1}{6}+1\cdot 3\cdot\frac{1}{9}+2\cdot 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot 2\cdot\frac{1}{15}+2\cdot 3\cdot\frac{1}{15} \\ &\quad +3\cdot 1\cdot\frac{1}{9}+3\cdot 2\cdot\frac{1}{15}+3\cdot 3\cdot\frac{1}{45}=\frac{127}{45} \end{aligned}$$

となり (2) 復元抽出の場合と異なる結果となる。

**定理 1.5 (独立な確率変数の和の分散)** $X, Y$ が互いに独立であれば、定数 $a, b, c$ に対して、
$V(aX+bY+c)=a^2V(X)+b^2V(Y)$ となる。

**証明:** $V(aX+bY+c)=E(\{aX+bY+c-E(aX+bY+c)\}^2)=E(\{a(X-E(X))+b(Y-E(Y))\}^2)$
$= a^2E(\{X-E(X)\}^2)+2abE(\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\})+b^2E(\{Y-E(Y)\}^2)$

ここで $X, Y$ は互いに独立なので

$$E(\{X-E(X)\}\{Y-E(Y)\})=E(XY-XE(Y)-E(X)Y+E(X)E(Y))=E(XY)-E(X)E(Y)=0$$

より

$$V(aX+bY+c)=a^2E(\{X-E(X)\}^2)+b^2E(\{Y-E(Y)\}^2)=a^2V(X)+b^2V(Y). \quad \square$$

**例題 1.7** さいころを二回投げ、1 回目, 2 回目の出る目を $X, Y$ とする。このとき $V(X+3Y)$ を求めよ。

**解:** $E(X^2) = E(Y^2) = \dfrac{1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2}{6} = \dfrac{7 \cdot 13}{6}$ より、$V(X) = V(Y) = \dfrac{7 \cdot 13}{6} - \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 = \dfrac{35}{12}$. よって、

$$V(X + 3Y) = V(X) + 3^2 V(Y) = (1 + 9) \cdot \frac{35}{12} = \frac{175}{6}. \quad \square$$

**問 1.6** 例題 1.7 の確率変数 $X, Y$ について、$V(2X + 3Y)$ と $V(2X - 3Y)$ を求めよ。

3 つ以上の確率変数についても独立性は定義される。3 つの確率変数 $X, Y, Z$ については、$X$ のとる任意の値 $a$ と、$Y$ のとる任意の値 $b$ と、$Z$ のとる任意の値 $c$ について

$$P(X = a, Y = b, Z = c) = P(X = a)P(Y = b)P(Z = c)$$

が成り立つとき $X, Y, Z$ は互いに独立であるという。3 つ以上の確率変数の積の期待値や和の分散についても、定理 1.4 や定理 1.5 と同様の等式が成り立つ。例えば、3 つの確率変数 $X, Y, Z$ が互いに独立ならば、次の等式が成り立つ。

$$E(XYZ) = E(Z)E(Y)E(Z), \qquad V(X + Y + Z) = V(X) + V(Y) + V(Z).$$

**例題 1.8** さいころを 3 回投げ、1 回目, 2 回目, 3 回目の出る目を $X, Y, Z$ とする。このとき $E(X + Y + Z)$, $E(XYZ)$ と $V(X + Y + Z)$ を求めよ。

**解:** 例題 1.5, 1.7 より $E(X) = E(Y) = E(Z) = \dfrac{7}{2}$, $V(X) = V(Y) = V(Z) = \dfrac{35}{12}$ なので、

$$\begin{aligned} E(X + Y + Z) &= E(X) + E(Y) + E(Z) = \frac{21}{2}, \quad \text{(これは独立性を用いていない)} \\ E(XYZ) &= E(X)E(Y)E(Z) = \frac{343}{8}, \\ V(X + Y + Z) &= V(X) + V(Y) + V(Z) = \frac{35}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

**問 1.7** つぼの中に赤球 4 個と白球 6 個がある。このつぼから一度に 3 個とりだすとし、その中の赤球の個数を数えてからつぼにもどす。このような試行を 3 回行うとし、1 回目, 2 回目, 3 回目の赤球の個数を $X, Y, Z$ とする (*cf.* 問 1.1)。このとき $E(X + Y + Z)$, $E(XYZ)$ と $V(X + Y + Z)$ を求めよ。

## 1.4 二項分布

1 個のさいころを 4 回投げるとき、1 の目の出る回数を $X$ とすると、1 の目が $r$ 回出る確率は

$$P(X = r) = {}_4C_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{4-r}, \qquad r = 0, 1, 2, 3, 4$$

である。

一般に、1 回の試行で事象 $A$ が起こる確率が $p$ であるとき、この試行を $n$ 回行う反復試行において、$A$ が $r$ 回起こる確率は

$${}_nC_r p^r q^{n-r} \qquad \text{ただし} \quad q = 1 - p$$

となる。このような反復試行において、$A$ の起こる回数を $X$ とすると、確率変数 $X$ の確率分布は次のようになる。

| $X$ | $0$ | $1$ | $\cdots$ | $r$ | $\cdots$ | $n$ | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | ${}_nC_0 q^n$ | ${}_nC_1 pq^{n-1}$ | $\cdots$ | ${}_nC_r p^r q^{n-r}$ | $\cdots$ | ${}_nC_n p^n$ | 1 |

この表の確率は、二項定理の展開式

$$(p + q)^n = {}_nC_0 q^n + {}_nC_1 pq^{n-1} + \cdots + {}_nC_r p^r q^{n-r} + \cdots + {}_nC_n p^n$$

の右辺の各項を順に並べたものである。この分布を**二項分布**といい、$B(n, p)$ で表す。[*5]

[*5] $B(n, p)$ の $B$ は、二項分布を表す binomial distribution に由来する。

**定理 1.6 (二項分布の平均, 分散)** 確率変数 $X$ が二項分布 $B(n,p)$ に従うとき、$q=1-p$ とすると

$$E(X)=np, \qquad V(X)=npq, \qquad \sigma(X)=\sqrt{npq}.$$

**証明:** 1 回の試行で事象 $A$ が起こる確率が $p$ である試行を $n$ 回行うとき、第 $k$ 回目の試行で事象 $A$ が起これば 1, 起こらなければ 0 の値をとる確率変数を $X_k$ とする。このとき、$q=1-p$ とすると、$X_k$ の確率分布は右のようになるので

| $X_k$ | 0 | 1 | 計 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $q$ | $p$ | 1 |

$$\begin{aligned} E(X_k) &= 0\cdot q+1\cdot p=p \\ E({X_k}^2) &= 0^2\cdot q+1^2\cdot p=p \\ V(X_k) &= E({X_k}^2)-\{E(X_k)\}^2=p-p^2=p(1-p)=pq. \end{aligned}$$

ここで、$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$ とおくと、$X$ は $n$ 回の反復試行において $A$ が起こる回数を表すから、二項分布 $B(n,p)$ に従う。よって、

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n) \\ &= p+p+\cdots+p=np. \end{aligned}$$

また、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は互いに独立であるから定理 1.5 および p.6 の問 1.6 の下に述べた注意により

$$\begin{aligned} V(X) &= V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\cdots+V(X_n) \\ &= pq+pq+\cdots+pq=npq \end{aligned}$$

となる。標準偏差については $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{npq}$ と示される。 □

**問 1.8** さいころを 72 回投げるとき、1 の目が出る回数 $X$ の平均と分散, 標準偏差を求めよ。

# 2 正規分布

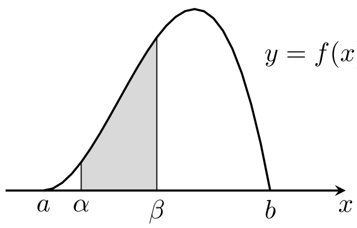
## 2.1 連続的な確率変数

前の章まで扱った、とびとびの値をとる確率変数を**離散型確率変数**という。これに対して、ある範囲のすべての実数値をとるような確率変数を**連続型確率変数**という。

一般に、確率変数 $X$ が連続的な値をとり、その値が $\alpha \leqq X \leqq \beta$ の範囲にある確率 $P(\alpha \leqq X \leqq \beta)$ が右の図のように、

曲線 $y=f(x)$, $x$ 軸, 直線 $x=\alpha$, $x=\beta$

で囲まれた図形の面積で表されているとき、関数 $f(x)$ を $X$ の**確率密度関数**といい、曲線 $y=f(x)$ を**分布曲線**という。




また、$X$ のとり得る値の範囲が $a \leqq X \leqq b$ のとき、

曲線 $y=f(x)$, $x$ 軸, 直線 $x=a$, $x=b$

で囲まれた図形の面積は 1 となる。

**例 2.1** 確率変数 $X$ のとり得る範囲が $0 \leqq X \leqq 2$ で, 確率密度関数が $f(x)=\dfrac{3}{4}x(2-x)$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ のとき、

$$P\Big(0 \leqq X \leqq \frac{2}{3}\Big)=\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{3}{4}(2x-x^2)\,dx=\frac{3}{4}\Big[x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}\Big(\frac{4}{9}-\frac{8}{81}\Big)=\frac{7}{27}.$$

**問 2.1** 例 2.1 の確率変数 $X$ について、次の確率を求めよ。

(1) $P(0 \leqq X \leqq 1)$, (2) $P\Big(\dfrac{1}{2} \leqq X \leqq 2\Big)$

確率変数 $X$ のとる値の範囲が $a \leqq X \leqq b$ で、確率密度関数が $f(x)$ のとき、平均 $m = E(X)$ と分散 $V(X)$ は、次の式で与えられる。

$$E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx \qquad V(X) = \int_a^b (x-m)^2 f(x)\,dx.$$

例 2.1 の確率変数 $X$ の平均と分散は以下のようになる。

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^2 x \cdot \frac{3}{4}(2x - x^2)\,dx = \frac{3}{4}\Big[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big]_0^2 = 1, \\ V(X) &= \int_0^2 (x-1)^2 \cdot \frac{3}{4}(2x - x^2)\,dx = \frac{3}{4}\int_0^2 (2x - 5x^2 + 4x^3 - x^4)\,dx \\ &= \frac{3}{4}\Big(2^2 - \frac{5}{3}\cdot 2^3 + 2^4 - \frac{1}{5}\cdot 2^5\Big) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

