

連絡事項: 期末テスト (7月24日) の範囲は教科書の以下の部分とします。電卓は持ち込み可です。

第3章 2.3 統計量と標本分布,

第4章 1.2 母平均の区間推定 (1), 1.3 母平均の区間推定 (2) の例題 2, 問 5,

1.5 母比率の区間推定, 練習問題 1-A 3, 4, 5,

2.1 仮説と検定, 2.2 母平均の検定 (1), 2.7 母比率の検定, 練習問題 2-A 1, 6

## 1.2 母平均の区間推定 (1)

未知母数がある確率  $1 - \alpha$  で (これを信頼係数または信頼度という) 入る区間を推定する。これを区間推定といい、推定された区間を  $100(1 - \alpha)\%$  信頼区間あるいは信頼係数  $100(1 - \alpha)\%$  の信頼区間という。

$0 < \alpha < 1$  である値  $\alpha$  と標準正規分布に従う確率変数  $Z$  について  $P(Z \geq z_\alpha) = \alpha$  となる  $z_\alpha$  を標準正規分布の上側  $\alpha$  点という。(教科書 p.98 のグラフを参照のこと。) 以下の数値がよく用いられる。

$$z_{0.05} = 1.645, \quad z_{0.025} = 1.960, \quad z_{0.01} = 2.326, \quad z_{0.005} = 2.576.$$

定理 (母平均の区間推定 (母分散が既知の場合)) 正規母集団  $N(\mu, \sigma^2)$  から大きさ  $n$  の無作為標本の標本平均の実現値を  $\bar{x}$  とすると、母平均  $\mu$  の  $100(1 - \alpha)\%$  信頼区間は

$$\bar{x} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}. \quad (1)$$

証明: 正規母集団  $N(\mu, \sigma^2)$  から大きさ  $n$  の無作為標本の標本平均を  $\bar{X}$  とすると、 $\bar{X}$  は  $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$  に従う。

このとき、その標準化  $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}$  は  $N(0, 1)$  に従うから、

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

括弧内の不等式を  $\mu$  について解くと、 $\bar{X} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$  となるが、これは  $\mu$  がこの区間に含まれる確率が  $1 - \alpha$  であることを示している。この  $\bar{X}$  にその実現値  $\bar{x}$  を代入することで (1) 式を得る。□

注意 母集団分布が未知でも、標本の大きさ  $n$  が大きい場合は、母分散  $\sigma^2$  を不偏分散の実現値  $u^2$  に代用して上記の公式 (1) は成立する (cf. 教科書 p.100)。これは中心極限定理による。また、不偏分散  $U^2$  に対して  $E[U^2] = \sigma^2$  が成立するため、標本分散より不偏分散のほうが  $\sigma^2$  をより反映する数値であることに注意する。

例題 2 ある学校の生徒 50 人を無作為に選び、1 週間あたりのテレビ視聴時間 (単位 時間) を聞いたところ、50 人の平均  $\bar{x}$  は 18.2, 不偏分散  $u^2$  は 30.25 であった、母平均  $\mu$  の 95% 信頼区間を求めよ。

解:  $100(1 - \alpha) = 95$  より  $\alpha = 0.05$ . 標本の大きさ  $n = 50$  は十分に大きいと考えると、

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{u^2}{n}} = 18.2 \pm 1.960 \sqrt{\frac{30.25}{50}} = 18.2 \pm 1.5245 \dots = \begin{cases} 19.7245 \dots \\ 16.6754 \dots \end{cases}$$

従って、 $16.6 \leq \mu \leq 19.8$ . □

注意 例題 2 解の最後の端数処理において、下限の数値の端数は切り捨て、上限の数値の端数は切り上げた。通常、区間推定では安全第一で、区間が狭くなりすぎないようにこのような端数処理を行う。次ページの例題 4 も同様。(下限上限ともに四捨五入する場合があります。教科書は四捨五入しているようです。小数点以下何位まで求めたらよいかを含め、問題文等の指示に従って処理してください。)

## 1.5 母比率の区間推定

定理 (母比率の区間推定) 二項母集団から大きさ  $n$  の無作為標本の標本比率の実現値を  $\hat{p}$  とすると、母比率  $p$  の  $100(1 - \alpha)\%$  信頼区間は

$$\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}. \quad (2)$$

解説: 母比率  $p$  の二項母集団から大きさ  $n$  の無作為標本の標本比率を  $\hat{P}$  とすると、 $E[\hat{P}] = p$ ,  $V[\hat{P}] = \frac{p(1 - p)}{n}$ .

よって、 $Z = \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1 - p)/n}}$  は  $N(0, 1)$  に従うから、

$$P\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{P} - p}{\sqrt{p(1 - p)/n}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha.$$

括弧の中の不等式は、 $\hat{P} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}} \leq p \leq \hat{P} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}}$  と変形できる。この  $\hat{P}$  とその両辺の根号内の  $p$  をすべて  $\hat{P}$  の実現値  $\hat{p}$  に置き換えて、(2) 式を得る。  $\square$

例題 4 A 市で、あるテレビ番組の視聴率を調べるために、成人 500 人を無作為抽出したところ、45 人が見ていることがわかった。A 市におけるこの番組の成人の視聴率の 95% 信頼区間を求めよ。

解:  $\alpha = 0.05$ ,  $n = 500$ ,  $\hat{p} = \frac{45}{500} = 0.09$  だから

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} = 0.09 \pm 1.960 \sqrt{\frac{0.09 \times 0.91}{500}} = 0.09 \pm 0.02508 \dots = \begin{cases} 0.11508 \dots \\ 0.06491 \dots \end{cases}$$

従って、 $0.064 \leq p \leq 0.116$ .  $\square$

例題 5 ある都市で、有権者の内閣支持率  $p$  を調べるのに標本調査を行うことになった。信頼区間の幅が 0.04 以下になるように、信頼係数 99% で  $p$  を区間推定したい。抽出する有権者の数を何名以上にすればよいか。

解: 抽出する人数を  $n$  とする。信頼区間は (2) 式で与えられるので、その幅は

$$\left(\hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}\right) - \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}\right) = 2 \times z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}.$$

したがって、 $2 \times z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} \leq 0.04$ .  $\alpha = 0.01$  なので、これを代入し変形すると

$$n \geq \left(\frac{2 \times z_{0.005}}{0.04}\right)^2 \hat{p}(1 - \hat{p})$$

これがどんな  $\hat{p}$  に対しても成立すればよい。ここで、 $\hat{p}(1 - \hat{p}) = -\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$  より

$$n \geq \left(\frac{2 \times 2.576}{0.04}\right)^2 \times \frac{1}{4} = 4147.36,$$

以上より 4148 名以上とすればよい。  $\square$