基礎ゼミ I　問題 14　　2019 年 7 月 22 日

例. $\boldsymbol{n}=(a,b,c)\neq(0,0,0)$ とする。点 $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ を通り、ベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面の方程式は、

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0 \tag{1}$$

と表される。特に、$ax+by+cz=d$ は平面の方程式となる。$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ を平面 (1) の**法線ベクトル**という。

証明　これは平面上の点を $\mathrm{P}(x,y,z)$ とすると、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1)$ とベクトル $\boldsymbol{n}$ が直交しているため、その内積が 0 になることより (1) は従う。次の式は $d=ax_1+by_1+cz_1$ とすれば (1) より得られる。□

問 14.1. $\mathrm{A}(1,2,-1)$, $\mathrm{B}(3,-1,0)$, $\mathrm{C}(2,-3,-1)$ とする。直線 AB に垂直で点 $(1,-1,2)$ を通る平面 (A) と、3 点 A, B, C を通る平面 (B) の方程式を求めよ。

問 14.2. (1) 平面 $x-2y-z-6=0$ 上の点で原点 O からの距離が最小となる点の座標とその距離を求めよ。
(2) 点 $(1,2,3)$ から平面 $3x+y-2z+29=0$ までの距離を求めよ。

問 14.3 (ヘッセの標準形)**.** 原点から平面 (H) に下した垂線の長さを p とするとき、その平面の方程式は

$$lx+my+nz=p, \qquad l^2+m^2+n^2=1$$

と表されることを示せ。

問 14.4. 同一平面上にない 3 点 $\mathrm{P}_1(a_1,b_1,c_1)$, $\mathrm{P}_2(a_2,b_2,c_2)$, $\mathrm{P}_3(a_3,b_3,c_3)$ を通る平面の方程式は

(1) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 1 \end{vmatrix}=0$, (2) $\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ x-a_2 & y-b_2 & z-c_2 \\ x-a_3 & y-b_3 & z-c_3 \end{vmatrix}=0$ で与えられることをそれぞれ示せ。

例. ベクトル $\boldsymbol{k}=(a,b,c)\neq(0,0,0)$ に平行で、点 $\mathrm{A}(x_1,y_1,z_1)$ を通る直線の方程式は、$\boldsymbol{p}=(x,y,z)$, $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$ とするとき、$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{k}$ $(t\in\mathbf{R})$、成分で表わすと

$$x=x_1+at \qquad y=y_1+bt \qquad z=z_1+ct$$

と媒介変数表示される。これから、t を消去し、$\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ とも表わされる。このベクトル $\boldsymbol{k}$ を直線の**方向ベクトル**という。

問 14.5. $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(2,-1,5)$ とする。2 点 A, B を通る直線 ℓ_1 と点 A を通り平面 $x+2y-z=3$ に垂直な直線 ℓ_2 の方程式を求めよ。

問 14.6. 直線 $x-1=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z+4}{2}$ 上の点で原点 O からの距離が最小となる点の座標とその距離を求めよ。

問 14.7. (1) 2 つの平面 $-x+3y-5z=1$, $2x-y-z=3$ のなす角 θ を求めよ。ただし、$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ とする。
(2) 2 つの直線 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{4}$,　$x-1=\dfrac{2-y}{10}=\dfrac{-z}{7}$ のなす角 θ を求めよ。ただし、$0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

問 14.8. 2 つの平面 $3x-2y+z=-4$, $x+y-z=1$ に共通して含まれる直線の方程式を求めよ。

問 14.9. 平面 (H) $x+2y+3z=5$ に関して点 $\mathrm{A}(2,1,5)$ と対称な点 A' の座標を求めよ。また、その点 A' と点 $\mathrm{B}(6,6,5)$ を結ぶ直線 $\mathrm{A}'\mathrm{B}$ の方程式と、その直線と平面 (H) との交点の座標を求めよ。

問 14.10 (Woodbury の公式)**.** n 次正方行列 A,B,U,V および $A+UBV$ が正則のとき、次が成り立つことを示せ。

$$(A+UBV)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(B^{-1}+VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

問 14.11. 次の各組のベクトルが、一次従属となるように x,y の値を定めよ。
(1) $\boldsymbol{a}_1=(1,2,0,3)$, $\boldsymbol{a}_2=(x,0,0,2)$, $\boldsymbol{a}_3=(-1,1,-1,x)$, $\boldsymbol{a}_4=(3,-5,1,-8)$
(2) $\boldsymbol{b}_1=(1,1,-2,1)$, $\boldsymbol{b}_2=(1,-2,x,1)$, $\boldsymbol{b}_3=(-2,1,1,y)$

問 14.12. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ が一次独立のとき、$k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$ が一次従属となるような k の値を求めよ。