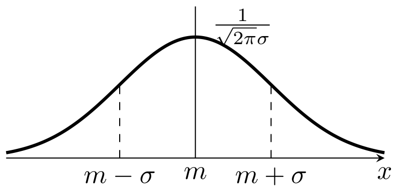
**問 2.2** 確率変数 $X$ のとり得る範囲が $0 \leqq X \leqq 2$ で, 確率密度関数が $f(x) = 1 - |x-1|$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ のとき、確率 $P\Big(1 \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}\Big)$ と平均 $E(X)$, 分散 $V(X)$ を求めよ。

## 2.2 正規分布

連続型確率変数の分布の代表的なものに、正規分布がある。自然現象や社会現象の中には、観測される変量の分布が正規分布に近いものがあり、このとき正規分布が有効に利用される。

確率変数 $X$ のとり得る値が実数全体で、$X$ の確率密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$




であるとき、この $X$ の確率分布を平均 $m$, 標準偏差 $\sigma$ の**正規分布**といい、$N(m, \sigma^2)$ で表す。また、このとき確率変数 $X$ は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うという。ここで、$e$ は無理数で $e = 2.71829\cdots$ である。

正規分布の密度関数のなす曲線 (正規分布曲線) は、次の性質をもつ。

(1) 曲線は、直線 $x = m$ に関して対称であり、$f(x)$ は $x = m$ で最大値となる。

(2) $x$ 軸を漸近線とする。

(3) 標準偏差 $\sigma$ が大きくなると、曲線の山が低くなって横に広がり、
標準偏差 $\sigma$ が 0 に近づくと、曲線の山は高くなり対称軸 $x = m$ の周りに集まる。

**定理 2.1 (標準正規分布)** 確率変数 $X$ が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、$Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと (これを**標準化**という)、$Z$ は正規分布 $N(0,1)$ に従い、$Z$ の確率密度関数が $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ となる。この平均 0, 標準偏差 1 の正規分布を**標準正規分布**という。

**証明:** $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ に対して $P\Big(\alpha \leqq \dfrac{X-m}{\sigma} \leqq \beta\Big) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$ を示せばよい。

$$P\Big(\alpha \leqq \frac{X-m}{\sigma} \leqq \beta\Big) = P(m + \sigma\alpha \leqq X \leqq m + \sigma\beta) = \int_{m+\sigma\alpha}^{m+\sigma\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

ここで、$z = \dfrac{x-m}{\sigma}$ と置換すると、$dz = \dfrac{1}{\sigma}dx$ で $x$ と $z$ の対応は右のようにとれる。したがって、

| $x$ | $m + \sigma\alpha$ | $\to$ | $m + \sigma\beta$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $\alpha$ | $\to$ | $\beta$ |

$$\int_{m+\sigma\alpha}^{m+\sigma\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

となり、証明される。 □

標準正規分布 $N(0,1)$ に従う確率変数 $Z$ に対して、確率 $P(0 \leqq Z \leqq z)$ を $p(z)$ で表す。いろいろな $z$ の値に対する $p(z)$ の値 (近似値) を表にまとめたものがこのテキストの最後のページにある正規分布表である。この表を利用して次のように確率を求めることができる。

**例 2.2** 確率変数 $Z$ が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、正規分布表を用いて次の確率を求める。

(1) $P(0.8 \leqq Z \leqq 1.3) = P(0 \leqq Z \leqq 1.3) - P(0 \leqq Z \leqq 0.8) = p(1.3) - p(0.8)$
$= 0.40320 - 0.28814 = 0.11506.$

(2) $P(Z \geqq 1.3) = P(Z \geqq 0) - P(0 \leqq Z \leqq 1.3) = 0.5 - p(1.3) = 0.5 - 0.40320 = 0.09680.$

(3) $P(-0.08 \leqq Z \leqq 0.24) = P(-0.08 \leqq Z \leqq 0) + P(0 \leqq Z \leqq 0.24)$
$= P(0 \leqq Z \leqq 0.08) + P(0 \leqq Z \leqq 0.24) = p(0.08) + p(0.24) = 0.03188 + 0.09483 = 0.12671.$ □

**問 2.3** 確率変数 $Z$ が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき、正規分布表を用いて次の確率を求めよ。

(1) $P(Z \leqq 1.24)$,　　(2) $P(Z > 1.07)$,　　(3) $P(-0.32 \leqq Z \leqq 1.16)$.

**注意 2.1** 統計ソフト R を用いて $P(Z \leqq 0.8)$ を計算すると、

```
> pnorm(0.8, 0, 1, lower.tail = TRUE)
[1] 0.7881446
```

と出力される。Excel の場合セルに「`=NORMSDIST(0.8)`」と記入しても同様な結果が出力される。[*6]

確率変数 $X$ が $N(m, \sigma^2)$ に従うとき、定理 2.1 を用いて標準化することで確率 $X$ に関する確率を求めることができる。

**例 2.3** 確率変数 $Z$ が正規分布 $N(8, 4^2)$ に従うとき、$P(3 \leqq X \leqq 10)$ を求めよ。

**解:** $Z = \dfrac{X-8}{4}$ とすると、$Z$ は $N(0,1)$ に従う。よって

$$\begin{aligned} P(3 \leqq X \leqq 10) &= P\Big(\frac{3-8}{4} \leqq Z \leqq \frac{10-8}{4}\Big) = P(-1.25 \leqq Z \leqq 0.5) \\ &= p(1.25) + p(0.5) = 0.39435 + 0.19146 = 0.58581. \quad \square \end{aligned}$$

**問 2.4** 確率変数 $X$ が正規分布 $N(4, 2^2)$ に従うとき、次の確率を求めよ。

(1) $P(1.36 \leqq X \leqq 4.64)$　　(2) $P(0.08 \leqq X \leqq 2.54)$

正規分布は、身近な問題を統計的に考えるのに役立つ。

**例題 2.4** ある高校の男子の身長が、平均 170.2 cm, 標準偏差 5.0 cm の正規分布に従うものとする。このとき、身長が 178 cm 以下の生徒は何 % いるか。

**解:** $X$ が正規分布 $N(170.2, 5.0^2)$ に従うとき、$Z = \dfrac{X - 170.2}{5}$ は $N(0,1)$ に従う。よって、

$$\begin{aligned} P(X \geqq 178) &= P\Big(Z \geqq \frac{178-170.2}{5}\Big) = P(Z \geqq 1.56) \\ &= 0.5 - p(1.56) = 0.5 - 0.44062 = 0.05938. \end{aligned}$$

したがって、約 5.94% いる。 □

**問 2.5** 例題 2.4 について、次の問いに答えよ。

(1) 身長が 165cm 以上 175cm 未満の生徒は何 % いるか。

(2) 身長の高い方から 10% の中に入るのは、何 cm 以上の生徒か。最も小さい整数値で答えよ。

---

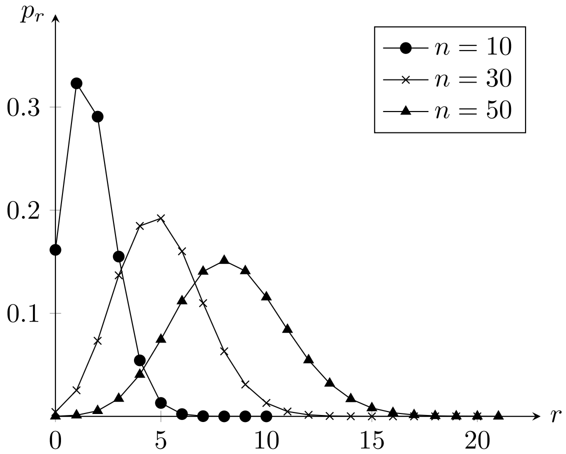
[*6] 最後のページにある正規分布表は Excel でこの関数を用いて作成しました。

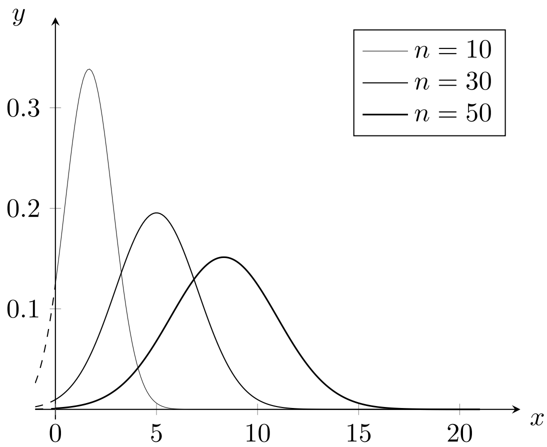
## 2.3　二項分布の正規分布による近似

正規分布と二項分布の関係について考える。さいころを $n$ 回投げて 1 の目が出る回数を $X$ とすると、確率変数 $X$ は二項分布 $B\Big(n, \dfrac{1}{6}\Big)$ の従い、

$$X \text{ の期待値は} \quad m = \frac{n}{6}, \qquad X \text{ の分散は} \quad \sigma^2 = n \cdot \frac{1}{6}\Big(1 - \frac{1}{6}\Big) = \frac{5n}{36}$$

となる。この $X$ について $X = r$ となる確率 $p_r = P(X = r)$ を $n = 10, 30, 50$ の各場合について計算し、折れ線グラフをかくと下の左の図のようになる。二項分布 $B(n, p)$ のグラフは、$n$ が大きくなるにつれて、ほぼ左右対称になり、正規分布曲線と似てくる。




そこで、$m = \dfrac{n}{6}$, $\sigma^2 = \dfrac{5n}{36}$ である正規分布 $N(m, \sigma^2)$ の正規分布曲線を、$n = 10, 30, 50$ の各場合についてかくと上の左の図のようになる。

