

問 13.1. $f(x)$ が $[a, b]$ で連続で、つねに $f(x) \geq 0$ で $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$ とする。このとき、次を示せ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f(x)^n dx \right)^{1/n} = M$$

問 13.2. 次の等式をみたす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 1 + \int_0^\pi f(t) \sin(x-t) dt$$

問 13.3. 次の広義定積分を求めよ。ただし、 $a < b, \alpha > 0, n \in \mathbf{N}$ とする。

- (1) $\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$ (2) $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$ (3) $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$ (4) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$
 (5) $\int_0^1 \log x dx$ (6) $\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^2)}$ (7) $\int_1^\infty \frac{x+1}{x(1+x^2)} dx$ (8) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^2}$
 (9) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$ (10) $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx$ (11) $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{\sqrt{1-x}} dx$ (12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$
 (13) $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 - \cos x} dx$ (14) $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos x dx$ (15) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2 + 6x + 3}$ (16) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{e^x - 1}}$
 (17) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ (18) $\int_{-\infty}^0 e^{3x} \sqrt{1 - e^{3x}} dx$ (19) $\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} dx$ (20) $\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

問 13.4. $\alpha > 0$ とする。次の広義積分が絶対収束するかを調べよ。

- (1) $\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x^\alpha} dx$ (2) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\log x)^\alpha}$ (3) $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\sin \theta)^\alpha}$ (4) $\int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-x^2} dx$

問 13.5. (1) 広義積分 $\int_\pi^\infty \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx$ は $0 < \alpha \leq 1$ のとき発散し $\alpha > 1$ のとき収束することを示せ。

(2) $\alpha > 0$ のとき、広義積分 $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ は収束することを示せ。

(3) $\alpha > 0$ とする。広義積分 $\int_{\pi^{1/\alpha}}^\infty \sin(x^\alpha) dx$ の収束・発散を調べよ。

問 13.6 (Cycloid(サイクロイド)). $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$) の 1 つの弧と x -軸との間の面積を求めよ。また、その弧の長さを求めよ。

問 13.7 (Asteroid(アステロイド)). 原点を中心とする半径 a ($a > 0$) の大円に、半径 $\frac{a}{4}$ の小円が $(a, 0)$ を接点として内側に接している。この小円が大円の内側を滑ること無く転がるとき、小円上の点 $(a, 0)$ の軌跡を円の転がった角度を θ としてパラメータ曲線に表示せよ。

問 13.8. 上で与えたアステロイドで、パラメータが $0 \leq \theta \leq 2\pi$ を動くときの曲線の長さを求めよ。

問 13.9. 上で与えたアステロイドが囲む部分の面積を求めよ。

問 13.10 (Catenary (カテナリー, 懸垂線)). $y = a \cosh \frac{x}{a}$ ($a > 0$) の $0 \leq x \leq a$ の範囲の長さを求めよ。

問 13.11 (Cardioid (カージオイド, 心臓形)). 極座標表示された曲線 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$) の囲む部分の面積を求めよ。

問 13.12 (Lemniscate (レムニスケート, 連珠形)). $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$) を極座標表示で表せ。また、この曲線が囲む 2 つの珠の部分の面積の和を求めよ。^{*1}

^{*1} この曲線の長さは、楕円積分 (楕円の全長を求める際にも現れる) と呼ばれる初等的には求まらない積分になる。C. L. Siegel, Topics in Complex Function Theory, vol. 1 に詳しい解説がある。

問 13.3 ヒント:

(4) $t = x^{1/6}$ とおく。

(14) $I_M = \int_0^M e^{-\alpha x} \cos x \, dx$ に対して、部分積分を 2 回用いよ。

(16) $u = \sqrt[3]{e^x - 1}$ とおき、 u に関する分数関数の積分に帰着する。

(19) $t = \frac{1}{x}$ と置換することで $I := \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2} \, dx = - \int_0^\infty \frac{t^2 \log t}{(1+t^2)^2} \, dt$ を導き、 $2I = \int_0^\infty \frac{(1-x^2) \log x}{(1+x^2)^2} \, dx = \int_0^\infty \left(\frac{x}{1+x^2} \right)' \log x \, dx$ と部分積分法を用いる。