一般に、次の定理が成り立つ。

**定理 2.2 (二項分布の正規分布による近似)** 二項分布 $B(n, p)$ に従う確率変数 $X$ は、$n$ が大きいとき、近似的に正規分布 $N(np, np(1-p))$ に従う。

**例題 2.5** 1 個のさいころを 720 回投げて、1 の目が出る回数を $X$ とするとき、$X$ が 105 以下となる確率を求めよ。

**解:** $X$ は二項分布 $B\Big(720, \dfrac{1}{6}\Big)$ に従い

$$X \text{ の期待値は} \quad m = 720 \cdot \frac{1}{6} = 120, \qquad X \text{ の分散は} \quad \sigma^2 = 720 \cdot \frac{1}{6} \cdot \Big(1 - \frac{1}{6}\Big) = 100 = 10^2.$$

よって、$X$ は近似的に正規分布 $N(120, 10^2)$ に従うので、$Z = \dfrac{X - 120}{10}$ は $N(0,1)$ に従う。よって、

$$\begin{aligned} P(X \leqq 105) &= P\Big(Z \leqq \frac{105 - 120}{10}\Big) = P(Z \leqq -1.5) = P(Z \geqq 1.5) \\ &= 0.5 - p(1.5) = 0.5 - 0.43319 = 0.06681. \quad \square \end{aligned}$$

**問 2.6** 1 枚の硬貨を 100 回投げるとき、表の出る回数が 45 以上 54 以下である確率を求めよ。

**注意 2.2** 実際に統計ソフト R を用いて $P(X \leqq 105)$ は次のように計算される。

```
> pbinom(105,720,1/6, lower.tail = TRUE)
[1] 0.07169854
```

Excel の場合セルに「=BINOM.DIST(105,720,1/6,TRUE)」と記入しても同様な結果が出力される。

高校数学の範囲を越すが、よりよい近似値を求める方法として**半整数補正**がある。これは上記の二項分布のグラフをヒストグラムで考え、$P(X \leqq 105)$ の代わりに $P(X \leqq 105+0.5)$ とし次のように計算する ($cf.$ [5])。

$$P(X \leqq 105) = P\Big(Z \leqq \frac{105+0.5-120}{10}\Big) = P(Z \leqq -1.45) = 0.5 - 0.42647 = 0.07353.$$

問 2.6 については問の解答 (p.21) に記述します。

# 3 統計的な推測

## 3.1 母集団と標本

統計調査には、調査の対象となるものをもれなく調べる全数調査もあるが、全数調査では多くの時間、費用及び労力がかかり、実用的でないこともある。そこで、標本を抽出して調査し、その結果から全体の性質を推測する標本調査が必要となる。標本調査の目的は、抽出された標本の調査結果から、母集団の状況をできるだけ正確に推測することであり、そのためには、標本が母集団全体の特徴をよく表したものになるように、つまり、標本が母集団のよい縮図となるように標本調査を設計し、調査を実施する必要がある。中学校第 3 学年では、このような標本調査の必要性や意味を理解するとともに、無作為に抽出された標本から母集団の傾向を推定すればその結果が大きく外れることが少ないことや、標本の大きさが大きい方が母集団の傾向を推定しやすくなることを、コンピュータなどの情報機器を用いた実験や簡単な場合についての標本調査を通して経験的に理解してきている。

ここでは、中学校における学習を踏まえながら標本調査の考え方について理解を深め、目的に応じて標本調査を設計したり、標本調査の方法や結果を批判的に考察したりできるようにする。例えば、標本を無作為に抽出する方法として、母集団の全てのリストがない場合や、標本の抽出にかかる手間やコストを軽減したい場合には、クラスター抽出法（母集団を地域など複数の部分集団 (クラスター) に分割し、部分集団を抽出してその集団に対しては全数調査を行う方法）や 2 段抽出法 (クラスター抽出で抽出された部分集団から標本を抽出する方法) などの方法が用いられることを取り上げることが考えられる。(以上、高等学校学習指導要領解 [4] から「標本調査の考え方について理解を深めること」のコピーです。)

以下、この講義で用いる用語を簡単に説明する。

標本調査において対象とする集団全体を**母集団** (population) という。

母集団から選び出された一部を**標本** (sample) といい、標本を選び出すことを**標本抽出** (sampling) という。

母集団に属する個々のものを個体 (要素) といい、個体の総数を**母集団の大きさ**という。標本に含まれる個体の個数を**標本の大きさ**という。

標本調査では、標本は母集団のようすをできるだけ忠実に反映するように抽出されなければならない。そのために、母集団の各要素が等しい確率で抽出されるようにする。このように抽出された標本を**無作為標本** (random sample) といい、このような抽出法を**無作為抽出法** (random sampling) という。*7

母集団から標本を抽出するとき、抽出のたびに個体をもとに戻し、あらためて次を抽出する方法を**復元抽出**という。一方、もとに戻さないで、続けて抽出する方法を**非復元抽出**という。

---

*7 [9] より: **クラスター抽出法**は、母集団を網羅的に分割しクラスターにわけて、次にいくつかのクラスターを抽出し、その構成員を対象者とする。ただし、精度は低下するので注意が必要である。エリア・マーケティングなどに用いられる。

大規模な標本調査においては調査対象を直接抽出することが難しい場合がある。このようなときは、抽出単位を何段階かに分けて、まず、第 1 次抽出単位をある確率で抽出し、次に抽出した第 1 次抽出単位の中あら、さらにある確率で第 2 次抽出単位を抽出する。例えば、全国学校調査では、いくつかの県を抽出し、それらの学校から組を抽出し、そこから生徒を抽出する。このような手順で指定した段階までを行うことを**多段抽出法**という。

例えば [6] にわかりやすい解説があります。同書にはもっと深く学びたい人向けの文献紹介もあります。

本文にある抽出法を**単純無作為抽出法**ということもある。1983 年度文部省検定済教科書 [2] には、他に層化無作為抽出法がも紹介されている。

母集団から抽出された大きさ $n$ の無作為標本は、$n$ 個の同じ分布に従う確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で表される。もしこれが復元抽出によって得られたものであれば $X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立である。一方、非復元抽出によって得られた場合は独立ではない。しかし、母集団の大きさが極めて大きいときには、非復元抽出でも $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であるとして取り扱っても、さしつかえないことが知られている。

これからは、母集団の大きさが十分に大きい場合を考える。したがって、ある母集団から抽出される大きさ $n$ の無作為標本は、いずれも母集団の確率分布 (**母集団分布** population distribution という) に従う $n$ 個の独立な確率変数の組であるとみなしてよい。

研究対象となっている母集団の特性として、この母集団分布を知りたい場合もあるが、その母集団を特徴付ける定数の値を知りたい場合もある。そのような定数を**母数** (parameter) という。特に母集団分布の平均, 分散, 標準偏差を、それぞれ**母平均**, **母分散**, **母標準偏差** (population mean, population variance, population standard deviation) といい、$m$, $\sigma^2$, $\sigma$ で表す。

## 3.2 標本平均とその分布

母集団から大きさ $n$ の標本を無作為に抽出し、それを $X_1, X_2, \cdots, X_n$ とするとき、

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

を**標本平均**という。

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立で同じ分布に従う確率変数であることに注意すると、定理 1.2 と定理 1.5 により次の定理が従う。

**定理 3.1 (標本平均の期待値と標準偏差)** 母平均 $m$, 母標準偏差 $\sigma$ の母集団から大きさ $n$ の無作為標本を抽出するとき、標本平均 $\overline{X}$ の期待値と標準偏差は

$$E(\overline{X}) = m, \qquad \sigma(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

**証明:** 母平均が $m$ より $E(X_i) = m$, $1 \leqq i \leqq n$, なので定理 1.2 から、

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n}\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\} = \frac{1}{n} \cdot nm = m.$$

さらに、$X_1, X_2, \cdots, X_n$ は独立で $V(X_i) = \sigma(X_i)^2 = \sigma^2$, $1 \leqq i \leqq n$, より定理 1.5 から、

$$\begin{aligned} V(\overline{X}) &= \frac{1}{n^2} V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

となり $\sigma(\overline{X}) = \sqrt{V(\overline{X})} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ と証明される。 □

一般に、次のことが成り立つことが知られている。[*8]

**定理 3.2 (標本平均の分布)** 母平均 $m$, 母標準偏差 $\sigma$ の母集団から無作為抽出された大きさ $n$ の標本平均 $\overline{X}$ の分布は、$n$ が大きければ正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ とみなすことができる。

**例題 3.1** 母平均 60, 母標準偏差 20 の母集団から大きさ 100 の標本を抽出するとき、標本平均 $\overline{X}$ が 62 より大きくなる確率を求めよ。

[*8] これは $\overline{X}$ が独立な確率変数の和の定数倍であることから、 定理 2.2(二項分布の正規分布による近似) と同様に導かれる。この定理には**中心極限定理**という名称が与えられている。

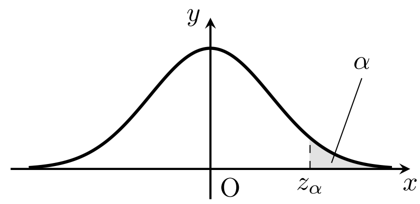
**解:** $\overline{X}$ の分布は $N\Big(60, \dfrac{20^2}{100}\Big)$ とみなすことができるから、$Z = \dfrac{\overline{X}-60}{20/10}$ の分布は $N(0,1)$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} P(\overline{X} \geqq 62) &= P\Big(Z \geqq \frac{62-60}{2}\Big) = P(Z \geqq 1) \\ &= 0.5 - p(1) = 0.5 - 0.34134 = 0.15866. \quad \square \end{aligned}$$

**問 3.1** 母平均 60, 母標準偏差 20 の母集団から大きさ 400 の標本を抽出するとき、標本平均 $\overline{X}$ が 58 より小さくなる確率を求めよ。

## 3.3 統計的推測 (I) 区間推定

標本の値をもとにして母集団のようすを推定しようとするのが、統計的推測の目的である。まず、母集団からとりだされた標本を調べて、母平均や母集団における比率を区間推定する方法について考える。




$0 < \alpha < 1$ である値 $\alpha$ と標準正規分布に従う確率変数 $Z$ について $P(Z \geqq z_\alpha) = \alpha$ となる $z_\alpha$ を標準正規分布の**上側** $\alpha$ **点**という。以下の数値がよく用いられる。

$$z_{0.05} = 1.645,\ \ z_{0.025} = 1.960,\ \ z_{0.01} = 2.326,\ \ z_{0.005} = 2.576.$$

**定理 3.3 (母平均の区間推定)** 標準偏差 $\sigma$ の母集団から、大きさ $n$ の標本を無作為抽出するとき、$n$ が大きければ、母平均 $m$ の信頼度 $100(1-\alpha)\%$ の信頼区間は

$$\overline{X} - z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + z_{\alpha/2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

**証明:** 母平均 $m$, 母標準偏差 $\sigma$ から大きさ $n$ の無作為標本の標本平均 $\overline{X}$ の分布は $N\Big(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\Big)$ である。よって、その標準化 $Z = \dfrac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ の分布は $N(0,1)$ となるので、

$$P\Big(-z_{\alpha/2} \leqq \frac{\overline{X}-m}{\sigma/\sqrt{n}} \leqq z_{\alpha/2}\Big) = 1-\alpha.$$

括弧内の不等式を $m$ について解くと、$\overline{X} - z_{\alpha/2} \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + z_{\alpha/2} \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ となるが、これは $m$ がこの区間に含まれる確率が $1-\alpha$ であることを示している。 $\square$

**注意 3.1** 母標準偏差 $\sigma$ がわからない場合でも、標本の大きさ $n$ が大きいときは、$\sigma$ の代わりに標本標準偏差

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2}$$

の値を用いても差し支えない。

**例題 3.2** ある県の高等学校の生徒 400 人を無作為に選び、1 週間あたりのテレビ視聴時間 (単位 時間) を調査したところ、平均値 18.2 時間, 標準偏差は 10.1 時間であった。生徒の 1 週間あたりのテレビ視聴時間の平均値を信頼度 95% で区間推定せよ。また、信頼度 99% で区間推定せよ。

**解:** 標本平均は $\overline{X} = 18.2$, 標本標準偏差は $S = 10.2$, 標本の大きさ $n = 400$ であるから、
信頼度 95% の信頼区間は $100(1-\alpha) = 95$ より $\alpha = 0.05$ なので、

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2} \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 18.2 \pm 1.960 \times \frac{10.1}{\sqrt{400}} = 18.2 \pm 0.9898 = \begin{cases} 19.1898 \\ 17.2102 \end{cases}$$

信頼度 99% の信頼区間は $100(1-\alpha) = 99$ より $\alpha = 0.01$ より、

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2} \times \frac{S}{\sqrt{n}} = 18.2 \pm 2.576 \times \frac{10.1}{\sqrt{400}} = 18.2 \pm 1.30088 = \left\{ \begin{array}{l} 19.50088 \\ 16.89912 \end{array} \right.$$

したがって、信頼度 95% の信頼区間は $17.2 \leqq m \leqq 19.2$, 信頼度 99% の信頼区間は $16.9 \leqq m \leqq 19.5$. □

**注意 3.2** 母平均 $m$ に対する信頼度 95% の信頼区間とは、無作為抽出を繰り返し、このような区間を、例えば 100 個作ると、$m$ を含む区間が 95 個くらいあることを意味している。

**注意 3.3** 区間推定の端数処理において、下限の数値の端数は切り捨て、上限の数値の端数は切り上げる場合がある。これは、区間推定では安全第一で、確実に信頼度を確保するためである。三省堂の高等学校教科書 [3] の指導資料の部の p.411 ではこのような端数処理を推奨している。現行の教科書 [1] では、多くは端数処理において四捨五入で上記のようになるか、そうでない場合も上限で切り捨て下限では切り上げる数字がかなり小さいものになるよう問題の数値が設定されているようである。この講義では簡単のため区間推定においては下限・上限ともに四捨五入することにする。(小数点以下第何位まで求めたらよいかを含め、問題文等の指示に従って処理してください。)

**問 3.2** 全国一斉にある教科のテストが行われた。受験生から 100 名を抽出し、その得点を調査したところ、平均値は 58.2 点, 標準偏差は 20.4 点であった。全受験生の得点の平均値を信頼度 95% で区間推定せよ。また、信頼度 90% で区間推定せよ。

ある性質について、母集団を構成する要素が、それをもつかもたないかのどちらかのとき、その性質をもつ要素の割合を**母比率**という。母比率 $p$ の区間推定を考えよう。

**定理 3.4 (母比率の区間推定)** 標本の大きさ $n$ が大きいとき、標本比率を $\widehat{p}$ とすると、母比率 $p$ の信頼度 $100(1-\alpha)\%$ の信頼区間は

$$\widehat{p} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \leqq p \leqq \widehat{p} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}.$$

**解説:** 母比率 $p$ の母集団から大きさ $n$ の標本を復元抽出するとき、その中に含まれるその性質 (性質 $A$ とする) をもつものの個数を $X$ とすると、$X$ の分布は二項分布 $B(n,p)$ となる。ここで、 二項分布の正規分布による近似 (定理 2.2) より $X$ は正規分布 $N(np, np(1-p))$ に従うと考えてよい。よって、$Z = \dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ は $N(0,1)$ に従うから、

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leqq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqq z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha.$$

括弧の中の不等式は、$\dfrac{X}{n} - z_{\alpha/2} \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} \leqq p \leqq \dfrac{X}{n} + z_{\alpha/2} \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ と変形できる。ところで、$\dfrac{X}{n}$ は標本において性質 $A$ をもつものの比率を表している、この標本比率を $\widehat{p}$ とすると、$n$ が十分大きいので $p$ と $\widehat{p}$ はほぼ等しいとみて、根号内の $p$ を $\widehat{p}$ で置き換えて、定理の式を得る。 □

**例題 3.3** A 市で、あるテレビ番組の視聴率を調べるために、成人 400 人を無作為抽出したところ、52 人が見ていることがわかった。A 市におけるこの番組の成人の視聴率 $p$ の信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

**解:** 標本の大きさ $n = 400$, 標本比率 $\widehat{p} = \dfrac{52}{400} = 0.13$ であるから、

$$\widehat{p} \pm z_{0.025} \times \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} = 0.13 \pm 1.960 \times \sqrt{\frac{0.13 \times (1-0.13)}{400}} \fallingdotseq 0.13 \pm 0.03296 = \left\{ \begin{array}{l} 0.16296 \\ 0.09704 \end{array} \right.$$

よって、信頼度 95% の信頼区間は $0.097 \leqq p \leqq 0.163$. □

**例題 3.4** ある都市で、有権者の内閣支持率 $p$ を調べるのに標本調査を行うことになった。信頼区間の幅が 0.03 以下になるように、信頼係数 95% で $p$ を区間推定したい。抽出する有権者の数を何名以上にすればよいか。

**解**: 抽出する人数を $n$ とする。標本比率を $\widehat{p}$ とすると信頼区間の幅は

$$\left(\widehat{p}+z_{0.025}\times\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)-\left(\widehat{p}-z_{0.025}\times\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)=2\times z_{0.025}\times\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}.$$

したがって、$2\times z_{0.025}\times\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\leqq 0.03.$ これを $n$ について解くと

$$n\geqq\left(\frac{2\times z_{0.025}}{0.03}\right)^2\times\widehat{p}(1-\widehat{p}).$$

これがどんな $0<\widehat{p}<1$ に対しても成立すればよい。ここで、$\widehat{p}(1-\widehat{p})=-\left(\widehat{p}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\leqq\frac{1}{4}$ より

$$n\geqq\left(\frac{2\times 1.960}{0.03}\right)^2\times\frac{1}{4}\fallingdotseq 4268.44,$$

以上より 4269 名以上とすればよい。 □

**問 3.3** ある県の高等学校の生徒 350 人を無作為に選び、虫歯がある生徒を数えたところ、252 人であった。この県の高等学校の生徒の虫歯の保有率 $p$ を、95% の信頼度 99% で区間推定せよ。

**問 3.4** ある都市で、有権者の内閣支持率 $p$ を調べるのに標本調査を行うことになった。信頼区間の幅が 0.03 以下になるように、信頼係数 99% で $p$ を区間推定したい。抽出する有権者の数を何名以上にすればよいか。

## 3.4 統計的推測 (II) 仮説検定の考え

学習指導要領解説 [4] には、数学 I で「具体的な事象において仮説検定の考え方を理解するとともに，不確実な事象の起こりやすさに着目し，主張の妥当性について，実験などを通して判断したり，批判的に考察したりすること」を学ぶとあります。まず、簡単なモデルを通して統計的仮説検定の考え方を学びましょう。*9

**例題 3.5** 1920 年代末のイギリスにて、陽射しの強いある夏の午後。何人かの英国紳士と婦人たちが屋外のテーブルで紅茶を楽しんでいたときのことだった。その場にいたある婦人はミルクティについて「紅茶を先に入れたミルクティ」か「ミルクを先に入れたミルクティ」か、味が全然違うからすぐにわかると言ったらしい。

その場にいた紳士たちのほとんどは、婦人の主張を笑い飛ばした。彼らが学んだ科学的知識に基づけば、紅茶とミルクが一度混ざってしまえば何ら化学的性質の違いなどない。

だが、その場にいた 1 人の小柄で、分厚い眼鏡をかけ髭を生やした男だけが、婦人の説明を面白がって「その命題をテストしてみようじゃないか」と提案したそうだ。その男こそが、現代統計学の父、ロナルド A. フィッシャーである。

彼はさっそくティカップをずらりと並べ、婦人に見えない場所で 2 種類の違った淹れ方のミルクティを用意した。そしてランダムな順番で婦人にミルクティを飲ませ、婦人の答えを書き留めた後でちょっとした確率の計算を行った。婦人は出された 5 杯のミルクティをすべて正確に言い当てることができた。*10

*9 仮説検定は農学、生物学、医学薬学、心理学、経済学、金融保険をはじめデータを扱う様々な分野で用いられ発展しています。興味のある方は、インターネットで調べたり、例えば統計学図鑑 [7], やさしい統計学入門 [11] など書物を調べたてみてください。

*10 [8] p.102 より。これはランダム化比較実験の例ですが、ここでは仮説検定の問いとして考察します。
同書 p.106 には「王立化学協会が 2003 年に発表した「一杯の完璧な紅茶の淹れ方」というウィットにとんだプレリリースがある。」とあります。興味のある方はインターネットで「一杯の完璧な紅茶の淹れ方」と検索してみてください。

仮説検定では、

1. まず主張したい内容と逆の仮説である**帰無仮説** $\mathrm{H}_0$ と
   帰無仮説が棄却されたとき、代わりに採択される仮説である**対立仮説** $\mathrm{H}_1$ を設定する
2. 帰無仮説が正しい場合に、誤って棄却される確率の限界である**有意水準** $\alpha$ を決める。
3. 帰無仮説が正しいとしその現象が起こりうる確率 ($p$ 値という) を計算する。あるいは有意水準から帰無仮説を棄却する範囲である**棄却域**を決める。
4. 3 で求めた確率が有意水準より小さければ帰無仮説を**受容**し、大きければ帰無仮説を**棄却**する。

を行う。帰無仮説が棄却されれば対立仮説を採択し、受容されれば帰無仮説は否定されないとします。

**例題 3.5 の解答:** 婦人がミルクティを正しく選ぶ確率を $p$ として、帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : p = \dfrac{1}{2}$, 対立仮説 $\mathrm{H}_1 : p > \dfrac{1}{2}$ (片側検定という) とし、有意水準はもっとも一般的な 5% で検定しましょう。

$\mathrm{H}_0$ のもと、婦人が 5 杯とも正解する確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \dfrac{1}{32}$ で 5% より小さいので、$\mathrm{H}_0$ は棄却される。すなわち「婦人はミルクティを正しく選ぶことができる」となる。 □

次に、教科書にある例題を考えましょう。

**例題 3.6** あるコインを 8 回投げたところ 7 回表が出た。このコインは表が出る確率 $p$ は $\dfrac{1}{2}$ であるか。有意水準 5% で検定せよ。

**解答:** 帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : p = \dfrac{1}{2}$, 対立仮説 $\mathrm{H}_1 : p \neq \dfrac{1}{2}$ (両側検定という) とし検定する。

$X$ で 8 回投げたときの表の出る回数とすると、「帰無仮説のもとその現象が起こりうる」場合は、より起こりにくいと考えられる場合であるすべてが表となる場合と、両側検定なので裏が 7 回または 8 回出る確率を合計したものが $p$ 値となる。$X$ は二項分布 $B\left(8, \dfrac{1}{2}\right)$ に従うので、

$$p\text{ 値} = P(X \leqq 1) + P(X \geqq 7) = {}_8C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_8C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_8C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}_8C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{9}{128} = 0.070\cdots.$$

これは 5% より大きいので $\mathrm{H}_0$ は受容される。すなわち表が出る確率が $\dfrac{1}{2}$ でないとはいえない。 □

例題 3.6 では帰無仮説が $p = 1/2$ であるため、$p$ 値を求めることができた。一般には $p$ 値を求めず棄却する範囲 (棄却域) を定めて検定する方法を用いる。両側検定の場合、棄却域は $X \leqq k$, $l \leqq X$ となる確率がそれぞれ (有意水準)/2 を超えない最大の範囲として定義する。そこで $X$ の実際の値 (実現値) が棄却域に入っていれば $\mathrm{H}_0$ を棄却し、そうでなければ $\mathrm{H}_0$ を受容する。片側検定の場合は対立仮説 $\mathrm{H}_1 : p > p_0$ であれば $X \geqq l$ となる確率が有意水準を超えない最大の範囲を棄却域とする。$\mathrm{H}_1 : p < p_0$ の場合は $X \leqq k$ とし同様に定める。

**例題 3.7** 和子さんは、商店街で買いものをして、5 本のうち 3 本が当たりというスピードくじをひいた。ところが、和子さんは 12 本もひいたのに、4 本しか当たらなかった。このスピードくじは、正しくつくられていないのだろうか。それとも、ただ和子さんが運が悪かっただけだろうか。([3] p.183 より。)

**解答:** このくじが当たる確率を $p$、帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : p = \dfrac{3}{5}$, 対立仮説 $\mathrm{H}_1 : p \neq \dfrac{3}{5}$, 有意水準 5% で検定する。
$X$ で 12 回ひいたときの当たり本数とすると、$X$ の確率分布は次の表で与えられる。

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdots$ | 10 | 11 | 12 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.00002 | 0.00030 | 0.00249 | 0.01236 | 0.04204 | $\cdots$ | 0.06385 | 0.01741 | 0.00218 | 1 |

両側検定なので $X \leqq k$, $X \geqq l$ となる確率がそれぞれ 0.025 以下となるように棄却域を定めると、棄却域は $X \leqq 3$ また $X \geqq 11$ となる。

和子さんは 4 本当たったが、実現値 $X = 4$ は棄却域に入らない。したがって、$\mathrm{H}_0$ は受容される。すなわち当たる確率が $\dfrac{3}{5}$ でないとはいえない。 □

**問 3.5** 5 本のうち 3 本が当たりというスピードくじを、8 本ひいたところ 2 本当たった。次の (1), (2) について有意水準 5% で検定せよ。ただし、$X$ で当たる確率が 0.6 のくじを 8 回ひいたときの当たり本数とすると、$X$ の確率分布は次の表で与えられる。

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.00066 | 0.00786 | 0.04129 | 0.12386 | 0.23224 | 0.27869 | 0.20902 | 0.08958 | 0.01680 | 1 |

(1) このスピードくじは正しくつくられているか (両側検定)。
(2) このスピードくじの当たりの本数は 5 本中 3 本より低いのではないか (片側検定)。

- **母平均の検定**

定理 3.1 を用いて母平均の検定を行う。まず、次の例を考えよう。(以下、[5] を教科書として用いる。)

**例 3.8** 全国一斉にある教科のテストが行われ、その得点は平均値は 58.2 点 , 標準偏差は 12.5 点であった。このテストの A 県の受験生から 400 名を抽出し調査したところ、その平均値は 57.1 点であった。A 県の受験生の平均値は全国の平均値と同じとみなせるか。有意水準 5% で検定せよ。

**解:** 平均値を $m$ とすると題意から、帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : m = 58.2$, 対立仮説 $\mathrm{H}_1 : m \neq 58.2$ とし検定を行う。

$\mathrm{H}_0$ のもと 400 人の標本平均 $\overline{X}$ は $N\left(58.2, \dfrac{12.5^2}{400}\right)$ に従うとみなすことができるから、$Z = \dfrac{\overline{X} - 58.2}{12.5/20}$ の分布は $N(0,1)$ となる。したがって、実現値 $\overline{x} = 57.1$ を代入して

$$z = \frac{57.1 - 58.2}{12.5/20} = 1.76.$$

$p$ 値は $|Z|$ が $z$ 以上に 0 から離れる確率なので

$$\begin{aligned} p\text{ 値} &= P(|Z| \geqq |z|) = 2P(Z \geqq 1.76) \\ &= 2(0.5 - p(1.76)) = 2(0.5 - 0.46080) = 0.07840. \end{aligned}$$

これは有意水準 5% より小さくなるから、$\mathrm{H}_0$ は受容される。すなわち、全国の平均値と同じとみなせる。 □

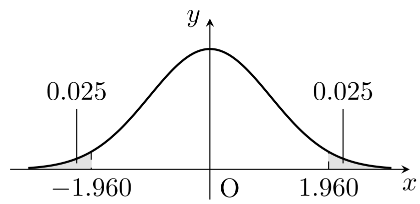
この問題も**棄却域** (棄却するべき実現値 $z$ の範囲) を設定して考えることができる。上の例の両側検定の棄却域は、有意水準を $\alpha$ とするとき

$$P(|Z| \geqq z_{\alpha/2}) = P(Z \leqq -z_{\alpha/2}) + P(Z \geqq z_{\alpha/2}) = \alpha$$

より、$|Z| \geqq z_{\alpha/2}$ が棄却域となる。

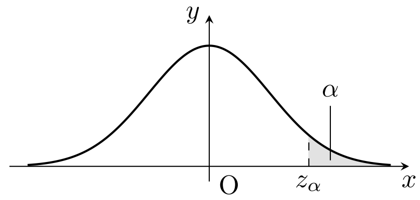
特に、$\alpha = 0.05$ のとき、$z_{0.025} = 1.960$ より、棄却域は図のようになる。例 3.8 の実現値 $z = 1.76$ は棄却域に入らず、$\mathrm{H}_0$ は受容される。

両側検定



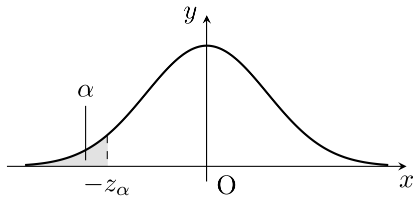

帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : m = m_0$ とするとき、片側検定における**右側検定**および**左側検定**の対立仮説 $\mathrm{H}_1$, 棄却域はそれぞれ左の図のようになる。

右側検定




$\mathrm{H}_1 : m > m_0$, 棄却域 $Z \geqq z_\alpha$

左側検定




$\mathrm{H}_1 : m < m_0$, 棄却域 $Z \leqq -z_\alpha$

**例題 3.9** ある工場で生産される糸の強さは、平均 170.8g の重さに耐えられるように作られている。最近、糸が弱くなったと苦情が寄せられたため、製品から 100 本を無作為抽出して強さを測定したところ、その平均値は 169.8g であった。糸は弱くなったといってよいか。有意水準 5% で検定せよ。なお、これまでの経験から標準偏差は 5.5g と考えられる。

**解:** 平均値を $m$ とする。題意から、$\mathrm{H}_0 : m = 170.8$, $\mathrm{H}_1 : m < 170.8$ とし検定を行う。
$\mathrm{H}_0$ のもと $\overline{X}$ は $N\left(170.8, \dfrac{5.5^2}{100}\right)$ に従うから、$Z = \dfrac{\overline{X} - 170.8}{5.5/10}$ は $N(0,1)$ に従う。
左側検定で有意水準は 5% なので棄却域は $Z \leqq -1.645$.
実現値は $\overline{x} = 169.8$ だから

$$z = \frac{169.8 - 170.8}{5.5/10} \fallingdotseq -1.818.$$

この値は棄却域に入るから、$\mathrm{H}_0$ は棄却され、糸は弱くなったといってよい。 □

**注意 3.4** 上の例題 3.9 について、糸の強さは変化したかを有意水準 5% で検定すると以下のようになる。
$\mathrm{H}_0 : m = 170.8$, $\mathrm{H}_1 : m \neq 170.8$ とし検定を行うと、棄却域は $|Z| \geqq 1.960$ なので、実現値 $z \fallingdotseq -1.818$ は棄却域に入らない。したがって、$\mathrm{H}_0$ は受容され、糸の強さは変化したとはいえないとの結論を得る。

問 3.5 においてもそうであったように、一般に両側検定より片側検定のほうが帰無仮説を棄却しやすい。[7] p.80 には「片側検定を使いたくなるけど普段は両側検定を使っておいた方がよさそうだ」とある。(例題 3.9 の状況では左側検定が妥当であると思われるので、その都度判断する必要がある。)

また、次の問 3.8 と問 3.9 にあるように有意水準を 5% から 1% に変更すると帰無仮説は受容しやすくなる。一般に、検定を行う際は、調査を行う前に、どのような検定を行うかまた有意水準をどうするかを事前に決定しておくことが、結果の信頼性において重要となる。

**問 3.6** 全国の小学校新入生男子の身長 (単位 cm) は正規分布 $N(120.5, 12.0^2)$ に従うことが知られている。ある地域で 100 人の新入生を無作為に選んで調べたところその平均は 118.4cm であった。この地域の新入生男子の身長 $m$ は全国平均と同じといってよいか。有意水準 5% で検定せよ。

**問 3.7** 問 3.6 の状況において、この地域の新入生男子の身長 $m$ は全国平均より低いといってよいか。有意水準 5% で検定せよ。

**問 3.8** ある年度の数学の全国一斉テストの得点は、平均値は 132.2 点, 標準偏差 24.6 点であることが報告されている。ある県で、そこの受験生から 144 名を無作為抽出し得点を調べたところ、その平均は 136.9 点であった。このとき、この県の受験生の平均点 $m$ が全国平均より高いかどうかを、有意水準 5% で検定せよ。

**問 3.9** 問 3.8 の状況において、この県の受験生の平均点 $m$ が全国平均より高いかどうかを、有意水準 1% で検定せよ。

- **母比率の検定**

定理 2.2(二項分布の正規分布による近似) を用いることで、母平均の場合と同様に母比率の検定を行うことができる。

**例題 3.10** A 政党の支持率は 40% であるといわれている。いま、実際に 400 人を無作為抽出し A 政党を支持するか調査したところ、140 人が支持すると答えた。A 政党の支持率は 40% でといってよいか、有意水準 5% で検定せよ。

**解:** 支持率を $p$ とすると題意から、$\mathrm{H}_0 : p = 0.4$, $\mathrm{H}_1 : p \neq 0.4$ とし検定を行う。
400 人中支持すると答えた人数を $X$ とすると、$\mathrm{H}_0$ のもと $X$ は二項分布 $B(400, 0.4)$ に従うから、

$$m = 400 \times 0.4 = 160, \qquad \sigma^2 = 400 \times 0.4 \times (1 - 0.4) = 96.$$

よって、定理 2.2 より $X$ は正規分布 $N(160, 96)$ に従うとみなせるので、$Z = \dfrac{X - 160}{\sqrt{96}}$ は $N(0,1)$ に従う。
両側検定で有意水準は 5% なので棄却域は $|Z| \geqq 1.960$.
実現値は $x = 140$ だから

$$z = \frac{140 - 160}{\sqrt{96}} \fallingdotseq 2.041.$$

この値は棄却域に入るから、$H_0$ は棄却され、支持率は 40% とはとはいえない。 □

**問 3.10** A 政党の支持率は 40% であるといわれているが、最近低下しているようである。いま、実際に 600 人を無作為抽出し A 政党を支持するか調査したところ、220 人が支持すると答えた。A 政党の支持率は 40% より低いといってよいか、有意水準 5% で検定せよ。

**問 3.11** コインを 256 回投げたところ、表が 109 回出た。このコインは表と裏が同じ割合で出るように作られているか。有意水準 1% で検定せよ。

## 問の解答

**1.1** 例題 1.2 と同様の計算により下の表を得る。また、$P(X \leqq 1) = \frac{27}{125} + \frac{54}{125} = \frac{81}{125}$, $P(Y \leqq 1) = \frac{2}{3}$.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{27}{125}$ | $\frac{54}{125}$ | $\frac{36}{125}$ | $\frac{8}{125}$ | 1 |

| $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 計 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ | 1 |

例えば、$P(X=0) = \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \frac{27}{125}$, $P(X=1) = {}_3C_1 \frac{4}{10}\left(\frac{6}{10}\right)^2 = \frac{54}{125}$.

$P(Y=2) = \frac{{}_4C_2 \cdot {}_6C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{10}$, $P(Y=3) = \frac{{}_4C_3 \cdot {}_6C_0}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{30}$.

**1.2** $E(X) = 0 \cdot \frac{27}{125} + 1 \cdot \frac{54}{125} + 2 \cdot \frac{36}{125} + 3 \cdot \frac{8}{125} = \frac{6}{5}$,

$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{27}{125} + 1^2 \cdot \frac{54}{125} + 2^2 \cdot \frac{36}{125} + 3^2 \cdot \frac{8}{125} = \frac{54}{25}$ より $V(X) = \frac{54}{25} - \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{18}{25}$, $\sigma(X) = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

同様に、$E(Y) = \frac{6}{5}$, $E(Y^2) = 2$, $V(Y) = \frac{14}{25}$, $\sigma(Y) = \frac{\sqrt{14}}{5}$.

**1.3** $E\big((X-a)^2\big) = E\big(\{X - m - (m-a)\}^2\big) = E\big((X-m)^2 - 2(m-a)(X-m) + (m-a)^2\big)$,

$= E\big((X-m)^2\big) - 2(m-a)\{E(X) - m\} + (m-a)^2 = V(X) + (m-a)^2$.

**1.4** $X$ のとり得る値は 0, 1, $Y$ のとり得る値は 0, 1, 2 なので下のような計算より、右の同時分布表を得る。

$P(X=0, Y=0) = \frac{6}{8} \cdot \frac{{}_5C_2}{{}_7C_2} = \frac{5}{14}$,

$P(X=0, Y=1) = \frac{6}{8} \cdot \frac{{}_2C_1 \cdot {}_5C_1}{{}_7C_2} = \frac{5}{14}$,

$P(X=0, Y=2) = \frac{6}{8} \cdot \frac{{}_2C_2}{{}_7C_2} = \frac{1}{28}$,

$P(X=1, Y=0) = \frac{2}{8} \cdot \frac{{}_6C_2}{{}_7C_2} = \frac{5}{28}$,

$P(X=1, Y=1) = \frac{2}{8} \cdot \frac{{}_1C_1 \cdot {}_6C_1}{{}_7C_2} = \frac{1}{14}$, 当たりは 2 本なので $P(X=1, Y=2) = 0$.

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 | 2 | 計 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{5}{14}$ | $\frac{5}{14}$ | $\frac{1}{28}$ | $\frac{3}{4}$ |
| 1 | $\frac{5}{28}$ | $\frac{1}{14}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| 計 | $\frac{15}{28}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{28}$ | 1 |

**1.5** $E(X) = 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $E(Y) = 0 \cdot \frac{15}{28} + 1 \cdot \frac{3}{7} + 2 \cdot \frac{1}{28} = \frac{1}{2}$ より $E(3X+2Y) = 3E(X) + 2E(Y) = \frac{7}{4}$.

$E(XY) = 0 \cdot 0 \cdot \frac{5}{14} + 0 \cdot 1 \cdot \frac{5}{14} + 0 \cdot 2 \cdot \frac{1}{28} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{5}{28} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{14} + 1 \cdot 2 \cdot 0 = \frac{1}{14}$.

**1.6** 例題 1.7 より $V(X) = V(Y) = \frac{35}{12}$ なので $V(2X+3Y) = 2^2V(X) + 3^2V(Y) = (4+9) \cdot \frac{35}{12} = \frac{455}{12}$,

$V(2X+3Y) = 2^2V(X) + (-3)^2V(Y) = \frac{455}{12}$.

**1.7** 問 1.1 より $E(X) = E(Y) = E(Z) = \frac{6}{5}$, $V(X) = V(Y) = V(Z) = \frac{18}{25}$ なので、$X, Y, Z$ が互いに独立となることに注意して　$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) = \frac{18}{5}$,

$$E(XYZ)=E(Z)E(Y)E(Z)=\frac{216}{125},\ V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)=\frac{54}{25}.$$

**1.8** $X$ は二項分布 $B\Big(72,\dfrac{1}{6}\Big)$ に従うから、定理 1.6 より

$$E(X)=72\cdot\frac{1}{6}=12,\ V(X)=72\cdot\frac{1}{6}\Big(1-\frac{1}{6}\Big)=10,\ \sigma(X)=\sqrt{10}.$$

**2.1** (1) $P(0\leqq X\leqq 1)=\displaystyle\int_0^1\frac{3}{4}(2x-x^2)\,dx=\frac{3}{4}\Big[x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1=\frac{3}{4}\Big(1-\frac{1}{3}\Big)=\frac{1}{2}.$

(2) $P\Big(\dfrac{1}{2}\leqq X\leqq 2\Big)=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{3}{4}(2x-x^2)\,dx=\frac{3}{4}\Big[x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_{\frac{1}{2}}^2=\frac{3}{4}\Big(4-\frac{8}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{24}\Big)=\frac{27}{32}.$

**2.2** $P(1\leqq X\leqq 1.5)=\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}(1-|x-1|)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\Big(1+\frac{1}{2}\Big)\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$

$$E(X)=\int_0^2 x(1-|x-1|)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^2 x(2-x)\,dx=\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^1+\Big[x^2-\frac{1}{3}x^3\Big]_1^2$$
$$=\frac{1}{3}+4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}=1.$$
$$V(X)=\int_0^2(x-1)^2(1-|x-1|)\,dx=2\int_1^2(x-1)^2\{1-(x-1)\}\,dx=2\Big[\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4\Big]_1^2$$
$=2\Big(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\Big)=\dfrac{1}{6}.$ (2 つ目の等号は関数の直線 $x=1$ についての対称性を用いた。)

**2.3** (1) $P(Z\leqq 1.24)=0.5+P(0\leqq Z\leqq 1.24)=0.5+p(1.24)=0.5+0.39251=0.89251.$

(2) $P(Z>1.07)=0.5-P(0\leqq Z\leqq 1.07)=0.5-p(1.07)=0.5-0.35769=0.14231.$

(3) $P(-0.32\leqq Z\leqq 1.16)=P(-0.32\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1.16)$
$=P(0\leqq Z\leqq 0.32)+P(0\leqq Z\leqq 1.16)=p(0.32)+p(1.16)=0.12552+0.37698=0.50250.$

**2.4** $Z=\dfrac{X-4}{2}$ とすると、$Z$ は $N(0,1)$ に従う。よって、

(1) $P(1.36\leqq X\leqq 4.64)=P\Big(\dfrac{1.36-4}{2}\leqq Z\leqq\dfrac{4.64-4}{2}\Big)=P(-1.32\leqq Z\leqq 0.32)$
$=P(-1.32\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 0.32)=p(1.32)+p(0.32)=0.40658+0.12552=0.53210.$

(2) $P(0.08\leqq X\leqq 2.54)=P\Big(\dfrac{0.08-4}{2}\leqq Z\leqq\dfrac{2.54-4}{2}\Big)=P(-1.96\leqq Z\leqq -0.73)$
$=P(0.73\leqq Z\leqq 1.96)=p(1.96)-p(0.73)=0.47500-0.26730=0.20770.$

**2.5** 例題 2.4 の $Z$ を用いる。

(1) $P(165\leqq X<175)=P\Big(\dfrac{165-170.2}{5}\leqq Z<\dfrac{175-170.2}{5}\Big)=P(-1.04\leqq Z<0.96)$
$=p(1.04)+p(0.96)=0.35083+0.33147=0.68230$ より 68.23 % いる。

(2) $x$ cm となる確率が $P(X\geqq x)=P\Big(Z\geqq\dfrac{x-170.2}{5}\Big)=0.1.$ 正規分布表より $p(1.28)<0.4<p(1.29)=0.40147$ なので、$\dfrac{x-170.2}{5}\geqq 1.29$ とすると、$x\geqq 170.2+5\cdot 1.29=176.65.$
これより 177cm 以上の生徒は 10% より少ないことがわかる。
一方、176cm 以上の生徒が何 % か求めると、$P(X\geqq 176)=P\Big(Z\geqq\dfrac{176-170.2}{5}\Big)=P(Z\geqq 1.16)=0.5-0.37698=0.12302$ となり 12% より大きい。以上より 177 cm が最小の整数値となる。

**2.6** 表の出る回数を $X$ とすると、$X$ は二項分布 $B\Big(100,\dfrac{1}{2}\Big)$ に従い、$X$ の期待値は $m=100\cdot\dfrac{1}{2}=50$, 分散は $\sigma^2=100\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\Big(1-\dfrac{1}{2}\Big)=25=5^2$ となる。よって、$Z=\dfrac{X-50}{5}$ は近似的に $N(0,1)$ に従うので、

$$P(45\leqq X\leqq 54)=P\Big(\frac{45-50}{5}\leqq Z\leqq\frac{54-50}{5}\Big)=P(-1\leqq Z\leqq 0.8)=p(1)+p(0.8)$$
$$=0.34134+0.28814=0.62952.$$

**2.6** (つづき) 計算機による厳密な値は 0.68027．半整数補正すると

$$P(45 \leqq X \leqq 54) = P\Big(\frac{45-0.5-50}{5} \leqq Z \leqq \frac{54+0.5-50}{5}\Big) = P(-1.1 \leqq Z \leqq 0.9)$$
$$= 0.36433 + 0.31594 = 0.68027.$$

**3.1** $\overline{X}$ の分布は $N\Big(60, \dfrac{20^2}{400}\Big)$ とみなすことができるから、$Z = \dfrac{\overline{X}-60}{20/20}$ の分布は $N(0,1)$ となる。よって、

$$P(\overline{X} \leqq 58) = P\Big(Z \leqq \frac{58-60}{1}\Big) = P(Z \leqq -2) = P(Z \geqq 2) = 0.5 - p(2) = 0.5 - 0.47725 = 0.02275.$$

**3.2** 信頼度 95% のとき: $58.2 \pm 1.960 \times \dfrac{20.4}{\sqrt{100}} = 58.2 \pm 3.9984 = \begin{cases} 62.1984 \\ 54.2016 \end{cases}$ より $54.2 \leqq m \leqq 62.2.$

信頼度 90% のとき: $58.2 \pm 1.645 \times \dfrac{20.4}{\sqrt{100}} = 58.2 \pm 3.3558 = \begin{cases} 61.5558 \\ 54.8442 \end{cases}$ より $54.8 \leqq m \leqq 61.6.$

**3.3** 標本の大きさ $n = 250$, 標本比率 $\widehat{p} = \dfrac{252}{350} = 0.72$ であるから

$$0.72 \pm 1.960 \times \sqrt{\frac{0.72 \times (1-0.72)}{350}} = 0.72 \pm 0.04704 = \begin{cases} 0.76704 \\ 0.67296 \end{cases}$$ より $0.694 \leqq p \leqq 0.767.$

**3.4** 例題 3.4 とまったく同様に $n \geqq \left(\dfrac{2 \times 2.576}{0.03}\right)^2 \times \dfrac{1}{4} \fallingdotseq 7373.08$ より 7374 名以上とすればよい。

**3.5** このくじが当たる確率を $p$ とする。

(1) $\mathrm{H}_0 : p = 0.6$, $\mathrm{H}_1 : p \neq 0.6$ で有意水準 5% なので表より棄却域は $X \leqq 1$, $X \geqq 8$ となる。実現値 $X = 2$ は棄却域に入らないので、$\mathrm{H}_0$ は受容される。すなわち当たる確率が 0.6 でないとはいえない。

(2) $\mathrm{H}_0 : p = 0.6$, $\mathrm{H}_1 : p < 0.6$ で有意水準 5% なので表より棄却域は $X \leqq 2$ となる。実現値 $X = 2$ は棄却域に入る ($p$ 値 $= 0.04981$) ので、$\mathrm{H}_0$ は棄却される。すなわち当たる確率は 0.6 より低いと考えられる。

**3.6** $\mathrm{H}_0 : m = 120.5$, $\mathrm{H}_1 : m \neq 120.5$ とし検定する。
$\mathrm{H}_0$ のもと $\overline{X}$ は $N\Big(120.5, \dfrac{12.0^2}{100}\Big)$ に従うから、$Z = \dfrac{\overline{X} - 120.5}{12.0/10}$ は $N(0,1)$ に従う。
両側検定で有意水準は 5% なので棄却域は $|Z| \geqq 1.960.$
実現値は $\overline{x} = 118.4$ だから $z = \dfrac{118.4 - 120.5}{12.0/10} = -1.75.$
この値は棄却域に入らないから、$\mathrm{H}_0$ は受容され、全国平均と同じといってよい。

**3.7** $\mathrm{H}_0 : m = 120.5$, $\mathrm{H}_1 : m < 120.5$ とし検定する。棄却域は $Z \leqq -1.645$ で問 3.6 と同様の計算より実現値は $z = -1.75$ なので、この値は棄却域に入る。よって、$\mathrm{H}_0$ は棄却され、全国平均より低いといってよい。

**3.8** $\mathrm{H}_0 : m = 132.2$, $\mathrm{H}_1 : m > 132.2$ とし検定する。
$\mathrm{H}_0$ のもと $\overline{X}$ は $N\Big(132.2, \dfrac{24.6^2}{144}\Big)$ に従うから、$Z = \dfrac{\overline{X} - 132.2}{24.6/12}$ は $N(0,1)$ に従う。
右側検定で有意水準は 5% なので棄却域は $Z \geqq 1.645.$
実現値は $\overline{x} = 136.1$ だから $z = \dfrac{136.9 - 132.2}{24.6/12} \fallingdotseq 2.293.$
この値は棄却域に入るから、$\mathrm{H}_0$ は棄却され、全国平均より高いといってよい。

**3.9** $\mathrm{H}_0 : m = 132.2$, $\mathrm{H}_1 : m > 132.2$ とし検定する。$z_{0.01} = 2.326$ より棄却域は $Z \geqq 2.326$ で問 3.8 より

実現値は $z \fallingdotseq 2.293$. この値は棄却域に入らないから、$\mathrm{H}_0$ は受容され、全国平均より高いとはいえない。

**3.10** 支持率を $p$ とする。題意から、$\mathrm{H}_0 : p = 0.4$, $\mathrm{H}_1 : p < 0.4$ とし検定する。

600 人中支持すると答えた人数を $X$ とすると、$\mathrm{H}_0$ のもと $X$ は $B(600, 0.4)$ に従うから、

$$m = 600 \times 0.4 = 240,\ \sigma^2 = 600 \times 0.4 \times (1 - 0.4) = 144.$$

よって、$X$ は $N(240, 144)$ に従うとみなせるので、$Z = \dfrac{X - 240}{\sqrt{144}}$ は $N(0, 1)$ に従う。

左側検定で有意水準は 5% なので棄却域は $Z \leqq -1.645$.

実現値は $x = 220$ だから $z = \dfrac{220 - 240}{\sqrt{144}} \fallingdotseq -1.667$.

この値は棄却域に入るから、$\mathrm{H}_0$ は棄却され、支持率は 40% より低いといってよい。

**3.11** 表の出る確率を $p$ とする。題意から、$\mathrm{H}_0 : p = 0.5$, $\mathrm{H}_1 : p \neq 0.5$ とし検定する。

256 回中表の出た回数を $X$ とすると、$\mathrm{H}_0$ のもと $X$ は $B(256, 0.5)$ に従うから、

$$m = 256 \times 0.5 = 128,\ \sigma^2 = 256 \times 0.5 \times (1 - 0.5) = 64.$$

よって、$X$ は $N(128, 64)$ に従うとみなせるので、$Z = \dfrac{X - 128}{\sqrt{64}}$ は $N(0, 1)$ に従う。

両側検定で有意水準は 1% なので棄却域は $|Z| \geqq 2.576$.

実現値は $x = 110$ だから $z = \dfrac{109 - 128}{\sqrt{64}} = -2.375$.

この値は棄却域に入らないから、$\mathrm{H}_0$ は受容され、表と裏が同じ割合で出ないとはいえない。

## 参考文献


[1] 高等学校数学科用 文部科学省検定済教科書
東書 301 数学 B, 実教 303 数学 B, 啓林館 306 詳説 数学 B, 数研 325 数学Ｂ

[2] 小松 勇作編: 高等学校 確率・統計, 旺文社, 1983. (文部省検定済教科書)

[3] 黒田 孝郎, 小島 順, 野崎 昭弘, 森 毅: 高等学校の確率・統計, ちくま学芸文庫, 2011.

[4] 学習指導要領解説 (平成 29 年 3 月公示)
高等学校 数学編 理数編 http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/1407074.htm

[5] 新確率統計, 大日本図書, 2013. (高等専門学校向け教科書)

[6] 廣瀬 雅代, 稲垣 佑典, 深井 肇一: サンプリングって何だろう, 岩波科学ライブラリー, 2018.

[7] 栗原伸一, 丸山敦史, ジーグレイプ: 統計学図鑑, オーム社, 2017.

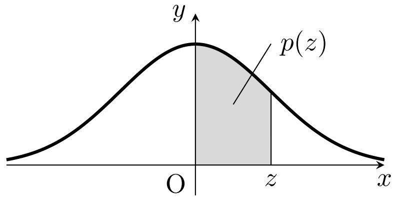
[8] 西内 啓: 統計学が最強の学問である, ダイヤモンド社, 2013.

[9] 日本統計学会編: 日本統計学会公式認定 統計検定 2 級対応 統計学基礎 改訂版, 東京図書, 2015.

[10] 奥村 晴彦: R で楽しむ統計学, 共立出版, 2016.

[11] 田栗 正章, 藤越 康祝, 柳井 晴夫, C.R. ラオ: やさしい統計入門, 講談社ブルーバックス, 2007.

## 正規分布表　$p(z) = P(0 \leqq Z \leqq z)$




| z | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.00000 | 0.00399 | 0.00798 | 0.01197 | 0.01595 | 0.01994 | 0.02392 | 0.02790 | 0.03188 | 0.03586 |
| 0.1 | 0.03983 | 0.04380 | 0.04776 | 0.05172 | 0.05567 | 0.05962 | 0.06356 | 0.06749 | 0.07142 | 0.07535 |
| 0.2 | 0.07926 | 0.08317 | 0.08706 | 0.09095 | 0.09483 | 0.09871 | 0.10257 | 0.10642 | 0.11026 | 0.11409 |
| 0.3 | 0.11791 | 0.12172 | 0.12552 | 0.12930 | 0.13307 | 0.13683 | 0.14058 | 0.14431 | 0.14803 | 0.15173 |
| 0.4 | 0.15542 | 0.15910 | 0.16276 | 0.16640 | 0.17003 | 0.17364 | 0.17724 | 0.18082 | 0.18439 | 0.18793 |
| 0.5 | 0.19146 | 0.19497 | 0.19847 | 0.20194 | 0.20540 | 0.20884 | 0.21226 | 0.21566 | 0.21904 | 0.22240 |
| 0.6 | 0.22575 | 0.22907 | 0.23237 | 0.23565 | 0.23891 | 0.24215 | 0.24537 | 0.24857 | 0.25175 | 0.25490 |
| 0.7 | 0.25804 | 0.26115 | 0.26424 | 0.26730 | 0.27035 | 0.27337 | 0.27637 | 0.27935 | 0.28230 | 0.28524 |
| 0.8 | 0.28814 | 0.29103 | 0.29389 | 0.29673 | 0.29955 | 0.30234 | 0.30511 | 0.30785 | 0.31057 | 0.31327 |
| 0.9 | 0.31594 | 0.31859 | 0.32121 | 0.32381 | 0.32639 | 0.32894 | 0.33147 | 0.33398 | 0.33646 | 0.33891 |
| 1.0 | 0.34134 | 0.34375 | 0.34614 | 0.34849 | 0.35083 | 0.35314 | 0.35543 | 0.35769 | 0.35993 | 0.36214 |
| 1.1 | 0.36433 | 0.36650 | 0.36864 | 0.37076 | 0.37286 | 0.37493 | 0.37698 | 0.37900 | 0.38100 | 0.38298 |
| 1.2 | 0.38493 | 0.38686 | 0.38877 | 0.39065 | 0.39251 | 0.39435 | 0.39617 | 0.39796 | 0.39973 | 0.40147 |
| 1.3 | 0.40320 | 0.40490 | 0.40658 | 0.40824 | 0.40988 | 0.41149 | 0.41309 | 0.41466 | 0.41621 | 0.41774 |
| 1.4 | 0.41924 | 0.42073 | 0.42220 | 0.42364 | 0.42507 | 0.42647 | 0.42785 | 0.42922 | 0.43056 | 0.43189 |
| 1.5 | 0.43319 | 0.43448 | 0.43574 | 0.43699 | 0.43822 | 0.43943 | 0.44062 | 0.44179 | 0.44295 | 0.44408 |
| 1.6 | 0.44520 | 0.44630 | 0.44738 | 0.44845 | 0.44950 | 0.45053 | 0.45154 | 0.45254 | 0.45352 | 0.45449 |
| 1.7 | 0.45543 | 0.45637 | 0.45728 | 0.45818 | 0.45907 | 0.45994 | 0.46080 | 0.46164 | 0.46246 | 0.46327 |
| 1.8 | 0.46407 | 0.46485 | 0.46562 | 0.46638 | 0.46712 | 0.46784 | 0.46856 | 0.46926 | 0.46995 | 0.47062 |
| 1.9 | 0.47128 | 0.47193 | 0.47257 | 0.47320 | 0.47381 | 0.47441 | 0.47500 | 0.47558 | 0.47615 | 0.47670 |
| 2.0 | 0.47725 | 0.47778 | 0.47831 | 0.47882 | 0.47932 | 0.47982 | 0.48030 | 0.48077 | 0.48124 | 0.48169 |
| 2.1 | 0.48214 | 0.48257 | 0.48300 | 0.48341 | 0.48382 | 0.48422 | 0.48461 | 0.48500 | 0.48537 | 0.48574 |
| 2.2 | 0.48610 | 0.48645 | 0.48679 | 0.48713 | 0.48745 | 0.48778 | 0.48809 | 0.48840 | 0.48870 | 0.48899 |
| 2.3 | 0.48928 | 0.48956 | 0.48983 | 0.49010 | 0.49036 | 0.49061 | 0.49086 | 0.49111 | 0.49134 | 0.49158 |
| 2.4 | 0.49180 | 0.49202 | 0.49224 | 0.49245 | 0.49266 | 0.49286 | 0.49305 | 0.49324 | 0.49343 | 0.49361 |
| 2.5 | 0.49379 | 0.49396 | 0.49413 | 0.49430 | 0.49446 | 0.49461 | 0.49477 | 0.49492 | 0.49506 | 0.49520 |
| 2.6 | 0.49534 | 0.49547 | 0.49560 | 0.49573 | 0.49585 | 0.49598 | 0.49609 | 0.49621 | 0.49632 | 0.49643 |
| 2.7 | 0.49653 | 0.49664 | 0.49674 | 0.49683 | 0.49693 | 0.49702 | 0.49711 | 0.49720 | 0.49728 | 0.49736 |
| 2.8 | 0.49744 | 0.49752 | 0.49760 | 0.49767 | 0.49774 | 0.49781 | 0.49788 | 0.49795 | 0.49801 | 0.49807 |
| 2.9 | 0.49813 | 0.49819 | 0.49825 | 0.49831 | 0.49836 | 0.49841 | 0.49846 | 0.49851 | 0.49856 | 0.49861 |
| 3.0 | 0.49865 | 0.49869 | 0.49874 | 0.49878 | 0.49882 | 0.49886 | 0.49889 | 0.49893 | 0.49896 | 0.49900 |
| 3.1 | 0.49903 | 0.49906 | 0.49910 | 0.49913 | 0.49916 | 0.49918 | 0.49921 | 0.49924 | 0.49926 | 0.49929 |
| 3.2 | 0.49931 | 0.49934 | 0.49936 | 0.49938 | 0.49940 | 0.49942 | 0.49944 | 0.49946 | 0.49948 | 0.49950 |
| 3.3 | 0.49952 | 0.49953 | 0.49955 | 0.49957 | 0.49958 | 0.49960 | 0.49961 | 0.49962 | 0.49964 | 0.49965 |
| 3.4 | 0.49966 | 0.49968 | 0.49969 | 0.49970 | 0.49971 | 0.49972 | 0.49973 | 0.49974 | 0.49975 | 0.49976 |
| 3.5 | 0.49977 | 0.49978 | 0.49978 | 0.49979 | 0.49980 | 0.49981 | 0.49981 | 0.49982 | 0.49983 | 0.49983 |
| 3.6 | 0.49984 | 0.49985 | 0.49985 | 0.49986 | 0.49986 | 0.49987 | 0.49987 | 0.49988 | 0.49988 | 0.49989 |
| 3.7 | 0.49989 | 0.49990 | 0.49990 | 0.49990 | 0.49991 | 0.49991 | 0.49992 | 0.49992 | 0.49992 | 0.49992 |
| 3.8 | 0.49993 | 0.49993 | 0.49993 | 0.49994 | 0.49994 | 0.49994 | 0.49994 | 0.49995 | 0.49995 | 0.49995 |
| 3.9 | 0.49995 | 0.49995 | 0.49996 | 0.49996 | 0.49996 | 0.49996 | 0.49996 | 0.49996 | 0.49997 | 0.49997 |